Univèrsité Mostefa Ben Boulaid- Batna 2
Faculté de Mathématiques et Informatique-
Département de Socle Commun Mathématiques et Informatique

Module : Analyse II
Semestre 2-Mars 2020

Serie de TD n^{0}2- Intégrales définies

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
6. Si f est paire alors F est impaire.

Exercice 2 Les fonctions suivantes sont-elles intégrables au sens de Riemann ?

1. $f(x) = [x]$ sur $[0, 2]$
2. $g : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \left[\frac{1}{x}\right] & \text{si } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
3. $k : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad k_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1] \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$

Exercice 3 Montrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = x \ , \ g(x) = x^2 \text{ et } h(x) = e^x,$$

sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales $\int_0^1 f(x)dx$, $\int_1^2 g(x)dx$ et $\int_0^x h(t)dt$.

Exercice 4 Calculer les intégales suivantes :

$$\textbf{a)} \int_0^1 \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx \qquad \textbf{b)} \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x dx \qquad \textbf{c)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

$$\textbf{d)} \int_{-1}^1 (\arccos x)^2 \, dx \qquad \textbf{e)} \int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx \qquad \textbf{f)} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

Exercice 5 En utilisant les sommes intégrales de Riemann, calculer les limites suivantes :

- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right)$
- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2}\right)$

Exercice 6 Trouver les valeurs moyennes des fonctions suivantes :

$$6^x \quad \text{sur} \quad [1, 4] \text{ et } \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{sur} \quad [4, 9].$$

Correction 1 1. Vrai.

2. Vrai.
3. Faux ! Attention aux valeurs négatives par exemple pour $f(x) = x$ alors F est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
4. Vrai.
5. Vrai.
6. Vrai.

Correction 2 1. Oui.

2. Non.
3. Non.

Correction 3 1. En utilisant les sommes de Riemann, on sait que $\int_0^1 f(x)dx$ est la limite (quand $n \to +\infty$) de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$. Notons $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$. Alors $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}$. On a utilisé que la somme des entiers de 0 à $n-1$ vaut $\frac{n(n-1)}{2}$. Donc S_n tend vers $\frac{1}{2}$. Donc $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

2. Même travail : $\int_1^2 g(x)dx$ est la limite de $S'_n = \frac{2-1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(1+k\frac{2-1}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1+\frac{k}{n})^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1+2\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2})$. En séparant la somme en trois nous obtenons : $S'_n = \frac{1}{n}(n + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k^2) = 1 + \frac{2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$. Donc à la limite on trouve $S'_n \to 1+1+\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$. Donc $\int_1^2 g(x)dx = 7/3$. Remarque : on a utilisé que la somme des carrés des entiers de 0 à $n-1$ est $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.
3. Même chose pour $\int_0^x h(t)dt$ qui est la limite de $S''_n = \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{kx}{n}) = \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{kx}{n}} = \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{\frac{x}{n}})^k$. Cette dernière somme est la somme d'une suite géométrique, donc $S''_n = \frac{x}{n}\frac{1-(e^{\frac{x}{n}})^n}{1-e^{\frac{x}{n}}} = \frac{x}{n}\frac{1-e^x}{1-e^{\frac{x}{n}}} = (1-e^x)\frac{\frac{x}{n}}{1-e^{\frac{x}{n}}}$ qui tend vers $e^x - 1$. Pour obtenir cette dernière limite on remarque qu'en posant $u = \frac{x}{n}$ on a $\frac{\frac{x}{n}}{1-e^{\frac{x}{n}}} = \frac{1-e^u}{u}$ qui tend vers -1 lorsque $u \to 0$ (ce qui est équivalent à $n \to +\infty$).

Correction 4 a-$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \frac{\pi^2}{32}$ (changement de variables ou intégration par parties).

b-$\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x dx = \frac{3\pi}{4}$ (changement de variables $u = \frac{1}{x}$ et $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$).
c-$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = 1$ (intégration par parties).
d-$\int_{-1}^1 (\arccos x)^2 dx = \pi^2 + 4$ (2 intégrations par parties).
e-$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ (changement de variables ou intégration par parties).
f-$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ (changement de variables $u = \arcsin\frac{x}{2}$).

Correction 5 • Posons

$$S_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n}$$

La somme S_n peut être considérée comme une somme intégrale de la fonction $x \mapsto f(x) = x$ sur le segment [0,1] en supposant que ce segment a été partagé en $n-1$ parties égales et, comme la fonction est continue, donc intégrable, alors on peut choisir les ξ_t tels que $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. On a dans ce cas

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i\Delta x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n}$$

Ainsi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

• Tout d'abord transformons la somme S_n comme suit :

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

C'est une somme intégrale de la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur le segment $[0, 1]$. D'où il découle que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

-
-

Correction 6

$\mu_1 = \frac{1}{3}\int_1^4 6^x \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\frac{6^x}{\log 6}\right]_1^4 = \frac{1}{3\log 6}\left(6^4 - 6\right) = \frac{2}{\log 6}\left(6^3 - 1\right)$

$\mu_2 = \frac{1}{5}\int_4^9 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \left[\frac{2}{5}\sqrt{x}\right]_4^9 = \frac{2}{5}$