Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Département de GENIE MECANIQUE

Université Batna 2 Mostefa BENBOULAID
Faculté de Technologie
Département de Mécanique

Support de Cours

Mécanique Analytique.

Partie I : Cinématique du Solide

Destiné aux étudiants M1 Master MMTH.

Dr MAKHLOUFI Rafik.

Contenu de la matière

En préparant ce genre de support de cours en mécanique, Je ne peux oublier notre enseignant **MENINA Rachid** que Dieu le bénisse, qui nous a vraiment marqué par sa grande compétence, sa passion d'enseigner et sa rigueur. Lorsqu'il s'agit de la mécanique rationnelle et la mécanique analytique il faut rendre un grand hommage à ce grand Homme Enseignant.

Le support de cours est destiné aux étudiants en Master spécialité Maintenance Des Machines Thermiques et Hydrauliques (MMTH) et aux étudiants de la troisième année en mécanique du système LMD. La première partie de la mécanique analytique concerne la cinématique du solide qui sera suivie par d'autres parties la dynamique du solide et les travaux virtuels ainsi qu'un recueil d'exercices.

Conscient des erreurs que peut contenir ce support, je tiens à remercier tout ceux qui nous ferons part de leurs critiques ou suggestions dans le but d'améliorer son contenu.

Introduction.

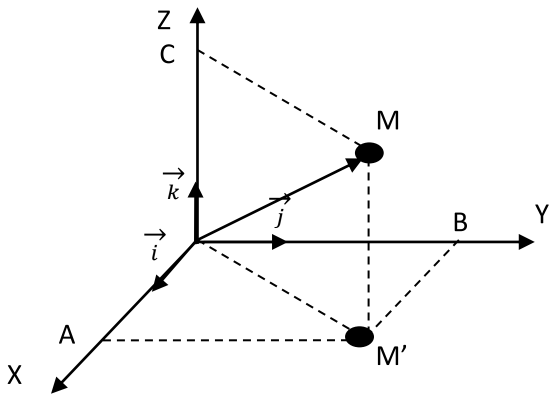
On appelle cinématique la partie de la mécanique qui étudié les propriétés géométriques des mouvements des corps.

On appelle mouvement le changement de position dans l'espace et dans le temps d'un corps par rapport à un référentiel donné.

Systèmes de coordonnées.

Les systèmes de coordonnées permettent de positionner à tout instant un point en mouvement.

1- Coordonnées cartésiennes.

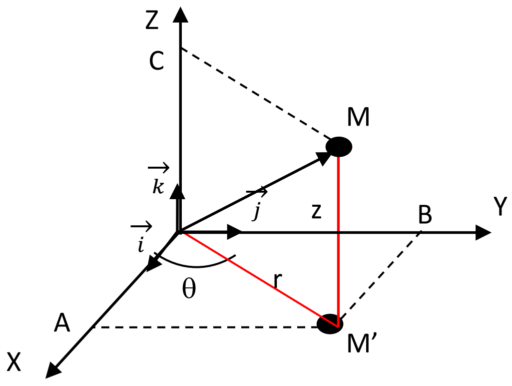


$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{OA}\vec{\imath} + \mathrm{OB}\vec{\jmath} + \mathrm{OC}\vec{k}$$

Avec $\begin{cases} OA = x \\ OB = y \\ OC = z \end{cases}$ $\rightarrow$ représentent les coordonnées cartésiennes. Si le point M est en mouvement, donc on aura : $\begin{cases} x = f(t) \\ y = f(t) \\ z = f(t) \end{cases}$

2-Coordonnées cylindriques ou polaires.

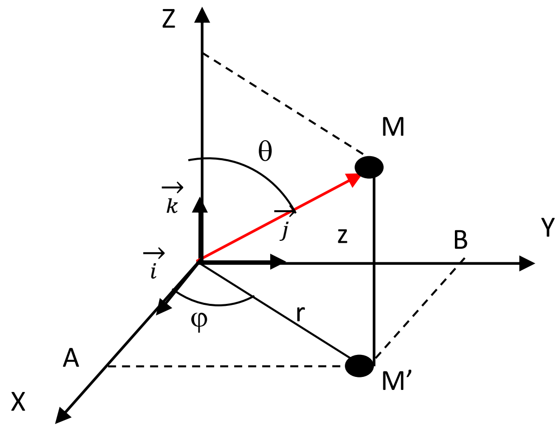


$$\begin{cases} \theta = f(t): Angle\ polaire \\ r = f(t): Rayon\ polaire \\ z = f(t): La\ \text{côte} \end{cases}$$

On passe des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes par la relation suivante :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{avec :} \begin{cases} r \in]-\infty, +\infty[\\ \theta \in [0, 2\pi] \\ z \in]-\infty, +\infty[\end{cases}$$

3- Coordonnées sphériques.



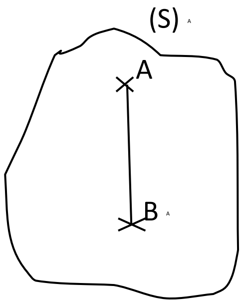
$$\begin{cases} F(t) = \theta = (\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OM}) : \text{colatitude} \\ f(t) = \varphi = \left(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM'}\right) : \text{longitude} \\ f(t) = r = (\overrightarrow{OM}) : \text{rayon position} \end{cases} \quad \text{Avec :} \begin{cases} \varphi \in [0, 2\pi] \\ \theta \in [0, 2\pi] \\ r \in]-\infty, +\infty[\end{cases}$$

On aura finalement : $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

Principaux mouvements.

Soit un solide (S) ou $\overline{AB}$ est une constante

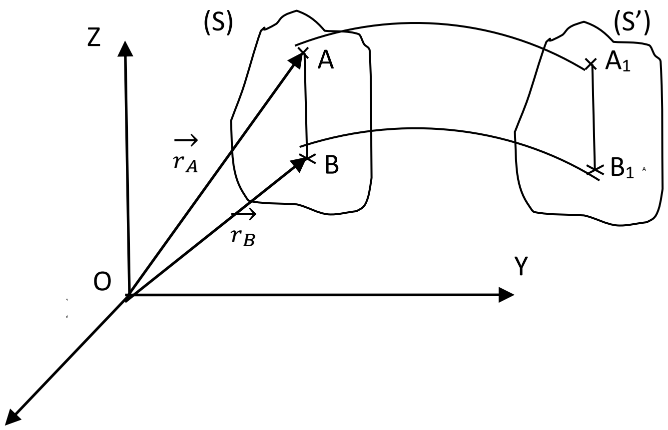
On distingue cinq mouvements principaux :



* mouvement de translation
* mouvement de rotation autour d'un axe fixe
* mouvement plan
* mouvement de rotation autour d'un point
* mouvement libre.

1- Mouvement de translation d'un corps solide.

Définition : On entend par mouvement de translation du solide un mouvement dans lequel chaque droite appartenant au corps solide se déplace tout en restant parallèle à elle-même. Le mouvement rectiligne est un cas particulier du mouvement de translation.



$AB \,//\, A_1B_1$

$\vec{r}_A$: vecteur position de A

$\vec{r}_B$: vecteur position de B

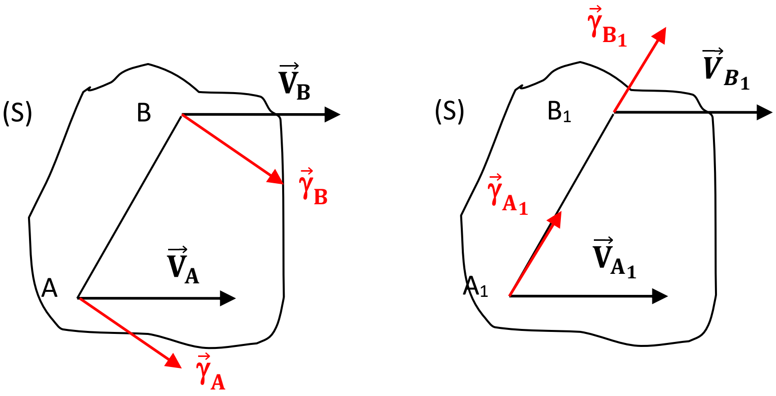
$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}$ avec AB = constante et la trajectoire de A est la même que la trajectoire de B.

$\vec{r}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt}$, $\vec{V}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt}$

$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}$ avec $\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 0 \;=\gg\; \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt}$

$$=\gg \vec{V}_B = \vec{V}_A \;\; \textbf{et} \qquad \vec{\gamma}_B = \vec{\gamma}_A$$

Théorème : Dans le mouvement de translation tous les points du corps décrivent les mêmes trajectoires et à chaque instant ils possèdent des vitesses et des accélérations égales en module et en direction.



