# Intégrales Indéfinies

Ce chapitre donne une introduction à intégrale définie (ou de Riemann), et de quelques propriétés fondamentales qui sont conséquence des définitions. L'intégrale définie est un puissant outil mathématique dont les applications sont nombreuses telles que le calcul des aires, le travail d'une force, le calcul de limites de suites etc.

## 1. Intégrale définie (de Riemann)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ (avec $a < b$) et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Nous présentons l'intégrale définie comme une limite d'une somme et la notion de la fonction intégrable.

### 1.1. Subdivisions

**Définition 1.1**

On appelle ***subdivision*** d'ordre $n$ d'un intervalle $[a,b]$ une partie finie $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a,b]$ telle que

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

On notera $S_{a,b}$ l'ensemble des subdivision de $[a,b]$.

Posons $h_i = x_i - x_{i-1}$ la longueur de l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$. Puisque $f$ est bornée sur $[a,b]$ cela implique que $m = \inf f$ et $M = \sup f$ existent. De plus, $f$ est borné sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$. Désignons respectivement $m_i$ et $M_i$ la borne inférieure et la borne supérieur de $f$ sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ avec $i = 1, 2, \ldots, n$.
Étant donner que pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$m \leqslant m_i \leqslant M_i \leqslant M.$$

### 1.2. Sommes de Darboux

**Définition 1.2**

La ***somme de Darboux inférieure*** resp. ***supérieure*** de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ relativement à la subdivision $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ sont définies par

$$s(f,X) = \sum_{i=1}^{n} h_i\, m_i \quad \text{resp.} \qquad S(f,X) = \sum_{i=1}^{n} h_i\, M_i.$$

**Remarque 1.1**

Étant donné que la détermination des bornes inf et sup sur les sous intervalles est assez couteux et en général difficile. On définit les sommes de Darboux comme suit :

$$s(f,X) = \sum_{i=1}^{n} h_i\, f(x_{i-1}) \ \text{ resp.} \qquad S(f,X) = \sum_{i=1}^{n} h_i\, f(x_i).$$

avec $h_i = x_i - x_{i-1}$.

### 1.3. Intégrale de Riemann

**Définition 1.3**

La fonction $f$ est ***Riemann-intégrable*** (au sens de Riemann) sur $[a,b]$ si et seulement si les deux sommes de Darboux tendent vers la même limite $I$, autrement dit :

$$\forall \epsilon, \exists X \in S_{a,b} \ : \ S(f,X) - s(f,X) < \epsilon$$

Cette limite $I$ est appelée ***intégrale définie*** de la fonction $f$ sur $[a,b]$ et notée par $\int_a^b f(x)dx$.

**Remarque 1.2**

- La définition 1.3 est appelé critère d'intégration (voir l'exemple 1 ci-dessous).
- Soit maintenant $\xi = (\xi_1, \ldots; \xi_n)$ vérifie $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pour tous $i = 1, 2, \ldots, n$. La somme

$$S(f,X;\xi) = \sum_{i=1}^{n} h_i f(\xi_i)$$

appelée ***somme de Riemann*** , est telle que :

$$s(f,X) < S(f,X,\xi) < S(f,X)$$

et

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S(f,X,\xi).$$

**Exemple 1.**
La fonction de Dirichlet,

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'est pas Riemann-intégrable, car on a

$$\forall X \in S_{a,b} \ s(f,X) = 0, \ S(f,X) = b - a.$$

### 1.4. Extension de la définition pour $a$ et $b$ quelconque

**Définition 1.4**

Pour s'autoriser des bornes sans se préoccuper de l'ordre on définit :

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{et pour } a < b \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

### 1.5. Classes des fonctions Riemann-intégrable

**Théorème 1.1**

1. Toute fonction continue sur $[a,b]$ est une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$.
2. Toute fonction monotone sur $[a,b]$ est une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

**Exemple 2.**
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Montrons qu'elle est intégrable et calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$, en utilisant la somme de Riemann.
Comme la fonction $f(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle est continu sur $[0,1]$. D'après le théorème précédent alors la fonction $f(x) = x^2$ est intégrable. On découpe (partage) l'intervalle $[0,1]$ en $n$ sous intervalles équidistances

(de mêmes longueurs) comme suit
$$X=\{x_0=0,x_1,\dots,x_n=1\}\subset[0,1]$$
avec
$$x_i=0+i\,h=i\,h,\text{pour tous}i=1,\dots,n$$
et
$$h=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$$
c'est à dire ;
$$X=\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\dots,\frac{n-1}{n},1\}$$
On choisit les points $\xi=\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}$ comme suit :
$$\xi_i=i\,h=\frac{i}{n},\ \ i=1,2,\dots,n$$
cela entraine que
$$f(\xi_i)=f(\frac{i}{n})=(\frac{i}{n})^2=\frac{i^2}{n^2},\ \ i=1,2,\dots,n$$
La somme de Riemann est alors donné par :
$$S(f,X,\xi)=\sum_{i=1}^{n}h\,f(\xi_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{i^2}{n^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$$
D'où
$$\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)$$
Sachant que
$$\sum_{i=1}^{n}i^2=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
Donc
$$\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6}=\frac{1}{3}.$$

## 2. Propriétés des intégrales définies

Les trois principales propriétés de l'intégrale sont la relation de Chasles, la positivité et la linéarité.

