Chapitre 2: Opérateurs linéaires et Théorèmes fondamentaux

LOMBARKIA Farida

Département de Mathématiques,
Faculté de Mathématiques et informatique,
Université de Batna 2

1er semestre 2021-2022,
Première année Master 1 (MA)

Opérateurs linéaires bornés

Opérateurs fermés

Espace dual d'un espace normé

Théorèmes fondamentaux

Opérateurs linéaires bornés

Opérateurs fermés

Espace dual d'un espace normé

Théorèmes fondamentaux

Opérateurs linéaires bornés

Opérateurs fermés

Espace dual d'un espace normé

Théorèmes fondamentaux

Opérateurs linéaires bornés

Opérateurs fermés

Espace dual d'un espace normé

Théorèmes fondamentaux

Opérateurs linéaires bornés

Soient X *,et* Y *deux espaces vectoriels sur le corps* $\mathbb{K}$ *qui represente* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et* $L(X, Y)$ *l'espace des opérateurs linéaires de* X *dans* Y*, Si* $X = Y$*, on pose* $L(X, X) = L(X)$*, pour* $A \in L(X, Y)$*, on note par* $D(A) \subset X$ *le domaine de* A*,* $\ker A = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$ *le noyau de* A *et* $R(A) = \{Ax/x \in D(A)\}$ *l'image de* A

Définition (Opérateurs bornés)

Supposons que X *et* Y *sont des espaces normés et* $A \in L(X, Y)$ *de domaine* $D(A)$*. Alors* A *est borné si*

$$\exists M > 0, \quad \text{tel que} \ \ \forall x \in D(A), \quad \|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

Opérateurs linéaires bornés

Soient X*,et* Y *deux espaces vectoriels sur le corps* $\mathbb{K}$ *qui represente* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et* $L(X, Y)$ *l'espace des opérateurs linéaires de* X *dans* Y*, Si* $X = Y$*, on pose* $L(X, X) = L(X)$*, pour* $A \in L(X, Y)$*, on note par* $D(A) \subset X$ *le domaine de* A*,* $\ker A = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$ *le noyau de* A *et* $R(A) = \{Ax/x \in D(A)\}$ *l'image de* A

Définition (Opérateurs bornés)

Supposons que X *et* Y *sont des espaces normés et* $A \in L(X, Y)$ *de domaine* $D(A)$*. Alors* A *est borné si*

$$\exists M > 0, \quad \textit{tel que} \ \ \forall x \in D(A), \quad \|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

Définition

Soit $A \in L(X, Y)$ de domaine $D(A)$ un opérateur borné, on définit la norme de A par

$$\|A\| = \sup_{x \in D(A), x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \in D(A), \|x\|=1} \|Ax\|.$$

On en déduit que $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|, \quad \forall x \in D(A)$.

Théorème

Soient X un espace normé et Y un espace de Banach et $A \in L(X, Y)$ de domaine $D(A)$ un opérateur borné. Alors A possède une unique extension borné $\widetilde{A} : \overline{D(A)} \to Y$, de plus

$$\|\widetilde{A}\| = \|A\|.$$

On note par $\mathcal{B}(X, Y)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de l'espace normé X, dans l'espace normé Y, l'espace $\mathcal{B}(X, Y)$ est muni de la norme $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Lemme

Soient X et Y des espaces normés , On a

1. *Si Y est un espace de Banach, alors $\mathcal{B}(X, Y)$ est aussi un espace de Banach.*
2. *Si Z est un autre espace normé, $A_1 \in \mathcal{B}(X, Y)$ et $A_2 \in \mathcal{B}(Y, Z)$, alors A_2A_1 est un élément de $\mathcal{B}(X, Z)$ et $\|A_2A_1\| \leq \|A_2\|\|A_1\|$.*

Example

Si $A \in \mathcal{B}(X)$, alors $\exp(A) \in \mathcal{B}(X)$, il suffit d'utiliser

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Example

Soit $X = L^2([a, b])$ et soit $A : X \to X$ défini par $(Af)(s) = \int_a^b k(s, t)f(t)dt$, avec $k \in L^2([a, b] \times [a, b])$, alors A est un opérateur borné. En effet le noyau $k(s, t)$ vérifie

$$\int_a^b \int_a^b |k(s, t)|^2 dsdt < \infty.$$

Opérateurs linéaires bornés

Opérateurs fermés

Espace dual d'un espace normé

Théorèmes fondamentaux

Opérateurs Compacts

Définition

Soient X et Y deux espaces normés, l'opérateur $A \in L(X, Y))$ est dit compact si pour toute partie bornée M de X, l'ensemble $A(M)$ est relativement compact ($\overline{A(M)}$ est compact) ceci est équivalent à pour toute suite (x_n) bornée de X, la suite (Ax_n) admet une sous suite convergente dans y.