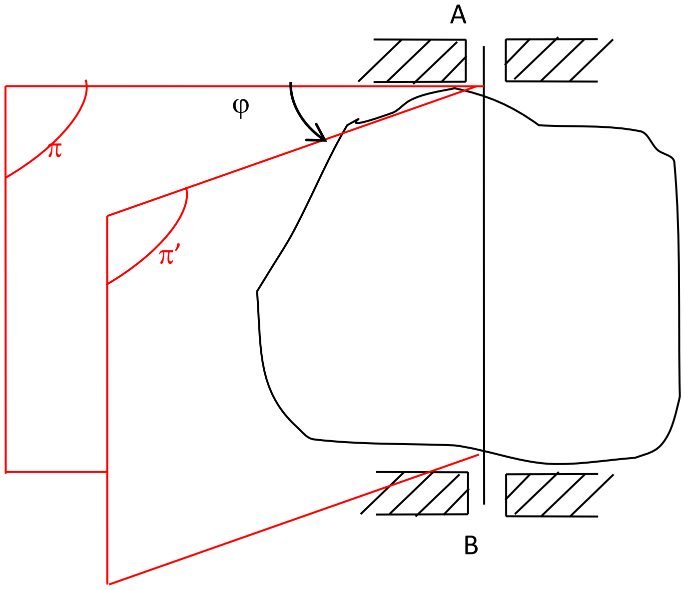
$$\begin{cases} \overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_B} \\ \overrightarrow{V_{A_1}} = \overrightarrow{V_{B_1}} \\ \overrightarrow{\gamma_A} = \overrightarrow{\gamma_B} \\ \overrightarrow{\gamma_{A_1}} = \overrightarrow{\gamma_{B_1}} \end{cases}$$

Il en résulte :

Pour étudier le mouvement d'un solide en translation, il suffit d'étudier cinématiquement le mouvement d'un des points du solide. On considère alors le solide comme un point mobile parce que tous les autres points se déplacent de la même façon.

2- Mouvement de rotation autour d'un axe fixe.

Définition : On appelle mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un axe fixe un mouvement dans lequel deux points quelconques du corps restent fixes.



AB : Axe de rotation

φ : Angle de rotation où est une fonction de temps φ =f(t).

La position d'un solide dans l'espace peut être définie à l'aide de l'angle de rotation φ entre un plan fixe (π) et un plan (π') lié au corps et tournant avec le corps.

φ =f(t) représente la loi de mouvement du solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe.

a) Vitesse angulaire moyenne d'un solide.

$$\omega_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_{1-}\ \varphi_2}{t_{1-}\ t}\ [\mathrm{rd/s}]\ \text{ entre deux instants t1 et t.}$$

b) Vitesse angulaire instantanée.

$$\omega_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\,[\mathrm{rd/s}]$$

c) Accélération angulaire moyenne.

$$E_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \ [\mathrm{rd}/s^2]$$

d) Accélération angulaire instantanée.

$$\mathrm{E_t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}\,[\mathrm{rd}/s^2]$$

e) Cas de rotation uniforme.

$$\omega \text{ est constante} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = C^{ste} \Rightarrow \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_{t=0}^{t} \omega dt$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_{t=0}^{t} dt \Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \omega t \Rightarrow \varphi = \omega t + \varphi_0$$

$$\omega = \frac{\text{nombre de tours}}{\text{minute}}$$

Avec : 1 tour = 2π rd et 1 minute = 60 s, on aura :

$$\frac{\text{n tours}}{\text{minute}} = \mathrm{n}\,\frac{2\pi}{60} = \omega \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{\pi n}{30}$$

Exemple d'application.

Soit la loi de mouvement suivante : $\varphi = \frac{1}{3}t^3$. Déterminer ω et ε si $t = \sqrt{30\pi}$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = t^2$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\, 2t$$

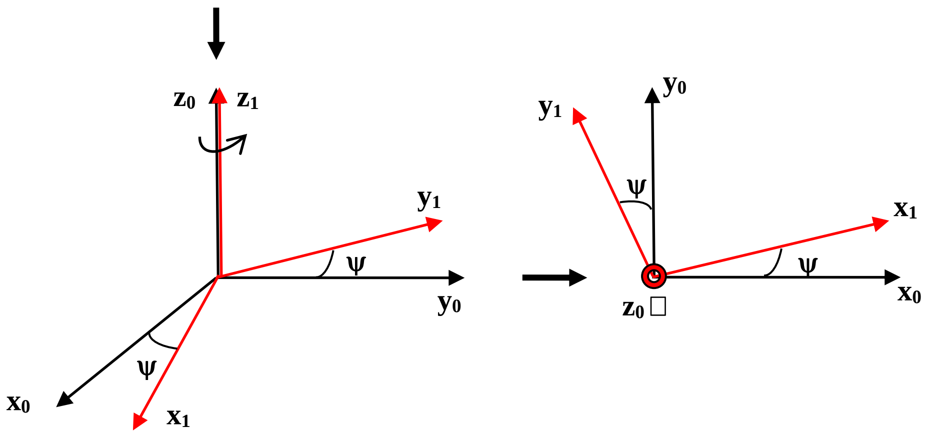
On aura : ω = 30 π rd/s et $\varepsilon = 2\sqrt{30\pi}\ \mathrm{rd/s^2}$

Angles d'Euler.

L'objectif des angles d'Euler est de passer du repère fixe au repère lié au solide par trois rotations successives.

1- Angle de précession ψ .

L'angle de précession ψ est obtenu par une rotation autour de Oz_0 dans le plan Ox_0y_0, le nouveau repère est $Ox_1y_1z_1$



La matrice de transformation (ou de passage) nous permet de retrouver les coordonnées d'un vecteur dans un autre repère, c'est-à-dire entre les repères $Ox_0y_0z_0$ et $Ox_1y_1z_1$. Les éléments de la matrice de passage ne sont que les projections.

$$\begin{cases} \overrightarrow{y_1} = \cos\psi\ \overrightarrow{y_0} - \sin\psi\,\overrightarrow{x_0} + 0\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{x_1} = \cos\psi\ \overrightarrow{x_0} + \sin\psi\,\overrightarrow{y_0} + 0\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{z_1} = 0\,\overrightarrow{x_0} + 0\overrightarrow{y_0} + 1\overrightarrow{z_0} \end{cases} \qquad (1)$$

On peut écrire le système (1) sous forme matricielle pour simplifier les choses. Pour le passage du repère initial $Ox_0y_0z_0$ au nouveau repère $Ox_1y_1z_1$, on a la matrice suivante :

$$0 \longrightarrow 1$$

	x_1	y_1	z_1
x_0	$\cos\psi$	$-\sin\psi$	0
y_0	$\sin\psi$	$\cos\psi$	0
z_0	0	0	1

Dans le cas contraire, c'est-à-dire pour passer du repère $Ox_1y_1z_1$ au repère initial $Ox_0y_0z_0$, on prend le transposé de la matrice précédente:

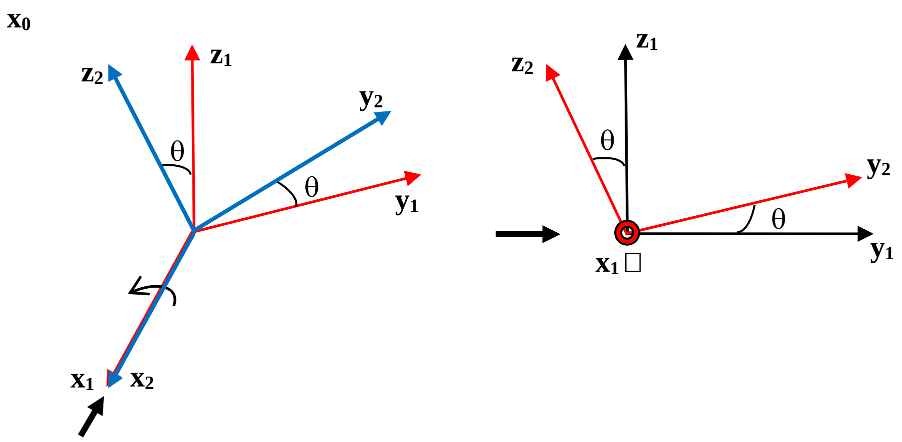
$$1 \longrightarrow 0$$

	x_1	y_1	z_1
x_0	$\cos\psi$	$-\sin\psi$	0
y_0	$\sin\psi$	$\cos\psi$	0
z_0	0	0	1

La ou il y a une rotation autour d'un axe toujours on a la valeur 1 dans le croisement, les autres cases des zéros.

2- Angle de nutation θ .

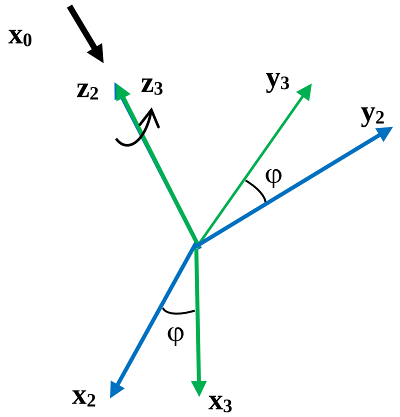
L'angle de nutation θ est obtenu par une rotation autour de Ox_1.

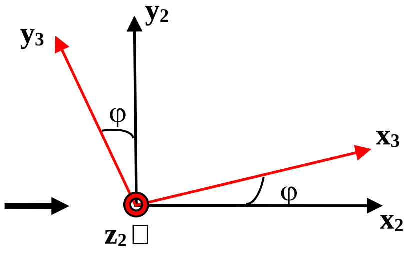


	x_2	y_2	z_2
x_1	1	0	0
y_1	0	$\cos\,\theta$	$-\sin\,\theta$
z_1	0	$\sin\,\theta$	$\cos\,\theta$

3- Angle de rotation propre φ .

