# Intégrales Indéfinies

Ce chapitre introduit une idée générale de ce qu'est l'intégrale ainsi que les moyens d'en calculer.

## 1. Intégrale indéfinie

### 1.1. Primitive

Soit $f$ une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$. On appelle primitive de f, une fonction F dérivable tel que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

### 1.2. existence d'une primitive

**Théorème 1.1** (admis)

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f$ est intégrable.

**Exemple 1.**
La fonction $F(x) = x^2 + 1$ et $G(x) = x^2 + 3$ sont des primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = 2x$, car $\forall x \in \mathbb{R}$ : $(x^2+1)' = 2x$ et $(x^2+3)' = 2x$. Une primitive de f n'est donc pas unique.

**Remarque 1.1**

Soit $f$ une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$ et $F$ une primitive de $f$. Alors toutes les primitives de $f$ sont de la forme $F(x) + C$ où $C$ est une constante $(C \in \mathbb{R})$.

### 1.3. Intégrale indéfinie

**Définition 1.1**

L'intégrale indéfinie de la fonction f , notée $\int f(x)dx$ est la famille de toutes les primitives de $f$ . Elle est définie par l'équivalence suivante :

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ si et seulement si } F'(x) = f(x)$$

où $C$ désigne une constante réelle arbitraire.

# 2. Quelques propriétés

Soient $f$ et $g$, deux fonctions continues.

- $\int f'(x)dx = f(x) + C$
- $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
- $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int (\lambda f(x))dx = \lambda \int f(x)dx, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

**Remarque 1.2**

Les propriétés 3 et 4 sont appelées linéarité de l'intégrale.

**Exemple 2.**
Calculer :

$$\int 7x^2dx = 7 \cdot \int x^2dx = 7\frac{x^3}{3} + c$$

$$\int (2x+5)dx = \int 2xdx + \int 5dx = x^2 + 5x + c$$

**Remarque 1.3**

En générale,

$$\int (f(x) \cdot g(x))dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

# 3. méthodes d'intégrations

## 3.1. Primitives des fonctions usuelles

Les formules suivantes découlent toutes des règles de dérivation.

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) \cdot dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int \sin f(x) \cdot f'(x) \cdot dx = -\cos f(x) + c$$

$$\int \cos f(x) \cdot f'(x) \cdot dx = \sin f(x) + c$$

**Exemple 3.**
Calculer $\int \left(x^3+7\right)^5 \cdot 3x^2dx$.
En utilisant la première formule, on aura

$$\int \left(x^3+7\right)^5 \cdot 3x^2dx = \frac{\left(x^3+7\right)^6}{6} + c$$

Déterminer $\int \frac{3x}{5x^2-1}dx$.
En appliquant la troisième formule on aura

$$\int \frac{3x}{5x^2-1}dx = \frac{3}{10} \cdot \int \frac{10}{3} \cdot \frac{3x}{5x^2-1}dx = \frac{3}{10} \cdot \int \frac{10x}{5x^2-1}dx = \frac{3}{10} \cdot \ln\left|5x^2-1\right| + c$$

## 3.2. Méthode du changement de variable

Parmi les méthodes d'intégration les plus effectives, il y a la méthode du changement de variable qui consiste à écrire la fonction à intégrer $f$ sous la forme $f(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$. On a le théorème suivant :

**Théorème 1.2**

Soient $f(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ et $x \to t = \varphi(x)$ définie et dérivable sur un intervalle $I_x \in \mathbb{R}$. Si la fonction $t \to y = g(t)$ admet une primitive $G(t)$ sur un intervalle $I_t$ tel que $\varphi(I_x) \subset I_t$, alors la fonction $f(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ admet une primitive sur $I_x$ et on a

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = G(\varphi(x)) + c,\ c \in \mathbb{R}$$

En particulier le théorème est vrai si $g$, $\varphi$ et $\varphi'$ sont continues.