Définition

Un opérateur $A \in L(X, Y))$ est dit rang fini si la dimension de l'image de A est fini ($dimR(A) < \infty$).

Opérateurs Compacts

Définition

Soient X et Y deux espaces normés, l'opérateur $A \in L(X, Y))$ est dit compact si pour toute partie bornée M de X, l'ensemble $A(M)$ est relativement compact ($\overline{A(M)}$ est compact) ceci est équivalent à pour toute suite (x_n) bornée de X, la suite (Ax_n) admet une sous suite convergente dans y.

Définition

Un opérateur $A \in L(X, Y))$ est dit rang fini si la dimension de l'image de A est fini ($dim R(A) < \infty$).

Remarques

- *L'opérateur identité sur un espace de Banach X est compact si et seulement si $\dim X < \infty$, car, la boule unité fermée (qui est limage d'elle même par l'opérateur identité) n'est pas compacte d'après le théorème de Riesz.*
- *Si $A \in L(X, Y)$ est un opérateur compact et $R(A)$ est fermé dans Y, alors A est un opérateur de rang fini.*

Théorème

Soient X, Y deux espaces normés et $A \in L(X, Y)$.

1. *Si A est un opérateur compact, alors $A \in \mathcal{B}(X, Y)$.*
2. *Si A est de rang fini, alors A compact.*
3. *Soit Z un autre espace normé, et soit $A \in L(X, Y)$ et $B \in L(Y, Z)$. Si A est compact et B est borné, alors BA est compact de même Si B est compact et A est borné, alors BA est compact.*
4. *Si (A_n) est une suite d'opérateurs compacts de X dans l'espace de Banach Y et (A_n) converge vers A, alors A est compact.*

Example

Lopérateur $A : l^2(\mathbb{K}) \to l^2(\mathbb{K})$

$$A(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \cdots, \frac{x_n}{n}, \cdots),$$

est compact. En effet, on définit la suite d'opérateurs (A_n) par

$$A_n(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \cdots, \frac{x_n}{n}, 0, 0, 0 \cdots),$$

les opérateurs A_n sont de rang fini et la suite (A_n) converge vers A, en effet on a

$$\|A_n x - Ax\|_{l^2}^2 \leq \frac{1}{(n+1)^2}\|x\|^2 \Longrightarrow \|A_n - A\|_{\mathcal{B}(l^2)}^2 \leq \frac{1}{(n+1)},$$

donc $A_n \longrightarrow A$. Par conséquent A est compact.

Opérateurs linéaires bornés

Opérateurs fermés

Espace dual d'un espace normé

Théorèmes fondamentaux

Définition(Graphe d'un opérateur)

Soient X et Y deux espaces normés et $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur Linéaire, le graphe de A est le sous espace de $X \times Y$ défini par

$$G(A) = \{(x, Ax)/x \in D(A)\}.$$

La norme du graphe de A est définie par

$$\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|.$$

On écrit X_A si le domaine de A $(D(A))$ est muni de la norme du graphe

Définition(Opérateur fermé)

Un opérateur linéaire A est dit fermé si son graphe est fermé de $X \times Y$.

Remarque

Pour démontrer que le graphe de A est fermé, on considère une suite $(x_n)_n \subset D(A)$ telle que $x_n \to x \in X$ et $Ax_n \to y \in Y$ et on montre que $x \in D(A)$ et $y = Ax$.

Définition(Opérateur fermé)

Un opérateur linéaire A est dit fermé si son graphe est fermé de $X \times Y$.

Remarque

Pour démontrer que le graphe de A est fermé, on considère une suite $(x_n)_n \subset D(A)$ telle que $x_n \to x \in X$ et $Ax_n \to y \in Y$ et on montre que $x \in D(A)$ et $y = Ax$.