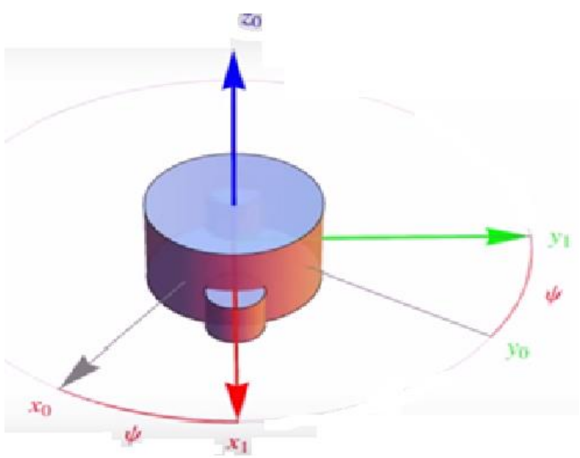
L'angle de rotation propre φ est obtenu par rotation autour de z_2

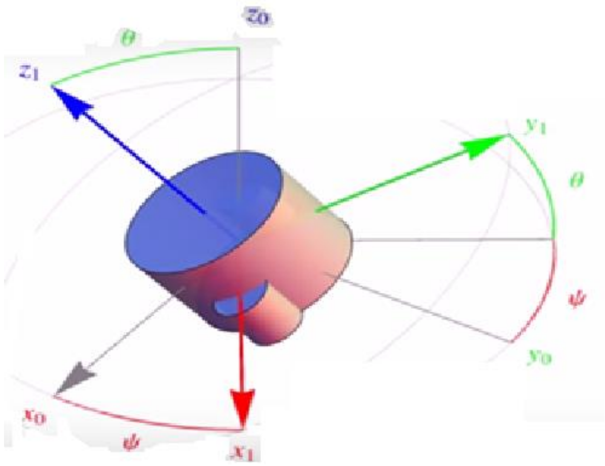


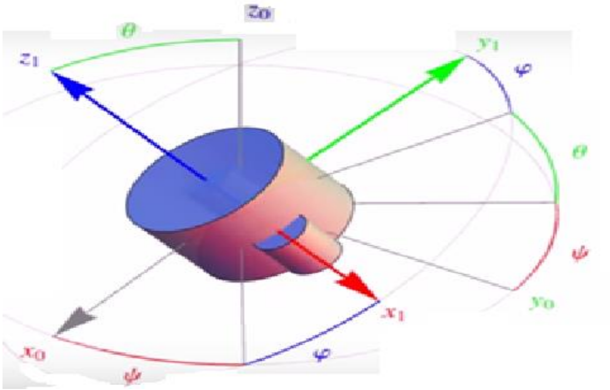


	x_3	y_3	z_3
x_2	$\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	0
y_2	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
z_2	0	0	1

La représentation des angles d'Euler en 3D est comme suit:







Matrice de passage de R_3 à R_0

On passe du repère R_3au repère R_0 à l'aide de deux repères intermédiaires R_1 et R_2 définis en dessus.

$$\begin{cases} \overrightarrow{x_1} = \cos\psi\ \overrightarrow{x_0} + \sin\psi\,\overrightarrow{y_0} + 0\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{y_1} = -\sin\psi\ \overrightarrow{x_0} + \cos\psi\,\overrightarrow{y_0} + 0\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{z_1} = 0\,\overrightarrow{x_0} + 0\overrightarrow{y_0} + 1\overrightarrow{z_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{y_2} = \cos\theta\,\overrightarrow{y_1} + \sin\theta\,\overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{z_2} = -\sin\theta\ \overrightarrow{y_1} + \cos\theta\,\overrightarrow{z_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{x_2} = \cos\psi\ \overrightarrow{x_0} + \sin\psi\,\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{y_2} = \cos\theta(\cos\psi\ \overrightarrow{y_0} - \sin\psi\,\overrightarrow{x_0}) + \sin\theta\,\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{z_2} = -\sin\theta\ (\cos\psi\ \overrightarrow{y_0} - \sin\psi\,\overrightarrow{x_0}) + \cos\theta\,\overrightarrow{z_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{x_2} = \cos\psi\ \overrightarrow{x_0} + \sin\psi\,\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{y_2} = -\sin\psi\cos\theta\,\overrightarrow{x_0} + \cos\theta\cos\psi\ \overrightarrow{y_0} + \sin\theta\,\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{z_2} = \sin\theta\ \sin\psi\,\overrightarrow{x_0} - \sin\theta\cos\psi\ \overrightarrow{y_0} + \cos\theta\,\overrightarrow{z_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{x_3} = \cos\varphi\,\overrightarrow{x_2} + \sin\varphi\,\overrightarrow{y_2} \\ \overrightarrow{y_3} = -sin\varphi\ \overrightarrow{x_2} + \cos\varphi\,\overrightarrow{y_2} \\ \overrightarrow{z_3} = \overrightarrow{z_2} \end{cases}$$

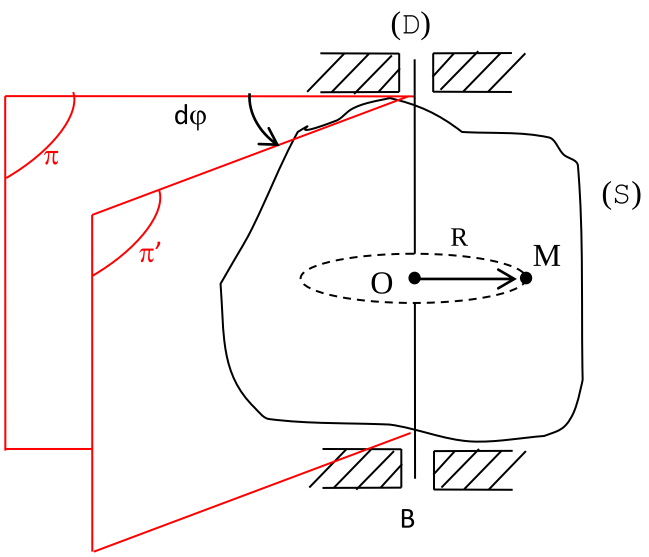
$$\begin{cases} \overrightarrow{x_3} = \cos\varphi\ (\cos\psi\ \overrightarrow{x_0} + \sin\psi\,\overrightarrow{y_0}) + \sin\psi\,(-\sin\psi\cos\theta\,\overrightarrow{x_0} + \cos\theta\cos\psi\ \overrightarrow{y_0} + \sin\theta\,\overrightarrow{z_0}) \\ \overrightarrow{y_3} = -\sin\varphi(\cos\psi\ \overrightarrow{x_0} + \sin\psi\,\overrightarrow{y_0}) + \cos\varphi(-\sin\psi\cos\theta\,\overrightarrow{x_0} + \cos\theta\cos\psi\ \overrightarrow{y_0} + \sin\theta\overrightarrow{z_0}) \\ \overrightarrow{z_3} = \sin\theta\ \sin\psi\,\overrightarrow{x_0} - \sin\theta\cos\psi\ \overrightarrow{y_0} + \cos\theta\,\overrightarrow{z_0} \end{cases}$$

Finalement, la matrice de passage de **R_3** à **R_0** est indiquée ci-dessous :

	$\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{y_0}$	$\overrightarrow{z_0}$
$\overrightarrow{x_3}$	$(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta)$	$(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta)$	$\sin\varphi\sin\theta$
$\overrightarrow{y_3}$	$(-\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta)$	$-(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\theta)$	$\cos\varphi\sin\theta$
$\overrightarrow{z_3}$	$\sin\psi\sin\theta$	$-\cos\psi\sin\theta$	$\cos\theta$

Trajectoires, vitesses et accélérations des points d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.

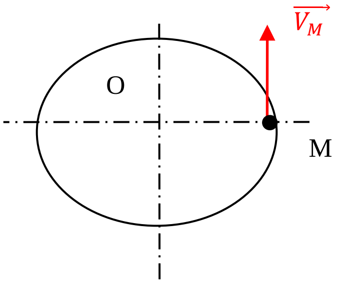
a- Trajectoire : Soit (S) un solide en rotation autour d'un axe fixe (D) avec une vitesse angulaire (ω), soit M un point v(S) / M v(D) et (S) effectue dφ .

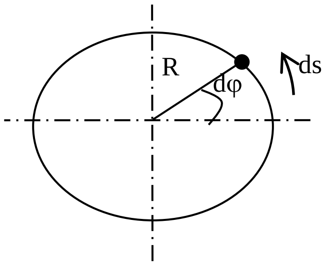


M décrit un arc de cercle : ds = R dφ.

Au cours de la rotation d'un solide autour d'un axe fixe, tous ses points décrivent des circonférences dans les plans perpendiculaires à l'axe, donc la trajectoire de chaque point est caractérisée par le rayon de rotation qui est la distance du point à l'axe d rotation.

b- Vitesses des points.





$$ds = R\, d\varphi.$$

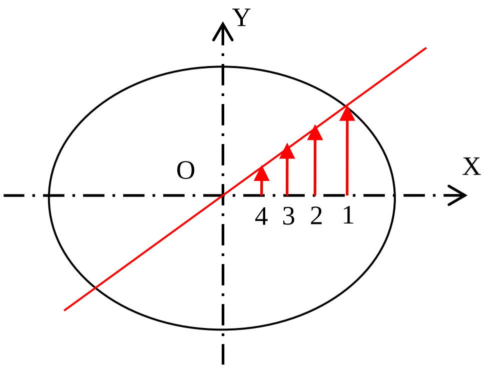
$$V = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} \implies V = R\,\omega$$

qui représente la vitesse du point M.