**méthode pratique**

Soit à calculer $\int f(x)dx$ qui peut se mettre sous la forme $\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ telle que g admet une primitive G, alors, d'après le théorème, on pose $t = \varphi(x)$, $dt = \varphi'(x)dx$. Dans ce cas, on a

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + c = G(\varphi(x)) + c.$$

**Exemple 4.**
Calculer $F(x) = \int \sqrt{\sin} \cdot \cos x dx$. Remarquons tout d'abord que

$$\int \sqrt{\sin} \cdot \cos x dx = \int \sqrt{\sin} \cdot \sin' x dx = \int \sqrt{\sin} d(\sin).$$

Ainsi, en posant $t = \sin x$, on obtient :

$$\int \sqrt{\sin} \cdot \cos x dx = \int \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}}(x) + c.$$

Parfois le changement de variable n'est pas visible et on peut, dans certains cas, poser $x = \psi(t)$. Plus précisément, on a le théorème suivant :

**Théorème 1.3**

Soient $f$ une fonction continue sur $I$ et $\psi\, J \longrightarrow I$ une fonction inversible telle que $\psi \in C^1(J)$. Alors, en posant $x = \psi(t)$, on obtient la formule

$$\int f(x)dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt = \int g(t)dt = G(t) + c,$$

avec $t = \psi^{-1}(x) = \varphi(x)$, $dx = \psi'(t)dt$ et $G$ une primitive de $g$. On revient ensuite à la variable $x$ en remplaçant $t = \psi^{-1}(x)$, d'où

$$\int f(x)dx = G(\psi^{-1}(x)) + c,$$

Cette méthode est dite **méthode de substitution**.

**Exemple 5.**
Calculer $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$. Dans cet exemple, le changement de variable n'est pas visible et il est préférable d'utiliser le théorème 3.2 en faisant le changement suivant : $x = \psi(t) = a \tan t$. Dans ce cas, on a

$$dx = a\frac{dt}{\cos^2 t}, \quad (x^2+a^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^3}{\cos^3 t},$$

et en remplaçant dans l'intégrale, on obtient, après quelques transformations trigonométriques :

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{a \cos^3 t}{a^3 \cos^2 t} = \frac{1}{a^2} \int \cos t dt = \frac{1}{a^2} \sin t + c.$$

Comme $t = \psi^{-1}(t) = \arctan \dfrac{x}{a}$, alors on a le résultat :

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2} \sin \arctan \frac{x}{a} + c = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + c$$

**Remarque 1.4**

1. Le choix du changement de variable doit être judicieux et seule la pratique du calcul intégral permet de le déterminer.
2. Nous conseillons au lecteur de vérifier les résultats obtenus en calculant leurs dérivées qui doivent être égales aux fonctions à intégrer.
3. Comme $dt = d\varphi = \varphi'(x)dx$ dans le théorème 3.2, il est préférable d'écrire l'intégrale sous la forme :

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi)d\varphi = F(\varphi) + c.$$

## 3.3. Méthode d'intégration par parties

Un grand nombre d'intégrales se calculent par la méthode d'intégration par parties qui est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 1.4**

Soient $u$, $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ telles que la fonction $u'v$ admet une primitive sur $I$ on a :

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx.$$

En particulier le théorème est vrai si $u, v \in C^1(I)$.

Symboliquement, on écrit :

$$\int u'\,dv = uv - \int u\,dv.$$

**Remarque 1.5**

1. Le choix de cette méthode n'a de sens que si l'intégrale figurant dans le membre de droite de la formule précédente est facile à calculer.
2. Le choix des fonctions $u$ et $v$ doit être judicieux et ce n'est que par la pratique des exercices que l'on pourra plus facilement faire ce choix.
3. La pratique montre qu'un bon nombre d'intégrales susceptibles d'être calculées par la méthode d'intégration par parties peuvent être classées en trois groupes :
   - $\int f(x)\log x dx$, $\int f(x)\arcsin x dx$, $\int f(x)\arccos x dx$, $\int f(x)\arctan x dx$, $\int f(x)\arccos^2 x dx$, $\int f(x)\arctan^2 x dx$, $\cdots$ dans le cas où $f$ admet une primitive ;
   - $\int P(x)\cos\gamma x dx$, $\int P(x)\sin\gamma x dx$, $\int P(x)e^{\gamma x}dx$ où $P$ est un polynôme ($\gamma \in \mathbb{R}$), dans ce cas, on pose $u(x) = P(x)$ ;
   - $\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$, $\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), $\int \sin(\log x)dx$, $\int \cos(\log x)dx$,

**Exemple 6.** 1. $\int x \arctan x dx$. Posons $u = \arctan x$ et $v' = x$. Alors on a $u' = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $v = \dfrac{x^2}{2}$ et, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}&\int x \arctan x dx = \tfrac{x^2}{2}\arctan x - \tfrac{1}{2}\int \tfrac{x^2}{1+x^2} = \tfrac{x^2}{2}\arctan x - \tfrac{1}{2}\int \tfrac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \\ &= \tfrac{x^2}{2}\arctan x - \tfrac{1}{2}\int \left(1 - \tfrac{1}{1+x^2}\right)dx = \tfrac{x^2}{2}\arctan x - \tfrac{1}{2}(x - \arctan x) + c = \\ &= \tfrac{x^2+1}{2}\arctan x - \tfrac{x}{2} + c\end{aligned}$$