Proposition

Soit $A \in L(X, Y)$ *de domaine* $D(A)$*, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. A *est un opérateur fermé*
2. *Le graphe* $G(A)$ *de* A *est fermé dans* $X \times Y$.
3. X_A *est un espace de Banach.*

Remarque

1. *Si* $D(A) = X$, *alors* A *est fermé si et seulement si* A *est borné (c'est le théorème du graphe fermé qu'on va voir dans la dernière partie de ce chapitre).*
2. *La continuité de l'opérateur* A *n'implique pas nécessairement que* A *est fermé et* A *est fermé n'implique pas nécessairement que* A *est continu.*
3. *Si* A *est fermé, alors* $\ker A$ *est fermé dans* $D(A)$.

Example

Soient X un espace vectoriel normé de dimension infini et V un sous espace de X qui n'est pas fermé. On définit l'opérateur identité I sur V, l'opérateur I est borné mais I n'est pas fermé. En effet si $x \in \overline{V} \backslash V$, alors il existe une suite (x_n) de V telle que $x_n \to x$ et $Ix_n \to x$ et $x \notin D(I) = V$. Donc $I : V \subset X \to X$ est borné mais n'est pas fermé.

Example

Considérons l'espace $C([0,1])$ *muni de la norme uniforme et l'espace* $C^1([0,1])$ *des fonctions de classe* C^1*, muni aussi de la norme uniforme, définissons alors* A *de* $C^1([0,1])$ *dans* $C([0,1])$ *par* $Af = \frac{df}{dt} = f'$*,* A *n'est pas continue, car si* $f_n(t) = t^n$*, alors* $\|f_n\|_\infty = 1$ *et* $\|A(f_n)\|_\infty = n$*. Cependant* A *est fermé, en effet soit* (f_n) *dans* $C^1([0,1])$ *telle que*

$$f_n \longrightarrow f \text{ et } Af_n \longrightarrow g,$$

cela implique que (f_n) *converge uniformement vers* f *et comme* f_n *sont continues, alors* f *est continue et* $(Af_n) = f_n'$ *converge uniformement vers* g*. Par conséquent* $f \in C^1([0,1])$ *et*

$$f' = g = Af.$$

Remarque

Il existe des exemples où il est difficile de démontrer que l'opérateur est fermé en utilisant la définition, donc on utilise le théorème suivant:

Théorème

Soient X et Y deux espaces de Banach et $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur Linéaire, si A est inversible, avec $A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$, alors l'opérateur A est fermé.

Remarque

Il existe des exemples où il est difficile de démontrer que l'opérateur est fermé en utilisant la définition, donc on utilise le théorème suivant:

Théorème

Soient X et Y deux espaces de Banach et $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur Linéaire, si A est inversible, avec $A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$, alors l'opérateur A est fermé.

Example

L'opérateur $A : D(A) \subset L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ *défini par* $Af = f'$, *avec* $D(A) = \{f \in L^2(0,1),\ \ f \text{est absolument continue sur } (a,b) \text{avec } \frac{df}{dt} \in L^2(a,b) \text{et } \ f(0) = 0\}$, *A, on défini l'opérateur suivant sur* $D(A)$ *par*

$$Bf(x) = \int_0^x f(s)ds.$$

On a $B \in \mathcal{B}(D(A))$, *car*

$$\forall f \in D(A), \quad \|Bf\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \int_0^1 \|1_{[0,t]}\|_2^2 dt.$$

Example

et on

$$A \circ B = I_{D(A)} \quad et \quad B \circ A = I_{D(A)},$$

alors $B = A^{-1}$, *d'après le théorème on en déduit que* A *est fermé.*

Opérateurs linéaires bornés

Opérateurs fermés

Espace dual d'un espace normé

Théorèmes fondamentaux

Dual d'un espace normé

Définition

Soit X un espace normé, l'espace $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ est appelé le dual de X. On le note par X^* ou bien X'. Ainsi $f \in X^*$ veut dire que $f : X \to \mathbb{K}$. La fonction $f \in X^*$ est appelée une fonctionnelle linéaire borné ou bien forme linéaire.

Remarque

Tout les résultats sur les opérateurs bornés restent vrai dans X^*. En particulier pour la norme

$$\forall f \in X^*, \quad \|f\|_{X^*} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|fx\|}{\|x\|} = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|fx\|.$$

Dual d'un espace normé

Définition

Soit X un espace normé, l'espace $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ est appelé le dual de X. On le note par X^* ou bien X'. Ainsi $f \in X^*$ veut dire que $f : X \to \mathbb{K}$. La fonction $f \in X^*$ est appelée une fonctionnelle linéaire borné ou bien forme linéaire.

