

Serie de TD n°1- Intégrales Indéfinies

Exercice 1 Montrer que :

- $\int \sqrt[n]{x^m} dx = \frac{n}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}} + C,$
- $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx = \frac{2}{5}(\sqrt{x})^5 + x + C,$
- $\int \frac{\sqrt{x-x^3}e^x+x^2}{x^3} dx = C - \frac{2}{3x\sqrt{x}} - e^x + \ln|x|,$
- $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx = \frac{1}{2} \tan x + \frac{1}{2}x + C,$
- $\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C.$

En utilisant la table des intégrales, calculer :
 $\int \frac{(1+2x^2)}{x^2(1+x^2)} dx, \int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$ et $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx.$

Exercice 2 A l'aide d'un changement de variable, calculer :

- $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$
- $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$
- $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3} dx$
- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$
- $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx$

Exemples supplémentaires : $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)} dx, \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}},$
 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} dx, \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx, \int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$ et $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx,$
 $\int \frac{\ln \tan x}{\sin x \cos x} dx.$

Exercice 3 En intégrant par parties, calculer :

- $\int x^n \ln x dx \quad (n \neq -1)$
- $\int \arccos x dx$
- $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$
- $\int x \cos^2 x dx$

Exemples supplémentaires $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx, \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx,$
 $\int \ln(x^2 + 1) dx, \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}, \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$ et $\int x^2 e^{-x} dx.$

Exercice 4 A l'aide de la méthode de décomposition des fonctions rationnelles en éléments simples, calculer les intégrales suivantes :

- $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$
- $\int \frac{xdx}{2x^2-3x-2}$
- $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx$

- $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$
- $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$

Exemples supplémentaire $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx, \int \frac{32x dx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)},$
 $\int \frac{xdx}{x^4-3x^2+2}$ et $\int \frac{(2x^2-5)dx}{x^4-5x^2+6}.$

Exercice 5 Calculer les intégrales de fonctions irrationnelles suivantes :

- $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$
- $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx$
- $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$
- $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3 \sqrt{x}}$

Exemples supplémentaires $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}} dx, \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx,$
 $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$ et $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$

Exercice 6 Calculer les intégrales suivantes en indiquant la méthode utilisée :

- $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x} dx$
- $\int x \sin x \cos x dx$
- $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
- $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx$
- $\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx$
- $\int \frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6} dx$

Correction 1 Rappeler d'abord le tableau des primitives usuelles.

1. Utiliser la définition d'une primitive, i.e. $(\frac{n}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} + C)' = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$.
2. $(\frac{2}{5}(\sqrt{x})^5 + x + C)' = x\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)$
3. $(C - \frac{2}{3x\sqrt{x}} - e^x + \ln|x|)' = \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}$
4. $(\frac{1}{2}\tan x + \frac{1}{2}x + C)' = \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}$
5. $(\tan x - x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x$
6. $-\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C$;
7. $\operatorname{tg} x + C$
8. $\ln|x| + 2 \operatorname{arctg} x + C$

Correction 2 1. On pose $x = t^2 - 1$ alors $dx = 2t dt$ et on aura $-2 \ln(1 + \sqrt{x+1}) + 2\sqrt{x+1} + C$