2. $\int x^n \log x\, dx \quad (n \neq -1)$. Posons $u(x) = \log x$ et $v' = x^n$. Alors on a : $u' = \dfrac{1}{x}$, $v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ et d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int x^n \log x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \log x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left( \log x - \frac{1}{n+1} \right) + c$$

## 3.4. Intégration de fractions rationnelles

Les fractions rationnelles forment une classe importante de fonctions dont l'intégrale se calcule par les méthodes précédentes et dont l'intérêt réside dans le fait que :

1. l'intégration de nombreuses fonctions non rationnelles se ramène à celle de fractions rationnelles par des changements de variables;
2. il existe une méthode générale d'intégration d'une fraction rationnelle qui consiste, après l'avoir transformée, à intégrer une somme finie de fractions plus simples. Pour cela, rappelons le théorème sur la décomposition d'une fraction rationnelle réelle en une somme finie de fractions , appelées éléments simples.

**Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.**

**Théorème 1.5** (Théorème fondamental de décomposition)

Soient $\dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle telle que $deg(P) < deg(Q)$ et
$Q(x) = (x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2} \dots (x-x_k)^{m_k} \left(x^2+p_1x+q_1\right)^{n_1} \left(x^2+p_2x+q_2\right)^{n_2} \dots \left(x^2+p_lx+q_l\right)^{n_l}$, avec $x_1, x_2, \dots, x_k, p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_l, q_l \in \mathbb{R}$, $m_1, m_2, \dots, m_k, n_1, n_2, \dots, n_l \in \mathbb{N}$ et $\Delta_i = p_i^2 - 4q_i < 0$, $i = 1, 2, \cdots l$.
Alors la fonction $\dfrac{P}{Q}$ se décompose en une somme finie unique d'éléments simples de première et deuxième espèces comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{P}{Q} = & \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1m_1}}{(x-x_1)^{m_1}} + \\
& + \frac{A_{21}}{x-x_2} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{A_{2m_2}}{(x-x_2)^{m_2}} + \\
& + \frac{A_{k1}}{x-x_k} + \frac{A_{k2}}{(x-x_k)^2} + \dots + \frac{A_{km_k}}{(x-x^k)^{m_k}} + \\
& + \frac{M_1x+N_{21}}{x^2+p_2x+q_1} + \frac{M_{22}x+N_{22}}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \dots + \frac{M_{2n_2}x+N_{2n_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{n_2}} + \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots \\
& + \frac{M_1x+N_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_{12}x+N_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{M_{nn,x}+N_{(n_1})^{n_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}}
\end{aligned}$$

avec $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{km}, M_{11}, N_{11}, M_{12}, N_{12}, \dots, M_{(n1}, N_{(n)} \in \mathbb{R}$, $\quad \Delta_i = p_i^2 - 4q_i < 0, i = 1, 2, \dots, l$

De manière condensée, cette décomposition s'écrit

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{k} \left( \sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j} \right) + \sum_{i=1}^{l} \left( \sum_{j=1}^{n_i} \frac{M_{ij}x+N_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j} \right)$$

**Exemple 7.**
Soit à décomposer la fraction

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

D'après le théorème, on a la formule de décomposition suivante :

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2++x+1} =$$

$$= \frac{A(x-1)\left(x^2+x+1\right)+B\left(x^2+x+1\right)+(Mx+N)(x-1)^2}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)} =$$

$$= \frac{(A+M)x^3+(B+N-2M)x^2+(B+M-2N)x+(-A+B+N)}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}$$

En identifiant coefficients dans les numérateurs, on obtient le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} A+M=2 \\ B-2M+N=4 \\ B+M-2N=1 \\ -A+B+N=2. \end{cases}$$

Ce système admet une solution unique :$A=2$ , $B=3$ , $M=0$ et $N=1$ . D'où la décomposition :

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2+x+1}$$

## 3.5. Méthode d'intégration d'une fraction rationnelle

Soit à intégrer une fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

**Premier cas :**

Si $\frac{P(x)}{Q(x)}$ est régulier (i.e $deg(P)<deg(Q)$ ) alors, d'après le théorème fondamental, on la décompose en une somme finie d'éléments simples. Dans ce cas, intégrer cette fraction rationnelle revient à calculer quatre types d'intégrales, à savoir :