Remarque

Tout les résultats sur les opérateurs bornés restent vrai dans X^*. En particulier pour la norme

$$\forall f \in X^*, \quad \|f\|_{X^*} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|fx\|}{\|x\|} = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|fx\|.$$

Example

1. *Le dual de l'espace* l_p *est* l_q*, tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et* $1 < p < \infty$.
   $(l_p^* = \mathcal{B}(l_p, \mathbb{K}) = l_q)$.
2. $(L^p([a, b]))^* = L^q([a, b)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et* $1 < p < \infty$.

Remarque

Soit X *un espace de Banach. Fixons* $x \in X$ *et considérons l'application* $J_x : X^* \to \mathbb{K}$ *défine par* $J_x(f) = f(x)$ *est une application linéaire et continue, donc* $J_x \in X^{**}$.

Example

1. *Le dual de l'espace* l_p *est* l_q*, tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et* $1 < p < \infty$*.* $(l_p^* = \mathcal{B}(l_p, \mathbb{K}) = l_q)$.
2. $(L^p([a, b]))^* = L^q([a, b)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et* $1 < p < \infty$.

Remarque

Soit X *un espace de Banach. Fixons* $x \in X$ *et considérons l'application* $J_x : X^* \to \mathbb{K}$ *défine par* $J_x(f) = f(x)$ *est une application linéaire et continue, donc* $J_x \in X^{**}$*.*

Théorème

L'application $J : X \to X^{**}$ *définie par* $J(x) = J_x$ *est une isométrie linéaire de* X *dans* X^{**} *c. à. d.* $\|J(x)\| = \|x\|$, *pour tout* $x \in X$.

Remarques

1. *L'application* J *est injective et continue, car* J *est une isométrie.*
2. *L'application* J *n'est pas toujours surjective c. à. d.* $J(X) \subset X^{**}$.

Théorème

L'application $J : X \to X^{**}$ *définie par* $J(x) = J_x$ *est une isométrie linéaire de* X *dans* X^{**} *c. à. d.* $\|J(x)\| = \|x\|$, *pour tout* $x \in X$.

Remarques

1. *L'application* J *est injective et continue, car* J *est une isométrie.*
2. *L'application* J *n'est pas toujours surjective c. à. d.* $J(X) \subset X^{**}$.

Définition

On dit qu'un espace de Banach X est réflexif si $J(X) = X^{**}$, c. à. d. J est surjective, donc J est bijective et dans ce cas on peut identifier X à X^{**}.

Example

1. *Les espaces l_p, avec $1 < p < \infty$ sont réflexifs. En effet $(l_p)^* = l_q$, alors $(l_p)^{**} = (l_q)^* = l_p$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*
2. *Tout espace de Hilbert H est réflexif.*

Définition

On dit qu'un espace de Banach X est réflexif si $J(X) = X^{**}$, c. à. d. J est surjective, donc J est bijective et dans ce cas on peut identifier X à X^{**}.

Example

1. *Les espaces l_p, avec $1 < p < \infty$ sont réflexifs. En effet $(l_p)^* = l_q$, alors $(l_p)^{**} = (l_q)^* = l_p$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*
2. *Tout espace de Hilbert H est réflexif.*

Définition(Convergence faible)

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'un espace normé* X *converge faiblement vers* x, *si*

$$f(x_n) \to f(x), \quad \forall f \in X^*.$$

Lemme

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'un espace normé* X *qui converge faiblement vers* x, *alors* $(\|x_n\|)_n$ *est bornée.*

Définition(Convergence faible)

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'un espace normé* X *converge faiblement vers* x, *si*

$$f(x_n) \to f(x), \quad \forall f \in X^*.$$

Lemme

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'un espace normé* X *qui converge faiblement vers* x, *alors* $(\|x_n\|)_n$ *est bornée.*

Remarque

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge fortement ($\|x_n - x\| \to 0$), alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement, en effet il suffit de remarquer que $\forall f \in X^*, \quad |f(x_n) - f(x)| \leq \|f\|\|x_n - x\|$, mais la réciproque n'est pas vraie en général.

Example

Soit $X = l_p$, $p > 1$, et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la base canonique de l_p, alors $\forall f \in X^* = l_q$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f = (f_1, f_2, f_3, \cdots\cdots)$, on a $f(e_n) = f_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et comme $f \in l_q$, alors $f_n \to 0$ c. à. d. $f(e_n) \to f(0) = 0$, d'où la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers 0 et $\|e_n - 0\|_{l_p} = 1$, donc $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas fortement vers 0.