La vitesse linéaire du point d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est le produit du rayon de rotation par la vitesse angulaire du solide.

Loi de distribution des vitesses.

A un instant donné on a :



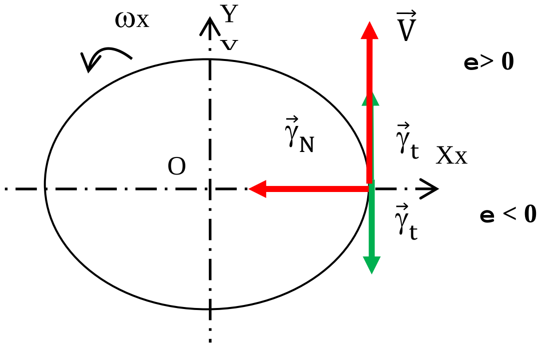
$$\omega = \frac{V_1}{R_1} = \frac{V_2}{R_2} = \cdots = \frac{V_n}{R_n} \implies \text{Loi de distribution des vitesses.}$$

$$\text{tg}\,\beta = \frac{V_1}{R_1} = \frac{V_2}{R_2} = \cdots = \frac{V_n}{R_n} = \omega$$

C- Accélérations des points.

1- Accélération tangentielle : $\vec{\gamma}_t$

$$\gamma_t = \frac{dV}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\,\varepsilon \;\Rightarrow\; \gamma_t = R\,\varepsilon$$



L'accélération tangentielle d'un point solide en rotation autour d'un axe fixe est le produit du rayon de rotation par l'accélération angulaire.

2- Accélération normale : $\vec{\gamma}_N$

$$\gamma_N = \frac{V^2}{R} = \frac{V^2\omega^2}{R} = R\,\omega^2 \;\Rightarrow\; \gamma_N = R\,\omega^2$$

L'accélération normale d'un point solide en rotation autour d'un axe fixe est le produit du carré de la vitesse angulaire par le rayon de rotation.

$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_N$ avec $\vec{\gamma}_t$ perpendiculaire à $\vec{\gamma}_N$.

$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{\gamma_t^{\,2} + \gamma_N^{\,2}} = \sqrt{R^2\varepsilon^2 + R^2\omega^4}$$

$$\Rightarrow |\vec{\gamma}| = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

La direction du vecteur accélération $\vec{\gamma}_t$ est définie par l'angle que fait le vecteur $\vec{\gamma}$ avec le rayon de rotation.

$$\mathrm{Tg}\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{\gamma_t}\right|}{\left|\overrightarrow{\gamma_N}\right|} = \frac{R|\varepsilon|}{R\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \text{constatnte}$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

Remarque : A un instant donné, tous les points d'un solide ont la même vitesse angulaire et la même accélération angulaire :

$$\frac{\gamma_{t_A}}{\gamma_{t_B}} = \frac{\gamma_{N_A}}{\gamma_{N_B}} = \frac{R_A}{R_B} = \frac{\gamma_A}{\gamma_B}$$

Exemple d'application.

Au cours de son démarrage, une roue tourne suivant la loi $\varphi = \frac{9}{32}t^3$. Déterminer la vitesse linéaire, l'accélération d'un point à l'instant où $\left|\overrightarrow{\gamma_t}\right| = \left|\overrightarrow{\gamma_N}\right|$ avec R = 0.8m.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{27}{32}t^2 \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{27}{32}t$$

$$\gamma_N = \gamma_t \Rightarrow R\,\varepsilon = R\,\omega^2 \Rightarrow \frac{27}{32}t = \frac{27^2}{16^2 x 4}t^4$$

$$\Rightarrow t = \frac{4}{3} \text{ avec } \gamma = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

On aura :

$$\omega = \frac{4}{3}\mathrm{rd/s} \;, \varepsilon = \frac{9}{4}\mathrm{rd/s^2} \; et \; \gamma = 2{,}54\ \mathrm{m/s^2}$$

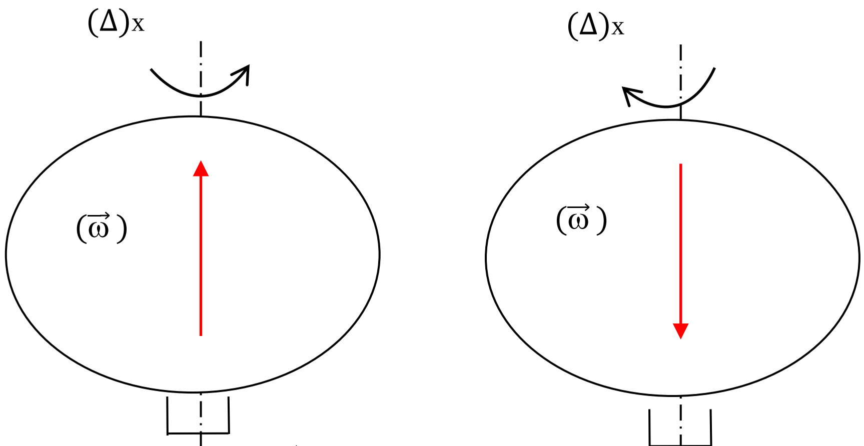
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$$

Pour la vitesse, on :

$$V = R\,\omega = 1{,}2\ \mathrm{m/s}$$

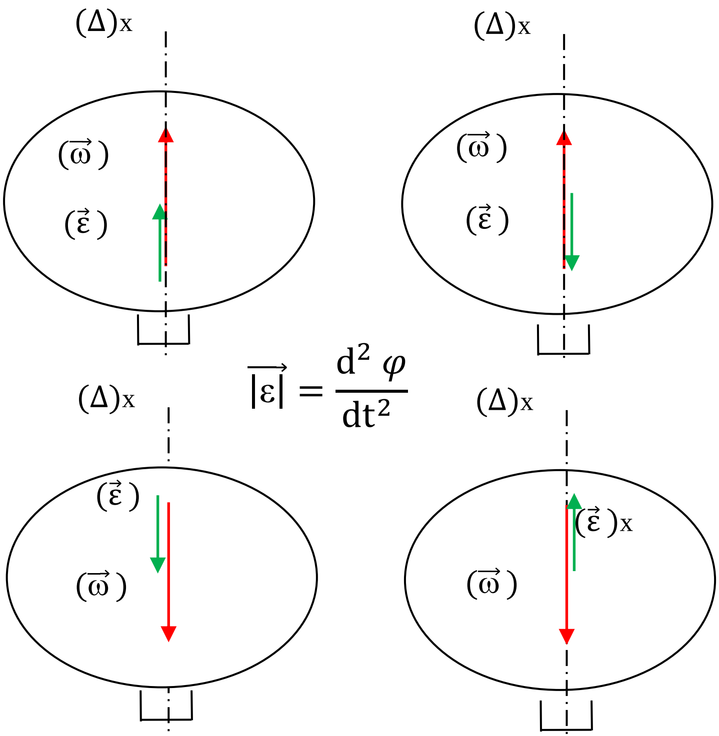
3- Vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$

Définition : On entend par vecteur vitesse angulaire, un vecteur glissant $\vec{\omega}$ définit par : $|\overrightarrow{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}$ de support l'axe (Δ) et d'un sens.



4- Vecteur accélération angulaire $\vec{\varepsilon}$

Définition : On entend par vecteur accélération angulaire, le vecteur glissant $\vec{\varepsilon}$ définit par :



$$|\overrightarrow{\varepsilon}| = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

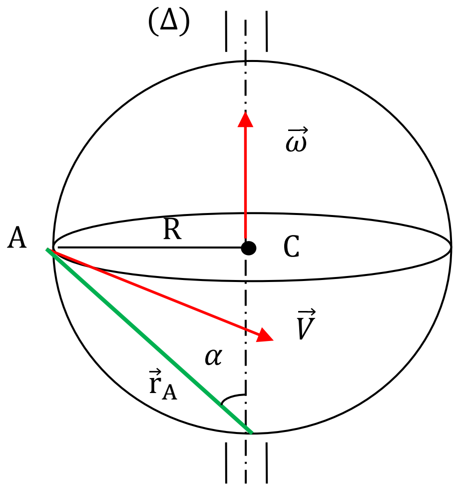
Mouvement accéléré Mouvement décéléré

de support l'axe (Δ) et d'un sens qui coincide avec le sens du vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ quand le mouvement est accéléré et il sera de sens contraire si le mouvement est décéléré.

Expression vectorielle de la vitesse d'un point.

Soit un solide en rotation autour de l'axe (Δ). La vitesse est donnée par : $V = R\,\omega$ et la position du point A est définie par $\vec{r}_A$ et avec $R = |\vec{r}_A|\sin\alpha$

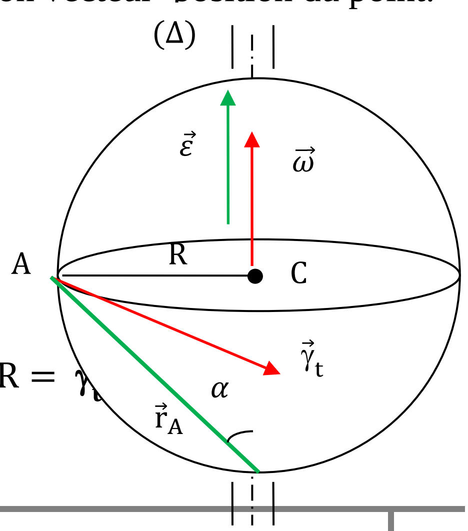
$$\left|\vec{\mathbf{V}}\right| = |\vec{\mathbf{r}}_A|\,\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{sin\alpha} = |\vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \vec{\mathbf{r}}_A|$$



$\vec{V}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{(\omega, \vec{r}_A)}$. Donc $\vec{V}$ a même sens et même direction que $\vec{\omega} \wedge \vec{r}_A$.