**type I :** $\int \frac{A}{x-a}dx = A\log|x-a| + c(\text{cas}\, m=1)$

**type II :** $\int \frac{A}{(x-a)^m}dx = -\frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + c(\text{cas}\, m>1)$

**type III :** $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx(\text{cas}\, n=1)$

**type IV :** $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx(\text{ cas } n>1)$

**Algorithme de calcul des intégrales de types III et IV** Sachant que

$$p^2-4q<0 \Leftrightarrow q-\frac{p^2}{4}>0$$

alors

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right) = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2$$

avec

$$a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$$

Pour le calcul des intégrales de types III et IV, on pose $t = x+\frac{p}{2}$ et on a $dt = dx$.

**Exemple 8.**
Calculer $\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx$.

La fraction rationnelle $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$ étant régulière, on peut la décomposer en éléments simples suivant la formule :

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2+x+1}$$

D'où :

$$\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx = \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}dx + \int \frac{1}{x^2+x+1}dx$$

Pour les intégrales de **types I et II**, on obtient : $\int \frac{2}{x-1}dx = 2\log|x-1|+c$ et $\int \frac{3}{(x-1)^2}dx = \frac{-3}{(x-1)}+c$.
Pour les intégrales de **types III et IV**, écrivons d'abord, c'est-à-dire d'effectuer sa complétion de carré. : $x^2+x+1 = (x+\dfrac{1}{2})^2+1-\dfrac{1}{4} = (x+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4} = t^2+a^2$.
En posant $t = (x+\dfrac{1}{2})$ et $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, on obtient :

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{dt}{t^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2\sqrt{3}\,t}{3} + c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2\sqrt{3}(x+\frac{1}{2})}{3} + c$$

Finalement, on trouve après arrangement des termes que

$$\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx = 2\log|x-1| + \frac{-3}{(x-1)} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2\sqrt{3}(x+\frac{1}{2})}{3} + C$$

**Deuxième cas**

Si $degP \geqslant degQ$, alors en faisant la division euclidienne, on obtient

$$\frac{P}{Q} = S + \frac{R}{Q}, \quad \deg R < \deg Q$$

telle que $S$ est un polynôme et $\dfrac{R}{Q}$ une fraction rationnelle régulière et, alors on a

$$\int \frac{P}{Q}dx = \int S dx + \int \frac{R}{Q}dx$$

**Exemple 9.**
Calculer $\int \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}dx$ Comme le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur la partie entière est une constante, et comme les coefficients des monômes de plus haut degré sont égaux, la partie entière vaut 1. Le résultat de la décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = 1 + \frac{2x}{x^2-x+1} = 1 + \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{x^2-x+1}$$

Alors

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}dx = \int 1dx + \int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \int \frac{1}{x^2-x+1}dx$$

On en déduit alors la primitive recherchée :

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}dx = x + \log|x^2-x+1| + \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2\sqrt{3}(x-\frac{1}{2})}{3} + C$$

## 3.6. Intégration de certaines classes de fonctions irrationnelles

Certaines fonctions irrationnelles peuvent se ramener à une intégration de fractions rationnelles par un changement de variable.

**Intégrales de la forme $\int R(x,\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}})dx, ad-bc\neq 0$**

Dans ce cas, la fonction $R$ est irrationnelle en $x$. Posons

$$t=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

On obtient, après calcul :

$$t^n=\frac{ax+b}{cx+d},\quad x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n},\quad dx=\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt$$

d'où

$$\int R(x,\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}})dx=\int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n},t\right)\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt=\int R_1(t)dt,$$

où $R_1$ est une fraction rationnelle en $t$.

**Exemple 10.**
Calculer l'intégrale $I=\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$
En posant $t^3=\frac{1-x}{1+x}$, on obtient après calcul

$$x=\frac{1-t^3}{1+t^3},\quad dx=\frac{-6t^2}{(t^3+1)^2}dt$$

d'où

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}=\ldots=6\int\frac{t^3}{(t^3+1)(t^3-1)}dt=3\int\left(\frac{1}{t^3+1}-\frac{1}{t^3-1}\right)dt$$

La dernière intégrale est une intégrale d'une fraction rationnelle en t qu'on peut résoudre par la méthode exposée précédemment. Le résultat trouvé est :

$$\int\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}=\log\left|\frac{t^2-1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\right|+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1+2t^2}{\sqrt{3}}+c,\ \text{avec } t=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$$