Remarque

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite qui converge fortement* ($\|x_n - x\| \to 0$)*, alors* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement, en effet il suffit de remarquer que* $\forall f \in X^*, \quad |f(x_n) - f(x)| \leq \|f\|\|x_n - x\|$*, mais la réciproque n'est pas vraie en général.*

Example

Soit $X = l_p$*,* $p > 1$*, et* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la base canonique de* l_p*, alors* $\forall f \in X^* = l_q$*, avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*,* $f = (f_1, f_2, f_3, \cdots\cdots)$*, on a* $f(e_n) = f_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ *et comme* $f \in l_q$*, alors* $f_n \to 0$ *c. à. d.* $f(e_n) \to f(0) = 0$*, d'où la suite* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge faiblement vers 0 et* $\|e_n - 0\|_{l_p} = 1$*, donc* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *ne converge pas fortement vers 0.*

Théorème

Soit X un espace de Banach réfexif et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suie bornée dans X, alors il existe une sous suite qui converge faiblement.

Définition

Soient X et Y des espaces de Banach et $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, le dual ou bien l'adjoint de A est $A^* : Y^* \to X^*$ et il est défini par

$$(A^*f)(x) = f(Ax), \quad \forall f \in Y^*, \quad \forall x \in X.$$

Théorème

Soit X un espace de Banach réfexif et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suie bornée dans X, alors il existe une sous suite qui converge faiblement.

Définition

Soient X et Y des espaces de Banach et $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, le dual ou bien l'adjoint de A est $A^* : Y^* \to X^*$ et il est défini par

$$(A^* f)(x) = f(Ax), \quad \forall f \in Y^*, \quad \forall x \in X.$$

Lemme

Soient X et Y des espaces de Banach et $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, le dual A^* possède les propriétés suivantes:

1. $A^* \in \mathbb{B}(Y^*, X^*)$ *et* $\|A^*\| = \|A\|$.
2. *Si* $B \in \mathbb{B}(X, Y)$, *alors* $(A + B)^* = A^* + B^*$, *et* $(\alpha A)^* = \alpha A^*$.
3. *Si* $B \in \mathbb{B}(X, Y)$ *et* $A \in \mathbb{B}(Y, Z)$, *alors* $(AB)^* = B^* A^*$.
4. *Si* $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ *et* A^{-1} *existe et* $A^{-1} \in \mathbb{B}(Y, X)$, *alors* $(A^*)^{-1}$ *existe et* $(A^*)^{-1} \in \mathbb{B}(X^*, Y^*)$

Opérateurs linéaires bornés

Opérateurs fermés

Espace dual d'un espace normé

Théorèmes fondamentaux

(Théorème de Banach Steihauss)

Soient X et Y deux espaces de Banach, soit (T_i) une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires bornés de X dans Y. Si

$$\sup_{i \in I} \| T_i x \| < \infty, \quad \forall x \in X,$$

alors

$$\sup_{i \in I} \| T_i \| < \infty.$$

Corollaire

Soient X *et* Y *deux espaces de Banach, soit* (T_n) *une suite d'opérateurs linéaires bornées de* X *dans* Y*. Si* $\forall x \in X$*, la suite* $(T_n x)$ *converge vers une limite* Tx*, alors on*

1. $\sup_{n \geq 1} \|T_n\| < \infty$.
2. $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Lemme

Soit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, *avec* X *et* Y *deux espaces de Banach. Si* T *est surjectif, alors* $\exists r > 0$, *tel que* $\overline{B}_Y(0, r) \subset T(\overline{B}_X(0, 1))$.

Théorème de l'application ouverte

Soient X *et* Y *deux espaces de Banach et* $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. *Si* T *est surjectif, alors* T *est une application ouverte.*

Lemme

Soit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, *avec* X *et* Y *deux espaces de Banach. Si* T *est surjectif, alors* $\exists r > 0$, *tel que* $\overline{B}_Y(0, r) \subset T(\overline{B}_X(0, 1))$.