Théorème : Le vecteur vitesse d'un point d'un corps en rotation est le produit vectoriel du vecteur vitesse angulaire ω par le rayon vecteur position du point.

Expression vectorielle de $\vec{\gamma}, \vec{\gamma}_t$ et $\vec{\gamma}_N$.



$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

$$\text{et } \overrightarrow{|\omega|} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$\vec{\gamma} = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}$ avec $|\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}| = |\vec{\varepsilon}||\vec{r}||\sin\alpha| = |\vec{\varepsilon}|R = \gamma_t$

$=\gg\ \vec{\gamma} = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_N$

$\vec{\gamma}_t$ et $\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}$ ont même direction, même sens et même module.

Théoreme : L'accélération tangentielle d'un point d'un solide en rotation est le produit vectorielle du vecteur accélération angulaire par le rayon vecteur position du point.

De meme pour l'accélération normale :

$$\vec{\gamma}_N = \vec{\omega} \wedge \vec{V} =\gg |\vec{\gamma}_N| = R\omega^2 = \omega V$$

$\vec{\gamma}_N$ est vecteur porté par AC, son sens de A vers C.

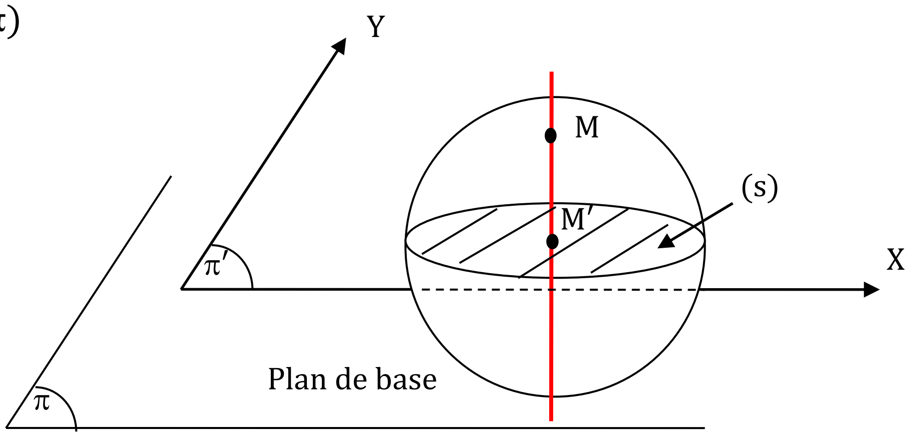
Théoreme : L'accélération normale d'un point d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est le produit vectoriel de la vitesse angulaire par la vitesse linéaire du point.

Mouvement plan.

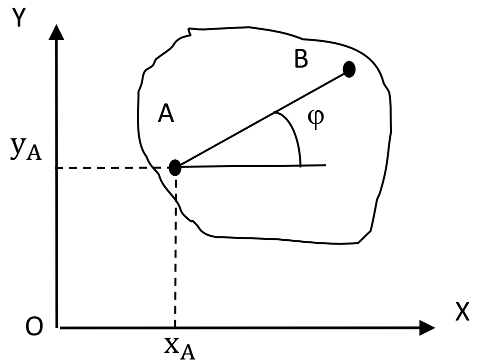
Définition : On appelle mouvement plan d'un solide tout mouvement au cours du quel tous les points du solide se déplacent parallèlement à un plan fixe appelé plan de base.

Propriétés : pour étudier le mouvement plan d'un solide, il suffit d'étudier seulement le mouvement plan d'une section (s) formée par le solide et un plan parallèle au plan de base.

$MM' \perp (\pi)$



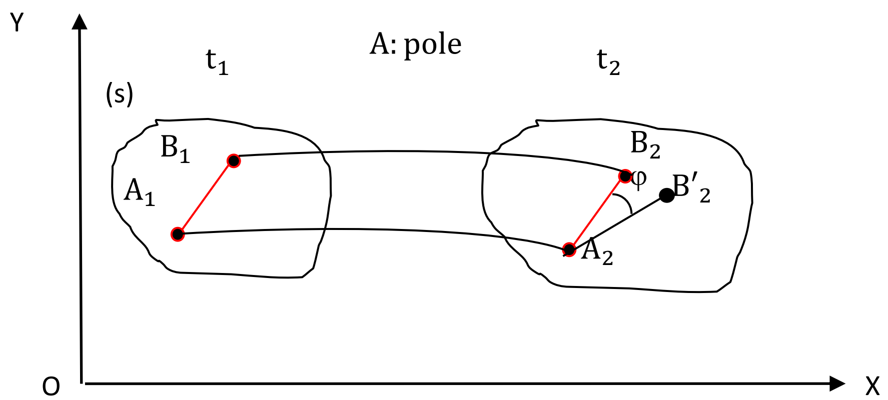
Au cours du mouvement plan du corps, la section (s) se trouve dans le plan (xoy) et la droite MM' se déplace en restant perpendiculaire à ce plan. Donc tous les points du corps situé sur la droite MM' se déplacent de façon identique.



$$\begin{cases} X_A = f(t) \\ y_A = f(t) \\ \varphi = f(t) \end{cases}$$

La position de la section (s) dans le repère (xoy) revient à déterminer la position de la droite AB (A et B sont fixes dans la section).

<u>Décomposition du mouvement plan en un mouvement de translation et un mouvement de rotation.</u>

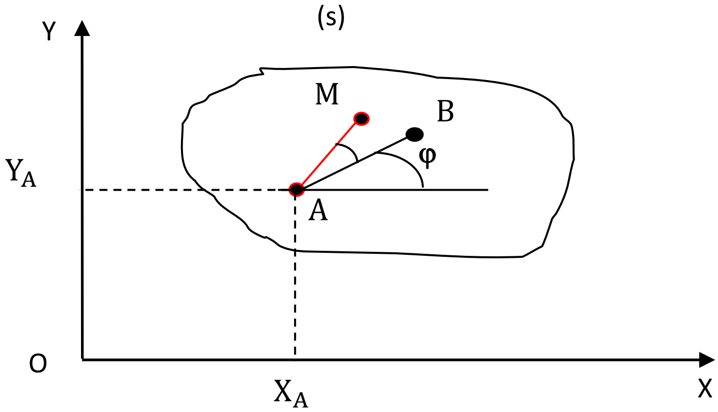


La translation est définie par $\begin{cases} x_A = f(t) \\ y_A = f(t) \end{cases}$ et la rotation par $\varphi = f(t)$ qui sont appelées les équations du mouvement.

Théorème : Le mouvement plan d'un solide est composé d'un mouvement de translation dans lequel tous les points se déplacent de la même façon que le pôle A, et d'un mouvement de rotation autour de ce pôle.

Détermination des trajectoires des points du corps.

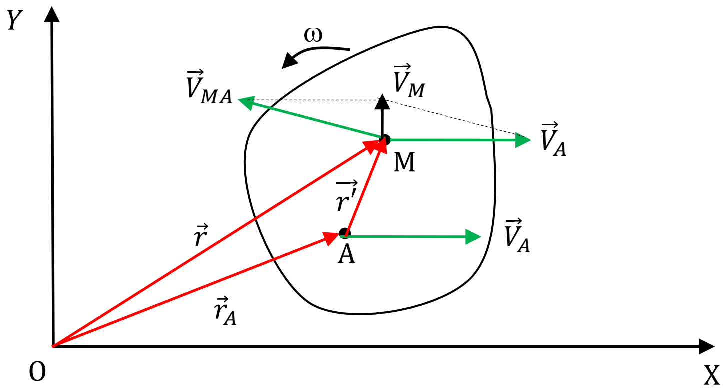
Soit AM = b.



$$\begin{cases} x = x_A + b\cos(\alpha + \varphi) \\ y = y_A + b\sin(\alpha + \varphi) \end{cases}$$

En éléminant le paramètre temps de ces deux équations, onretrouve l'equation habituelle de la trajectoire du point M.

Détermination des vitesses des points.



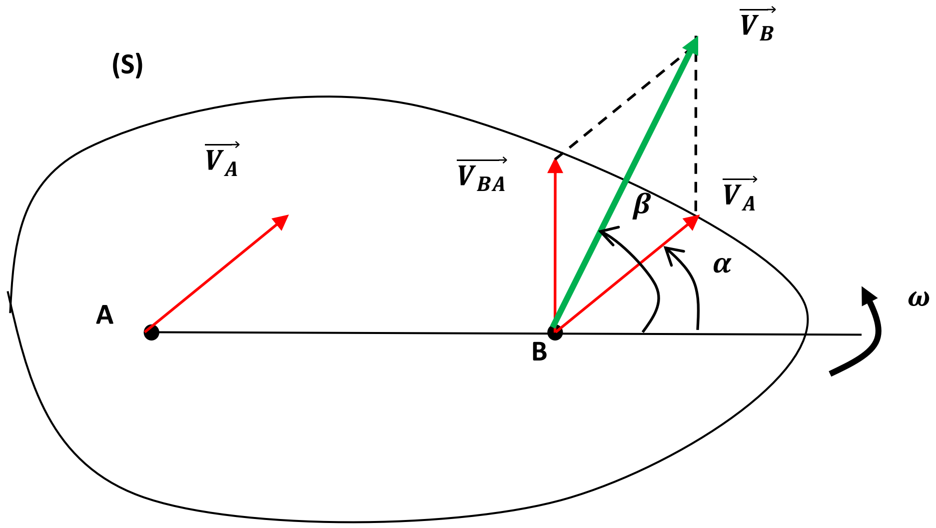
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{V_M} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{r_A}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{r'}}{dt} \text{ Avec } \overrightarrow{V_{MA}} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{V_{MA}}$ qui s'appelle **Relation d'Euler.**

Théorème : La vitesse de chaque point du corps est la somme géométrique de la vitesse d'un point A pris comme pole, et d la vitesse du point M tournant avec le corps autour du point A.