2. On pose $x = t^2 + 1$ alors $dx = 2t dt$ rappeler l'identité remarquable d'ordre 3 et on aura $\frac{2\sqrt{x-1}}{35} (5x^3 + 6x^2 + 8x + 16) + C$
3. On pose $x = t + 2$ alors $dx = dt$ et on aura $-\frac{11}{2(x-2)^2} - \frac{4}{x-2} + C$;
4. On pose $x = t^2 - 1$ alors $dx = 2t dt$. rappeler le faite que $\int \frac{dx}{1-x^2} = \log|\frac{1+x}{1-x}|$ et on aura $2 \ln|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}| + C$
5. On pose $x = t^2 + 2$ alors $dx = 2t dt$ rappeler que $\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} + C$ et on aura $\sqrt{2} \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x-2} + 2\sqrt{x-2} + C$;
6. $2 \arctan \sqrt{x} + C$
7. $-3\sqrt[3]{x+1} + 3 \ln|1 + \sqrt[3]{x+1}| + \frac{3}{2}(\sqrt[3]{x+1})^2 + C$
8. $x + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2}(\sqrt[3]{x})^2 + \frac{6}{5}(\sqrt[6]{x})^5 + 6\sqrt{x} + 6 \ln|\sqrt[6]{x} - 1| + C$
9. $-2\sqrt{(e^x+1)} + \frac{2}{3}(\sqrt{(e^x+1)})^3 + C$;
10. $\ln \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} + C$
11. $2\sqrt{1+\ln x} - \ln|\ln x| + 2 \ln|\sqrt{1+\ln x} - 1| + C$
12. $\frac{1}{2} \ln^2|\tan x| + C$

Correction 3 1. $\frac{x^{n+1}}{1+n} (\ln x - \frac{1}{n+1}) + C$;

2. $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$;
3. $x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$
4. $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C$

5. $\sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$
6. $2(\sqrt{x} - \sqrt{1-x} \arccos \sqrt{x}) + C$;
7. $x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C$
8. $-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$
9. $x^2 \sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3} \sqrt{(1+x^2)^3} + C$
10. $-e^{-x} (x^2 + 2x + 2) + C$

Correction 4 1. $\ln|\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}| + C$

2. $\frac{1}{5} \ln[(x-2)^2 \sqrt{2x+1}] + C$
3. $\ln|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}| + C$
4. $\frac{3}{11} \ln|3x+1| - \frac{1}{3} \ln|x| + \frac{2}{33} \ln|2x-3| + C$
5. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 2 \ln x + 5 \ln(x-2) - 3 \ln(x+2) + C$
6. $\frac{1}{4}x + \ln|x| - \frac{7}{16} \ln|2x-1| - \frac{9}{16} \ln|2x+1| + C$
7. $\ln|2x-1| - 6 \ln|2x-3| + 5 \ln|2x-5| + C$
8. $\ln \sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}} + C$
9. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln|\frac{x-\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}| + \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln|\frac{x-\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}| + C$

Correction 5 1. $1) 2\sqrt{x} - 2 \ln(1 + \sqrt{x}) + C$

2. $6t - 3t^2 - 2t^3 + \frac{3}{2}t^4 + \frac{6}{5}t^5 - \frac{6}{7}t^7 + 3 \ln(1+t^2) - 6 \operatorname{arctg} t + C$ $t = \sqrt[6]{x+1}$
3. $\frac{3}{4} \ln \frac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x})^3} - \frac{3}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}} + C$
4. $\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2} - \frac{4}{1+\sqrt[4]{x}} + C$
5. $\frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{4} \ln|t-1| + \frac{15}{8} \ln(t^2+t+2) - \frac{27^2}{8\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C$, $t = \sqrt[3]{2+x}$
6. $\frac{x^2}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2} \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$
7. $\ln \frac{x^2}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}} + \frac{10}{19x} - \frac{5}{\sqrt[3]{x}} + \frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}} - \frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}} + C$
8. $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 8\sqrt[4]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 48\sqrt[12]{x} + 3 \ln(1 + \sqrt[12]{x}) + \frac{33}{2} \ln(\sqrt[6]{x} - \sqrt[12]{x} + 2) - \frac{171}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{7}} + C$

Correction 6 1. $\frac{1}{3}(\sqrt{x^2+2x})^3 + C$

2. $\frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{4}x \cos 2x + C$
3. $2e^{\sqrt{x}} + C$
4. $\tan x \log(\cos x) + \tan x - x + C$
5. $\frac{-3}{x-1} + \log|x-1| + \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1) + C$
6. $C - \frac{1}{3} \log|1 + 3x^3 - x^6|$