Théorème de l'application ouverte

Soient X *et* Y *deux espaces de Banach et* $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. *Si* T *est surjectif, alors* T *est une application ouverte.*

Preuve

Soit O un ouvert de X, montrons que $T(O)$ est un ouvert de Y. Soit $y_0 \in T(O)$, alors il existe $x_0 \in O$, tel que $y_0 = Tx_0$. Comme O est un ouvert de X, alors il existe $r > 0$, tel que $B(x_0, r) \subset O$ c. à. d $B(0, r) \subset O - \{x_0\}$, d'où

$$T(B(0, r)) \subset T(O) - \{y_0\}. \tag{5.1}$$

En vertu du Lemme on obtient, il existe $\delta > 0$, tel que $B(0, \delta) \subset T(B(0, 1))$, alors $B(0, r\delta) \subset T(B(0, r))$,

$$B(0, r\delta) \subset T(B(0, r)). \tag{5.2}$$

De (5.1) et (5.2) on obtient il existe $\delta > 0$, tel que $B(y_0, r\delta) \subset T(O)$, alors $T(O)$ est un ouvert de Y.

(Théorème du graphe fermé)

Soient X et Y deux espaces de Banach, soit A un opérateur linéaire fermé tel que $D(A) = X$, alors A est un opérateur borné.

Preuve

Il est facile de vérifier que l'espace $X \times Y$ muni de la norme $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$ est un espace complet et comme $G(A)$ est fermé dans $X \times Y$, alors $G(A)$ est complet. Soit l'application $P : G(A) \to D(A)$ définie par $P(x, Ax) = x$. Comme $\|P(x, Ax)\| = \|x\| \leq \|(x, Ax)\|$, d'où P est borné et bijectif, alors il existe $S = P^{-1} : X \longrightarrow G(T)$, tel que $\forall x \in X$, $\|Ax\| \leq \|Ax\| + \|x\| = \|(x, Ax)\| = \|Sx\|$, comme S est borné donc A est borné, d'où A est continu.

(Théorème du graphe fermé)

Soient X et Y deux espaces de Banach, soit A un opérateur linéaire fermé tel que $D(A) = X$, alors A est un opérateur borné.

Preuve

Il est facile de vérifier que l'espace $X \times Y$ muni de la norme $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$ est un espace complet et comme $G(A)$ est fermé dans $X \times Y$, alors $G(A)$ est complet. Soit l'application $P : G(A) \to D(A)$ définie par $P(x, Ax) = x$. Comme $\|P(x, Ax)\| = \|x\| \leq \|(x, Ax)\|$, d'où P est borné et bijectif, alors il existe $S = P^{-1} : X \longrightarrow G(T)$, tel que $\forall x \in X$, $\|Ax\| \leq \|Ax\| + \|x\| = \|(x, Ax)\| = \|Sx\|$, comme S est borné donc A est borné, d'où A est continu.

(Théorème de Hahn Banach)

Toute forme linéaire bornée $f : D(f) \subset X \to \mathbb{K}$ *définie sur un sous espace* $D(f)$ *d'un espace normé* X*, admet un prolongement* $\widetilde{f} : X \to \mathbb{K}$*, tel que*

$$\|f\| = \|\widetilde{f}\|.$$

Corollaire

Soit $x_0 \in X \setminus \{0\}$*, alors il existe* $f \in X^*$*, telle que*

$$\|f\|_{X^*} = 1 \text{ et } f(x_0) = \|x_0\|.$$

(Théorème de Hahn Banach)

Toute forme linéaire bornée $f : D(f) \subset X \to \mathbb{K}$ *définie sur un sous espace* $D(f)$ *d'un espace normé* X, *admet un prolongement* $\widetilde{f} : X \to \mathbb{K}$, *tel que*

$$\|f\| = \|\widetilde{f}\|.$$

Corollaire

Soit $x_0 \in X \setminus \{0\}$, *alors il existe* $f \in X^*$, *telle que*

$$\|f\|_{X^*} = 1 \text{ et } f(x_0) = \|x_0\|.$$

Preuve

Soit $x_0 \in X \setminus \{0\}$*, considérons la fonction* g *définie sur* $D = \{\lambda x / \lambda \in \mathbb{R}\} \subset X$*, par*

$$g(x_0) = \lambda \|x_0\| = vect\{x_0\},$$

l'application g *est linéaire et continue sur* D*, alors d'après le théorème de Hahn Banch, il existe* $f \in X^*$ *telle que* $f = g$ *sur* D *et* $\|g\| = \|f\|$*. la forme linéaire* f *vérifie* $f(x_0) = g(x_0) = \|x_0\|$*, car* $x_0 \in D$*, et*

$$\|g\| = \sup_{\lambda x_0 \in D, \lambda x_0 \neq 0} \frac{\|g(\lambda x_0)\|}{\|\lambda x_0\|} = 1.$$

D'où

$$\|g\| = \|f\| = 1.$$