Théorème sur les projections des vitesses de deux ponts du corps : principe d'équiprojectivité.



$$\vec{V_B} = \vec{V_A} + \vec{V_{BA}}$$

$$\text{Projection}_{/AB}\vec{V_B} = \text{Projection}_{/AB}\,\vec{V_A} + \text{Projection}_{/AB}\,\vec{V_{BA}}$$

$$\Rightarrow\!\!> \vec{V_B}\cos\beta = \vec{V_A}\cos\alpha$$

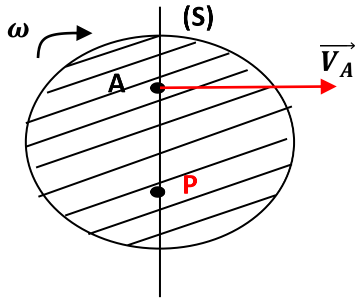
$$\mathbf{V_B\cos\beta = V_A\cos\alpha}$$

Théorème : Les projections des vitesses de deux points du corps solide sur la droite joignant ces points sont égales entre elles.

Détermination des vitesses des points au moyen du centre instantané des vitesses.

Définition : Le centre instantané des vitesses (C.I.V ou bien C.I.R) est un point de la section (s) en mouvement plan dont la vitesse à l'instant donné est égale à zéro.

Existence et unicité du C.I.V



Si p = C.I.V à l'instant t → $V_p = 0$

$\overrightarrow{V_p} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{V_{pA}} \Rightarrow 0 = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{V_{pA}} \Rightarrow \overrightarrow{V_A} = -\overrightarrow{V_{pA}}$

Donc : $\overrightarrow{V_{pA}} \perp \overrightarrow{V_{pA}}$,

$|\overrightarrow{V_{pA}}| = |\overrightarrow{V_A}| = \omega\ PA$

$$\Rightarrow PA = \frac{V_A}{\omega}\ ,\omega \neq 0$$

Supposons l'existence d'un deuxième point p' dont $\overrightarrow{V_{p'}} = 0$. On considère p comme pôle.

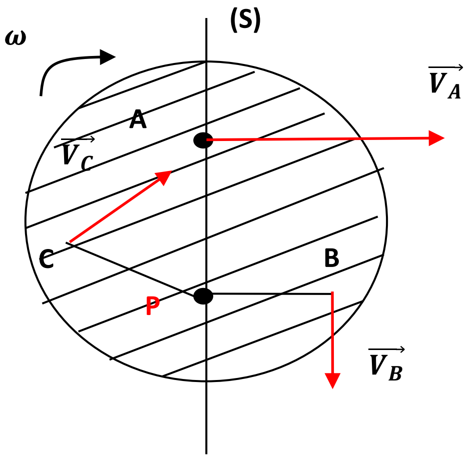
$$\overrightarrow{V_{p'}} = \overrightarrow{V_p} + \overrightarrow{V_{p'p}} \Rightarrow \overrightarrow{V_{p'}} = \overrightarrow{V_p} = 0$$

$\Rightarrow \overrightarrow{V_{p'p}} = 0 \Rightarrow$ ω pp'=0 donc pp'=0

$$\Rightarrow \textbf{p et p}' \textbf{ sont confondus.}$$

Théorème : A cours du mouvement plan d'une section (s), il existe à tout instant dans son plan un et seulement un point dont la vitesse est égale à zéro.

Prenons le point p comme pôle et considérons les vitesses des points A, B et C de la section (s) en appliquons la relation d'Euler.



$$\overrightarrow{V_p} = 0$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_P} + \overrightarrow{V_{AP}} \\ \overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_P} + \overrightarrow{V_{BP}} \\ \overrightarrow{V_C} = \overrightarrow{V_P} + \overrightarrow{V_{CP}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_{AP}} \\ \overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_{BP}} \\ \overrightarrow{V_C} = \overrightarrow{V_{CP}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{V_A} \perp AP \\ \overrightarrow{V_B} \perp BP \\ \overrightarrow{V_C} \perp CP \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A = \omega\ AP \\ V_B = \omega\ BP \\ V_C = \omega\ CP \end{cases}$$

On aura finalement :

$$\frac{\mathbf{V_A}}{\mathbf{AP}} = \frac{\mathbf{V_B}}{\mathbf{BP}} = \frac{\mathbf{V_C}}{\mathbf{CP}} = \boldsymbol{\omega}$$

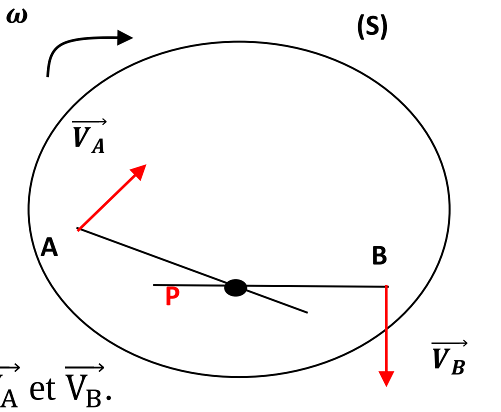
* L'existence du centre instantané permet de considérer à tout instant le mouvement plan de la section (s) comme une rotation autour de ce centre.

* Cette notion réduit donc le mouvement plan en une série de rotations successives autour des positions du centre instantané des vitesses.

* Les vitesses des points sont proportionnelles aux distances au centre instantané des vitesses.

<u>Différents cas de détermination du C.I.V</u>

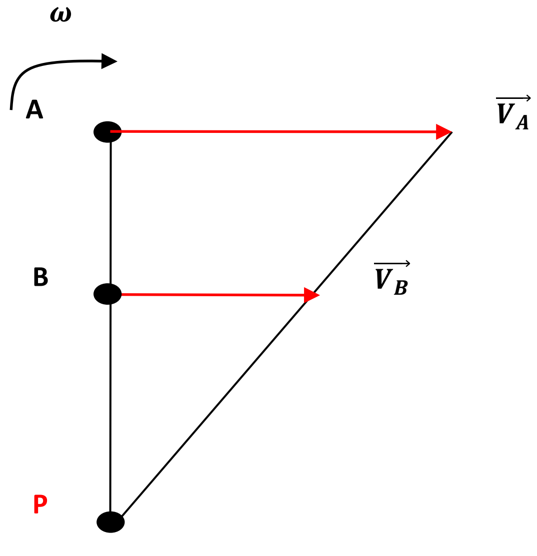
a) Si les directions des vitesses de deux points sont connues



$$\begin{cases} \overrightarrow{V_A} \perp AP \\ \overrightarrow{V_B} \perp BP \end{cases} \Rightarrow \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} \Rightarrow V_A = \frac{AP}{BP} V_B$$

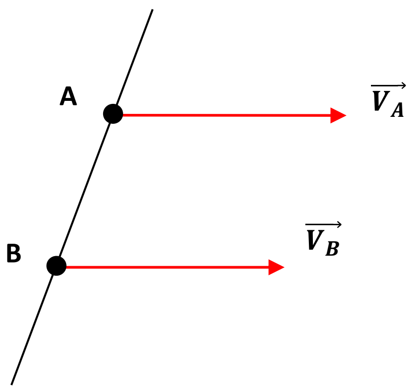
P est l'intersection des perpendiculaires aux vitesses $\overrightarrow{V_A}$ et $\overrightarrow{V_B}$.

b) $\overrightarrow{\mathbf{V_A}} // \overrightarrow{\mathbf{V_B}}$ et AB $\perp (\overrightarrow{\mathbf{V_A}}, \overrightarrow{\mathbf{V_B}})$



$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}$$

b) $\overrightarrow{\mathbf{V_A}} // \overrightarrow{\mathbf{V_B}}$ **et AB n'est pas** $\perp (\overrightarrow{\mathbf{V_A}}$ **ou** $\overrightarrow{\mathbf{V_B}})$



$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \omega = 0 \text{ , Ap et Bp} \rightarrow \infty$$

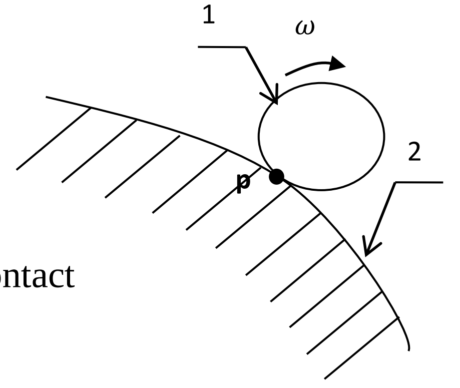
$$\overrightarrow{V_A} \cos\alpha = \overrightarrow{V_B} \cos\alpha \Rightarrow \overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_B}$$

Il découle que dans ce cas les vitesses de tous les points à l'instant donné sont égales entre elles et ont meme module et meme direction ($\omega = 0$).