**Remarque 1.6**

1. La primitive d'une fonction irrationnelle du type
$$R(x,\sqrt{ax+b})$$
peut être réalisée en effectuant la substitution $t=\sqrt{ax+b}$.
2. La méthode précédente peut se généraliser aux intégrales de la forme :
$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$$
en posant $t^r=\frac{ax+b}{cx+d}$, où $r=PPCM\,(n_1,n_2,\ldots,n_k)$, c'est à dire le plus petit commun multiple de $n_1,n_2,\ldots,n_k$

**Exemple 11.**
Calculer l'intégrale $\int\frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})}$. Dans ce cas, on a $a=d=1, b=c=0, n_1=2, n_2=5$ et $PPCM(2,5)=10$. En posant $t^{10}=x$, on obtient, après calcul $\sqrt{x}=t^5$, $\sqrt[3]{x^2}=t^4$, $dx=10t^9dt$, d'où

$$\int\frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})}=10\int\frac{dt}{t^5(t+1)}$$

La résolution de cette intégrale d'une fraction rationnelle donne

$$\int\frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})}=\log\left|\frac{x}{(1+\sqrt[14]{x})^{10}}\right|+\frac{10}{\sqrt[10]{x}}-\frac{5}{\sqrt[3]{x}}+\frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-\frac{5}{2\sqrt[3]{x^2}}+c$$

## 3.7. Intégrales de différentielles binomiales de la forme

$\int x^m(a+bx^n)^pdx$ où $m,n$ et $p\in\mathbb{Q}$ et $a,b\in\mathbb{R}$. On démontre que ces intégrales peuvent être ramenées à des intégrales de fonctions rationnelles dans les trois cas suivants :

1. Si $p$ est entier, alors on pose $x=z^k$ où $k$ est le dénominateur commun des fractions $m$ et $n$.

2. Si $\dfrac{m+1}{n}$ est un entier et $p$ fractionnaire, alors on pose $a+bx^n=z^k$ où $k$ est le dénominateur de $p$.
3. Si $\dfrac{m+1}{n}$ et $p$ sont des nombres fractionnaires mais la somme $\dfrac{m+1}{n}+p$ est un nombre entier, alors on pose $\dfrac{a+bx^n}{x^n}=z^k$, où $k$ est le dénominateur de $p$.

**Exemple 12.** 1. $\int\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4dx$. On a $m=\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{1}{3}$ et $p=4$, c'est à dire on est dans le premier cas. On pose alors $x=z^6$ et on a $dx=6z^5dz$. Il vient alors que

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4dx &= \int z^3(1+z^2)^4\times 6z^5dz\\ &= 6\int z^8(1+4z^2+6z^4+4z^6+z^8)dz\\ &= 6\int(z^8+4z^{10}+6z^{12}+4z^{14}+z^{16})dz\\ &= \frac{2}{3}z^9+\frac{24}{11}z^{11}+\frac{36}{13}z^{13}+\frac{24}{15}z^{15}+\frac{6}{17}z^{17}+C\end{aligned}$$

En remplaçant $z=\sqrt[6]{x}$ , on trouve

$$\int\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4dx=x(\frac{2}{3}\sqrt[6]{x^3}+\frac{24}{11}\sqrt[6]{x^5})+x^2(\frac{36}{13}\sqrt[6]{x}+\frac{8}{5}\sqrt[6]{x^3}+\frac{6}{17}\sqrt[6]{x^5})+C.$$

2. $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$. On a $m=-\frac{1}{2}, n=\frac{1}{4}, p=\frac{1}{3}, \frac{m+1}{n}=2$ On est dans le deuxième cas. Posons alors

$$1+\sqrt[4]{x}=z^3\Rightarrow x=\left(z^3-1\right)^4, dx=4\left(z^3-1\right)^3 3z^2dz$$

En substituant dans l'intégrale donnée, on obtient

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx &= 12\int\frac{z\cdot\left(z^3-1\right)^3\cdot z^2}{(z^3-1)^2}dz\\ &= 12\int z^3\left(z^3-1\right)dz\\ &= \frac{12}{7}z^7-3z^4+C\\ &= \frac{12}{7}(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}})^7-3(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}})^4+C\\ &= \frac{3}{7}(4\sqrt[4]{x}-3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C\end{aligned}$$

3. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$. On a $m=0, n=3, p=-\frac{1}{3}, \frac{m+1}{n}=\frac{1}{3}$ et $\frac{m+1}{n}+p=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$ est un entier. On est dans le troisième cas. On pose alors $\frac{1+x^3}{x^3}=z^3$. Ce qui donne $x=\frac{1}{\sqrt[3]{z^3-1}}$ et $dx=-\frac{z^2dz}{\sqrt[3]{(z^3-1)^4}}$ En remplaçant dans l'intégrale donnée, nous obtenons

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}=-\int\frac{\sqrt[3]{z^3-1}}{z}\cdot\frac{z^2dz}{\sqrt[3]{(z^3-1)^4}}=-\int\frac{z}{z^3-1}dz$$

Décomposons la fraction rationnelle régulière $\frac{z}{z^3-1}$ en éléments simples. On a

$$\frac{z}{z^3-1}=\frac{z}{(z-1)(z^2+z+1)}=\frac{z}{z-1}+\frac{Mz+N}{z^2+z+1}$$
$$\Rightarrow z=A\left(z^2+z+1\right)+(Mz+N)(z-1)$$

Par identification des coefficients $z^2, z^1, z^0$

$$\begin{aligned}A+M &= 0\\ A+N-M &= 1\\ A-N &= 0\end{aligned}$$

En résolvant ce système,$A = \frac{1}{3}$, $M = -\frac{1}{3}$ et $N = \frac{1}{3}$. Alors on a

$$\frac{dx}{z^3-1} = \frac{1}{3(z-1)} - \frac{z-1}{3(z^2+z+1)}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} &= -\int \frac{z}{z^3-1}dz = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{z-1}dz + \frac{1}{3}\int \frac{z-1}{z^2+z+1}dz = \\
&= -\frac{1}{3}\ln|z-1| + \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}(2z+1)-\frac{3}{2}}{z^2+z+1}dz = \\
&= -\frac{1}{3}\ln|z-1| + \frac{1}{6}\int \frac{(2z+1)dz}{z^2+z+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+z+1} = \\
&= -\frac{1}{3}\ln|z-1| + \frac{1}{6}\ln\left|z^2+z+1\right| - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \\
&= -\frac{1}{3}\ln|z-1| + \frac{1}{6}\ln\left|z^2+z+1\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}} + C
\end{aligned}$$

De cette façon nous avons trouvé que

$$\int \frac{z}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \frac{1}{6}\ln\frac{\left|z^2+z+1\right|}{(z-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}} + C$$

avec $z = \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$

**Remarque 1.7**

En dehors de ces trois cas cités, l'intégrale d'une différentielle binomiale ne peut être exprimée à l'aide de fonctions élémentaires.

## 3.8. Intégrale des fonctions irrationnelles trinômes

On chercher à calculer l'intégrale de la forme

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$$

L'expression $ax^2+bx+c$ doit être positive sur l'intervalle où on recherche la primitive. On ne considérera pas ici le cas où ce trinôme possède une racine double (dans ce cas le radical disparaît). Il reste donc à envisager les cas suivants :

1. Si $a > 0$, alors on effectue la substitution suivante

$$\sqrt{ax^2+bx+c)} = \pm\sqrt{a}x + t$$

On prend le cas $\sqrt{ax^2+bx+c)} = -\sqrt{a}x + t$. En élevant au carré, il vient

$$bx + c = -2\sqrt{a}t + t^2$$

d'où

$$x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, \quad dx = 2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}$$

avec

$$\sqrt{ax^2+bx+c)} = -\sqrt{a}x + t = -\sqrt{a}\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}\right) + t = \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}$$

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale, on obtient

$$\int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}\right)2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt = \int R_1(t)dt$$

où $R_1$ est une fraction rationnelle en $t$ Les autres cas se traitent de la même manière.

2. $c > 0$. On pose alors

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$$

Étudions le cas $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$. Après calcul, on obtient

$$x = \frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}, \quad dx = 2\frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}dt$$

avec

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c} = \left(\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}\right)t + \sqrt{c} = \frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}}{a-t^2}$$

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale, on obtient

$$\int R\left(\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}, \frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}}{a-t^2}\right)2\frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}dt = \int R_2(t)dt$$

où $R_2$ est une fraction rationnelle en $t$.