### 2.1. Relation de Chasles

**Proposition 1.1** (Relation de Chasles)

Soient $a<c<b$. Si $f$ est intégrable sur $[a,c]$ et $[c,b]$, alors $f$ est intégrable sur $[a,b]$. Et on a
$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

*Démonstration.* C'est une conséquence direct de la définition. □

### 2.2. Linéarité de l'intégrale

**Proposition 1.2**

Soient $f,g$ deux fonctions intégrables sur $[a,b]$.

1. $f+g$ est une fonction intégrable et $\int_a^b(f+g)(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$.
2. Pour tout réel $\lambda$, $\lambda f$ est intégrable et on a $\int_a^b \lambda f(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx$.

**Remarque 1.3**

Si $f \times g$ est une fonction intégrable sur $[a,b]$ alors en général $\int_a^b (fg)(x)\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$.

**Exemple 3.**

$$\int_0^1 \left(7x^2 - e^x\right) dx = 7\int_0^1 x^2\,dx \;-\; \int_0^1 e^x\,dx = 7\frac{1}{3} \;-\; (e-1) = \frac{10}{3} - e$$

Nous avons utilisé les calculs déjà vus : $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$ et $\int_0^1 e^x\,dx = e-1$.

## 2.3. Inégalités de l'intégrale

**Proposition 1.3** (Positivité de l'intégrale)

Soit $a \leqslant b$ deux réels et $f$ et $g$ deux fonctions intégrables sur $[a,b]$.

- (Positivité) Si $\quad f \geqslant 0 \quad$ alors $\quad \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$
- (Relation d'ordre) Si $f \leqslant g \quad$ alors $\quad \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$
- (Majoration) Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors
$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$
La quantité $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ est appelée ***valeur moyenne*** de $f$ sur $[a,b]$.
- (Majoration) $|f|$ est une fonction intégrable sur $[a,b]$ et
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b \left|f(x)\right|\,dx$$
- (Inégalité de Cauchy-Schwarz) $f \times g$, $f^2$ et $g^2$ sont intégrable sur $[a,b]$ et
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx \times \int_a^b g^2(x)\,dx}$$

*Démonstration.* En effet,

- $f \geqslant 0$, tous les termes des sommes de Darboux $s(f,X)$ et $S(f,X)$ sont positifs.
-
$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx \leqslant 0$$
puisque $g(x) - f(x) \leqslant 0$
- évidente.
- de la définition de l'intégrale
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n h f(\xi_i)$$
et l'inégalité triangulaire généralisé nous assure le résultat.
- Écrire l'intégrale sous forme de somme et la question 1 de l'**exercice 4** de la série 1 (du premier semestre).

□

# 3. Intégrale fonction de la borne supérieure

Nous donnons la construction d'une primitive particulière d'une fonction donnée à partir de son intégrale comme suit :

**Définition 1.5**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction $\Phi : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a$, c'est-à-dire $\Phi$ est dérivable de dérivée $\Phi'(x) = f(x)$ et $\Phi(a) = 0$. Cette fonction s'appelle intégrale fonction de la borne supérieure ou intégrale dépendant de la borne supérieure.

**Exemple 4.**

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

**Remarque 1.4**

1. On évitera la notation $\int_a^x f(x)\,dx$ où la variable $x$ est présente à la fois aux bornes et à l'intérieur de l'intégrale. Mieux vaut utiliser la notation $\int_a^x f(t)\,dt$ ou $\int_a^x f(u)\,du$ pour éviter toute confusion.
2. Une fonction intégrable n'admet pas forcément une primitive. Considérer par exemple sur $[0,2]$, soit $f(x) = 1$ sur $]0,1]$ et $f(x) = 0$ sur $]1,2]$. On a alors $F(x) = x$ sur $[0,1]$ et $F(x) = 1$ sur $[1,2]$. $F$ est bien continue, mais $F$ n'est pas dérivable en $x = 1$ alors que par définition une primitive doit être dérivable.

# 4. La formule de Newton-Leibniz

**Théorème 1.2**

Soit $F$ une primitive quelconque de la fonction continue $f(x)$ sur l'intervalle $[a,b]$. Alors l'intégrale de $f$ sur $[a,b]$ est donnée par

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

*Démonstration.* Soit $F$ une primitive quelconque de $f$. Comme $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est aussi une primitive, les deux fonctions diffèrent d'une constante : $F(x) = \Phi(x) + c$. Nous avons donc

$$F(b) - F(a) = (\Phi(b) + c) - (\Phi(a) + c) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt$$

comme

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0$$

alors

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

□