Le corps possède une distribution instantanée des vitesses de translation, on parlera d'un mouvement de translation instantané.

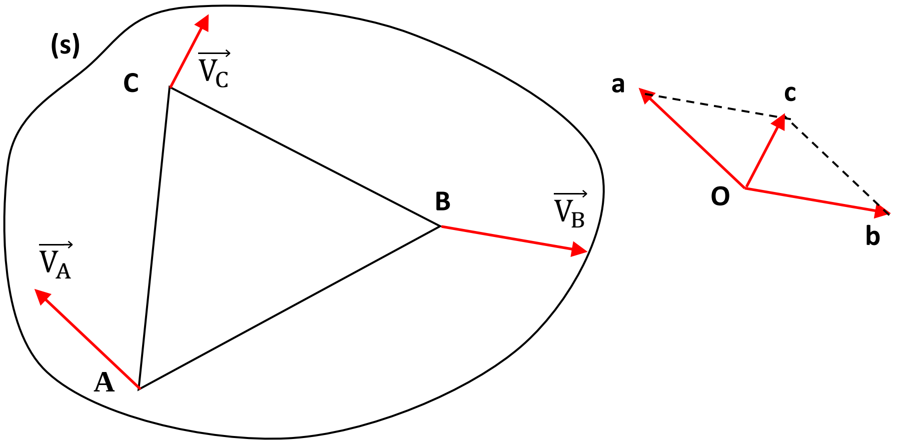
d) Cas de roulement

Si le mouvement plan est un roulement sans glissement d'un corps cylindrique sur la surface d'un autre corps immobile (2), alors le point de contact des deux corps est considéré comme le C.I.V



<u>Diagramme des vitesses.</u>

On obtient le diagramme des vitesses menant à partir des vecteurs équipollents aux vecteurs aux vecteurs vitesses du solide (s)



$$\begin{cases} \overrightarrow{oa} = \overrightarrow{V_A} \\ \overrightarrow{ob} = \overrightarrow{V_B} \\ \overrightarrow{oc} = \overrightarrow{V_B} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{V_{BA}}$$

$$\overrightarrow{ob} = \overrightarrow{oA} + \overrightarrow{V_{BA}} \Rightarrow \overrightarrow{ob} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ab}$$

De meme, on aura : $\begin{cases} \overrightarrow{V_{BA}} = \overrightarrow{ab} \\ \overrightarrow{V_{CA}} = \overrightarrow{ac} \\ \overrightarrow{V_{BC}} = \overrightarrow{bc} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{V_{BA}} \perp \overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{V_{CA}} \perp \overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{V_{BC}} \perp \overrightarrow{BC} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{BA} = \omega\, BA \\ V_{CA} = \omega\, CA \\ V_{BC} = \omega\, BC \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{ab} \perp \overline{AB} \\ \overline{ac} \perp \overline{AC} \\ \overline{bc} \perp \overline{BC} \end{cases} \text{ avec } \Rightarrow \begin{cases} ab = \omega\, BA \\ ac = \omega\, AC \\ bc = \omega\, BC \end{cases}$$

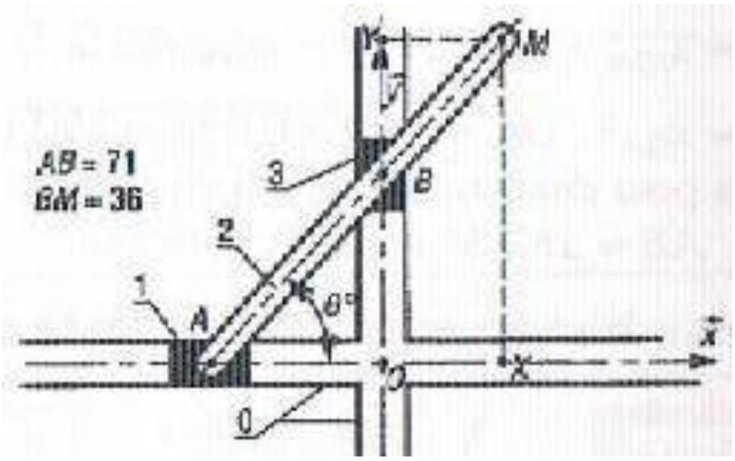
$$\Rightarrow \frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC} = \frac{bc}{BC}\ \omega$$

Par conséquent les segments qui relient les extrémités des vecteurs vitesses sur le diagramme des vitesses sont perpendiculaires et proportionnels aux segments qui relient les points correspondent au corps.

Les relations précédentes permettent de déterminer la vitesse de n'importe quel point du corps quand on connait le module et la direction de la vitesse d'un point quelconque, et la direction de la vitesse d'un autre point du corps.

Exercice N°1.

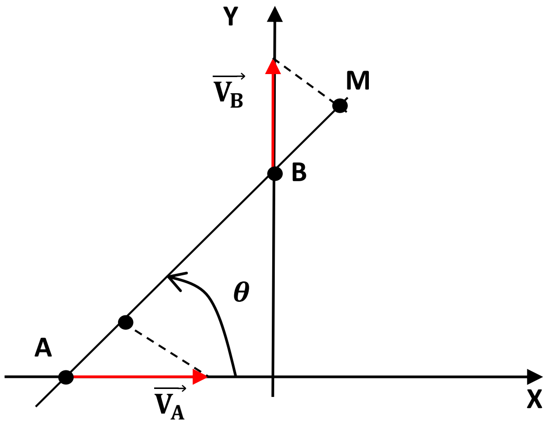
Les coulisseaux A et B auquels est fixés la regle de l'ellipsographe se déplace suivant deux glissières rectangulaires ou AB = l et AM = b.



Déterminer la trajectoire du point M et trouver la relation entre les vitesses des points A et B de la regle pour un angle θ donné.

Solution.

1- Trajectoire du point M.



$$\begin{cases} X_M = (b-l)\cos\ \theta \\ Y_M = b\ \sin\ \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{X_M}{b-l} = \cos\ \theta \\ \dfrac{Y_M}{l} = \sin\ \theta \end{matrix} \Rightarrow \frac{X^2{}_M}{(b-l)^2} + \frac{Y^2{}_M}{b^2} = 1$$

qui represente une équation d'une ellipse. M decrit une ellipse.

2-D'après le théorème des projections des vitesses sur la droite reliant les deux points, on a :

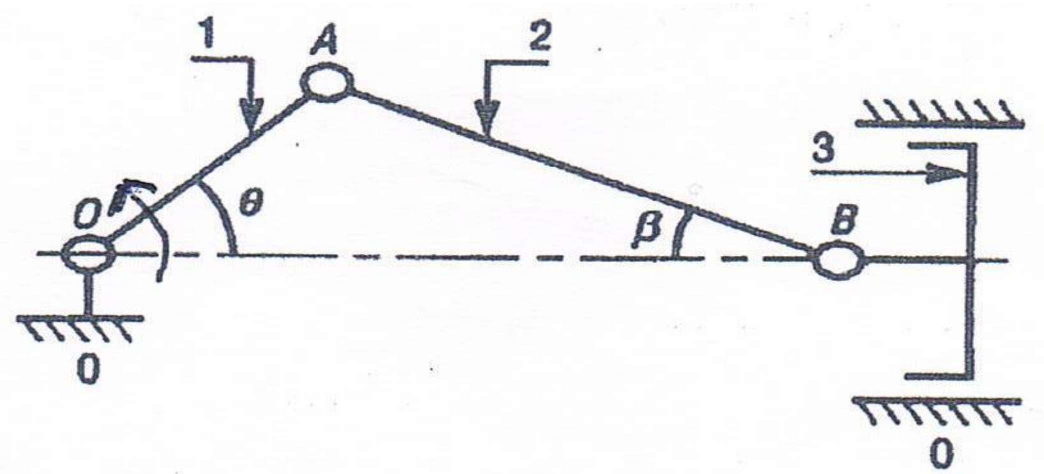
$$\text{Projection}_{/AB}\overrightarrow{V_A} = \text{Projection}_{/AB}\,\overrightarrow{V_B}$$

$$\Rightarrow V_A\ \cos\theta = V_B\ \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) \Rightarrow V_A\ \cos\theta = V_B\ \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \mathbf{V_A = V_B\, tg\,\theta}$$

Exercice N°2.

Dans le mécanisme bielle-manivelle OA de longueur r avec une vitesse angulaire constante ω_{OA}. La longueur de la bielle est AB = l.