3. Cas où le trinôme $ax^2+bx+c$ a deux racines réelles distinctes $\alpha \neq \beta$, c'est à dire que $\Delta = b^2-4ac > 0$ et donc
$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$$
On pose alors $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x-\alpha)$ ( ou $\pm t(x-\beta)$). Étudions le cas
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$$
Après calcul, on obtient
$$x = \frac{-a\beta+\alpha t^2}{t^2-a}, \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{a(\alpha-\beta)t}{t^2-a}, dx = \frac{2a(\alpha-\beta)t}{(t^2-a)^2}dt$$
En remplaçant ces expressions dans l'intégrale, on obtient
$$\int \left(\frac{-a\beta+\alpha t^2}{t^2-a}, \frac{a(\alpha-\beta)t}{t^2-a}\right)\frac{2a(\alpha-\beta)t}{(t^2-a)^2}dt = \int R_3(t)dt$$
où $R_3$ est une fraction rationnelle en $t$ Remarque. La méthode des substitutions d'Euler est générale pour ces types d'intégrales, mais elle peut mener à des calculs fastidieux. Il peut exister des méthodes plus simples et plus judicieuses pour la résolution de certaines intégrales de ce type.

**Exemple 13.**
Calculer l'intégrale $I_1 = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$. Dans cet exemple, on a $a = b = c = 1$. Faisons la première substitution d'Euler en posant $t - x = \sqrt{x^2+x+1}$ Élevons les deux expressions au carré et simplifions les termes identiques $(t-x)^2 = t^2-2tx+x^2 = x^2+x+1 \Rightarrow x(1+2t) = t^2-1 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t+1}$ d'où
$$\sqrt{x^2+x+1} = t - x = \frac{t^2+t+1}{2t+1}, \quad dx = 2\frac{t^2+t+1}{(2t+1)^2}dt, \quad 1+x = \frac{t(t+2)}{2t+1}$$
En remplaçant ces expressions dans l'intégrale $I_1$ et après simplification, on obtient
$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{1}{\frac{t(t+2)}{2t+1}\frac{t^2+t+1}{2t+1}} 2\frac{t^2+t+1}{(2t+1)^2}dt = 2\int \frac{dt}{t(t+2)} =$$
$$= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2}\right)dt = \log|t| - \log|t+2| + c$$
On remplace $t = \sqrt{x^2+x+1}+x$, d'où
$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}} = \log\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x+2}\right| + c$$

## 3.9. Intégrale des expressions trigonométriques

**Intégrales des fonctions polynômes en** sin **et** cos

Soit à intégrer l'expression de la forme
$$\int \cos^p(x)\sin^q(x)dx$$
avec p et q des entiers naturels

1. $p = 1$
L'intégrale se présente sous la forme $\int U^q dU$ avec $U(x) = \sin(x)$.
2. $q = 1$
L'intégrale se présente sous la forme $-\int U^p(-dU)$ avec $U(x) = \cos(x)$.
3. $p$ impaire et $q$ pair
$$\int \cos^p(x)\sin^q(x)dx = \int \cos^{p-1}(x)\sin^q(x)\cos(x)dx$$
On pose alors $t = \sin(x)$ soit $dt = \cos(x)dx$.
$\cos^{p-1}(x)$ peut se transformer en fonction de $\sin(x)$ en utilisant la relation fondamentale de trigonométrique, puis en fonction de $t$.
$\int \cos^p(x)\sin^q(x)dx$ se transforme en une primitive d'un polynôme en $t$.

**Exemple 14.**
Calculer $I = \int \cos^3(x)\sin^2(x)dx = \int \cos^2(x)\sin^3(x)\cos(x)dx$

En posant $t=\sin(x)$, $dt=\cos(x)dx$ et $\cos^2(x)=1-\sin^2(x)$, alors

$$I=\int\cos^2(x)\sin^3(x)\cos(x)dx=\int(1-t^2)t^2dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+c=\frac{\sin^3(x)}{3}-\frac{\sin^5(x)}{5}+c$$

4. $p$ pair et $q$ impair

$$\int\cos^p(x)\sin^q(x)dx=\int\cos^p(x)\sin^{q-1}(x)\sin(x)dx$$

On pose alors $t=\cos(x)$ soit $dt=-\sin(x)dx$.
$\sin^{q-1}(x)$ peut se transformer en fonction de $\cos(x)$ en utilisant la relation fondamentale de trigonométrique, puis en fonction de $t$.
$\int\cos^p(x)\sin^q(x)dx$ se transforme en une primitive d'un polynôme en $t$.

**Exemple 15.**
Calculer $I=\int\cos^2(x)\sin^3(x)dx=-\int\cos^2(x)\sin^2(x)(-\sin(x))dx$
En posant $t=\cos(x)$, $dt=-\sin(x)dx$ et $\sin^2(x)=1-\cos^2(x)$, alors

$$I=\int\cos^2(x)\sin^3(x)\cos(x)dx=\int t^2(1-t^2)dt=\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+c=\frac{\cos^3(x)}{3}-\frac{\cos^5(x)}{5}+c$$

5. $p$ impair et $q$ impair
On peut choisir une des deux transformations précédentes.

6. $p$ pair et $q$ pair
Dans ce cas il faut linéariser. Pou linéariser une puissance d'un cosinus ou sinus, on utilise soit la formule de Moivre

$$(\cos x+i\sin x)^n=\cos(nx)+i\sin(nx)$$

ou les formules d'Euler

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\qquad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

**Exemple 16.**
Calculer $\int\cos^2(x)dx$.
Nous avons

$$\cos^2(x)=(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^2=\frac{e^{i2x}+2+e^{-i2x}}{4}=\frac{1}{2}\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\cos(2x)+1}{2}$$

alors

$$\int\cos^2(x)dx=\int\frac{\cos(2x)+1}{2}dx=\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{2}x+C$$

**Remarque 1.8**

Pour les formes : $I=\int\sin px\cos qxdx; J=\int\sin px\sin qxdx; K=\int\cos px\cos qxdx (p,q\in\mathbb{R})$ On peut transformer les produits en sommes par l'utilisation des formules trigonométriques :

$$\begin{aligned}\sin p\cos q&=\frac{1}{2}(\sin(p+q)+\sin(p-q))\\ \sin p\sin q&=\frac{1}{2}(\cos(p-q)-\cos(p+q))\\ \cos p\cos q&=\frac{1}{2}(\cos(p+q)+\cos(p-q))\end{aligned}$$

**Exemple 17.**
$I=\int\sin 2x\cos 3xdx$ $\sin 2x\cos 3x=\frac{1}{2}[\sin(2x+3x)+\sin(2x-3x)]=\frac{1}{2}(\sin 5x-\sin x)$ d'où $I_5=\frac{1}{2}\int(\sin 5x-\sin x)dx=-\frac{1}{10}\cos 5x+\frac{1}{2}\cos x+C$

**Intégrales des fractions rationnelles en $\sin$ et $\cos$**

On peut aussi calculer les primitives de la forme $\int P(\cos x,\sin x)\,dx$ ou de la forme $\int\frac{P(\cos x,\sin x)}{Q(\cos x,\sin x)}\,dx$ quand $P$ et $Q$ sont des polynômes, en se ramenant à intégrer une fraction rationnelle.

Il existe deux méthodes :

- les règles de Bioche sont assez efficaces mais ne fonctionnent pas toujours ;
- le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ fonctionne tout le temps mais conduit à davantage de calculs.

**Les règles de Bioche.** On note $\omega(x) = f(x)\,dx$. On a alors $\omega(-x) = f(-x)\,d(-x) = -f(-x)\,dx$ et $\omega(\pi - x) = f(\pi - x)\,d(\pi - x) = -f(\pi - x)\,dx$.

- Si $\omega(-x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \cos x$.
- Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \sin x$.
- Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \tan x$.

**Exemple 18.**
Calcul de la primitive $\int \frac{\cos x\,dx}{2-\cos^2 x}$
On note $\omega(x) = \frac{\cos x\,dx}{2-\cos^2 x}$. Comme $\omega(\pi - x) = \frac{\cos(\pi-x)\,d(\pi-x)}{2-\cos^2(\pi-x)} = \frac{(-\cos x)\,(-dx)}{2-\cos^2 x} = \omega(x)$ alors le changement de variable qui convient est $u = \sin x$ pour lequel $du = \cos x\,dx$. Ainsi :

$$\int \frac{\cos x\,dx}{2-\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,dx}{2-(1-\sin^2 x)} = \int \frac{du}{1+u^2} = \Big[\arctan u\Big] = \arctan(\sin x) + c\ .$$

**Le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$.**
Les formules de la « tangente de l'arc moitié » permettent d'exprimer sinus, cosinus et tangente en fonction de $\tan\frac{x}{2}$.

$$\text{Avec} \quad t = \tan\frac{x}{2} \quad \text{on a}$$

$$\cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\text{et} \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

**Exemple 19.**
Calcul de l'intégrale $\int \frac{dx}{1-\sin x}$.
Le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ . De plus on a $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1-\sin x} &= \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{1+t^2-2t} \\ &= 2\int \frac{dt}{(1-t)^2} = \left[\frac{2}{1-t}\right] \end{aligned}$$