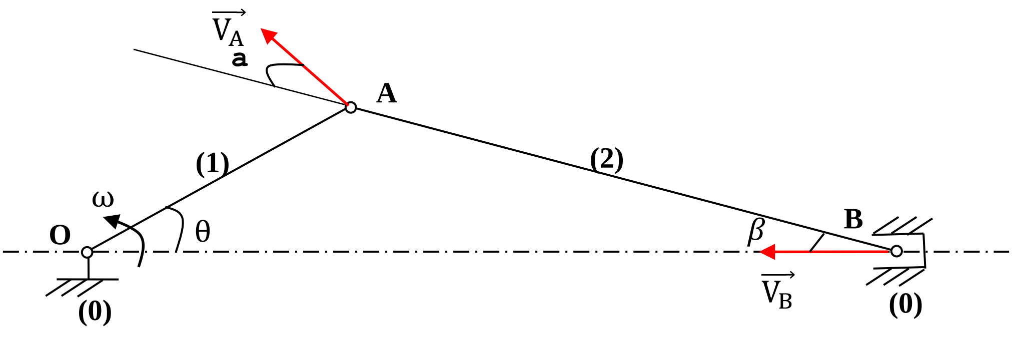
1-Déterminer la vitesse du point B pour un angle donné θ.

2- Examiner les positions du mécanisme quand $\theta = 0$ et quand $\theta = \frac{\pi}{2}$

3- Calculer la vitesse angulaire ω_{AB} à l'instant ou OA est perpendiculaire à AB.

Solution.

1-



$$V_A \cos\alpha = V_B \cos\beta \;\; \text{avec } \alpha = \frac{\pi}{2} - (\theta + \beta)$$

$$V_A \sin(\theta+\beta) = V_B \cos\beta \;\; \text{avec } V_A = \omega_{OA}.OA \;\; \Rightarrow \;\; V_A [\sin\theta\cos\beta + \sin\beta\cos\theta$$

$$= V_B \cos\beta$$

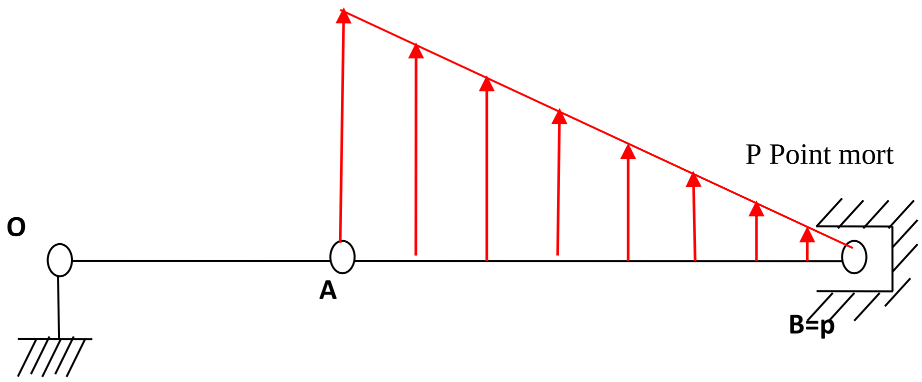
$$V_A [\sin\theta + \operatorname{tg}\beta\cos\theta \;\; = V_B \text{ avec } \frac{\sin\beta}{r} = \frac{\sin\theta}{l} \Rightarrow \sin\beta = \frac{r}{l}\sin\theta$$

$$\cos\beta = \sqrt{1 + \frac{r^2}{l^2}\sin^2\theta} \;\; \text{et} \;\; \operatorname{tg}\beta = \frac{r\sin\theta}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\theta}}$$

$$\text{Donc : } V_A = \left(\sin\theta + \frac{r\sin\theta}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\theta}}\cos\theta\right) = V_B$$

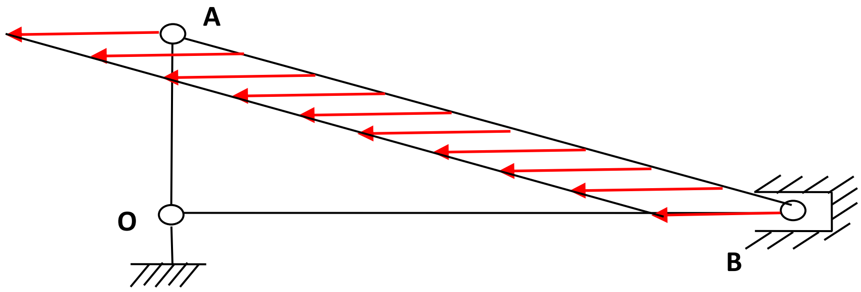
$$\Rightarrow V_A = \boldsymbol{r}\omega_{OA}\sin\theta\left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{r}\cos\theta}{\sqrt{\boldsymbol{l}^2 - \boldsymbol{r}^2\sin^2\theta}}\right)$$

1- **Cas ou** $\theta = \mathbf{0}$.



$$\Theta = 0 \;\rightarrow V_B = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \omega_{AB} = \frac{V_A}{PA} = \frac{r\;\omega_{OA}}{l}$$

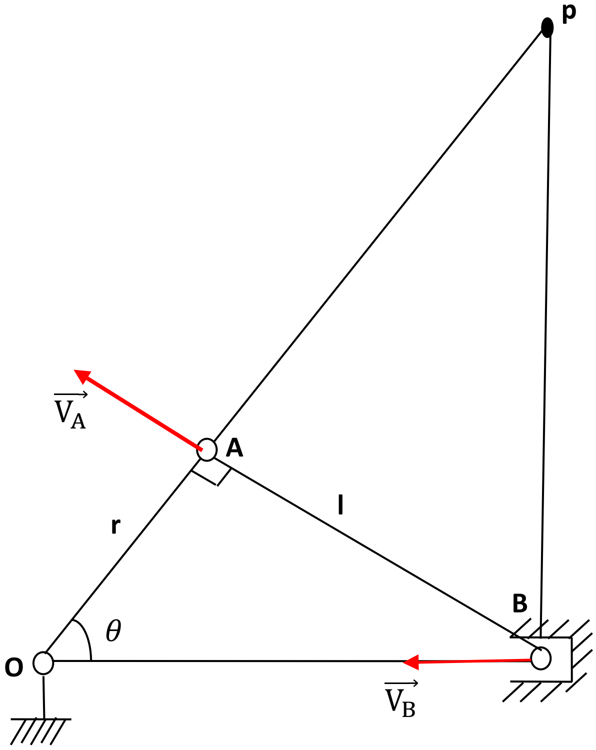
$2 - $ Cas ou $\theta = \frac{\pi}{2}$.



$$\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_B}$$

C'est une translation instantanée $\omega_{AB} = 0$

3- la vitesse angulaire ω_{AB} à l'instant ou OA est perpendiculaire à AB.



$$\Omega_{AB} = \frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB}$$

$$V_A = \omega_{OA}\, r \text{ et } \begin{cases} OB = \sqrt{r^2 + l^2} \\ PB = OB \text{ tg } \theta \end{cases}$$

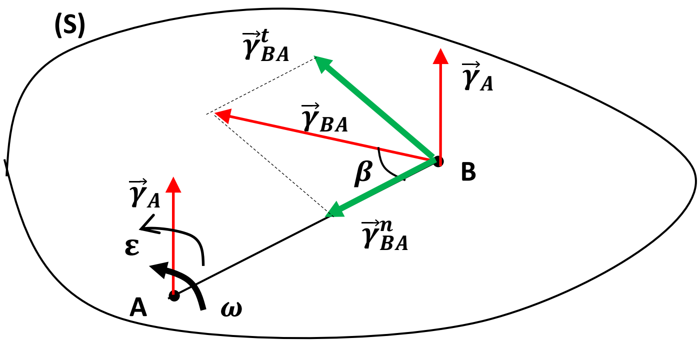
Donc :

$$PA^2 + l^2 = \frac{l^2}{r^2}(r^2 + l^2) \Longrightarrow PA = \frac{l^2}{r}$$

On aura finalement :

$$\omega_{AB} = \frac{r\, \omega_{OA}}{\frac{l^2}{r}} = \omega_{OA} \frac{r^2}{l^2}$$

Détermination des accélérations des points.



Soit un solide (s)

$$\overrightarrow{V_{BA}} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{BA}$$

$$\frac{d\overrightarrow{V_B}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{V_A}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{V_{BA}}}{dt} \Longrightarrow$$

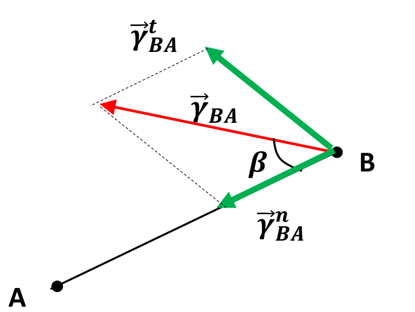
$$\overrightarrow{\gamma_B} = \overrightarrow{\gamma_A} + \frac{d(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{BA})}{dt} = \overrightarrow{\gamma_A} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{BA}\right) + \left(\vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{BA}}{dt}\right)$$

$$= \overrightarrow{\gamma_A} + (\vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{\gamma_A} + \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{V_{BA}}\right) = \overrightarrow{\gamma_A} + \overrightarrow{\gamma_{BA}^t} + \overrightarrow{\gamma_{BA}^n}$$

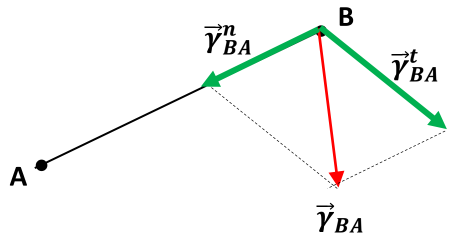
$$\Rightarrow \overrightarrow{\gamma_B} = \overrightarrow{\gamma_A} + \overrightarrow{\gamma_{BA}}$$

L'accélération d'un point d'un corps en mouvement plan est la somme géométrique de l'accélération de translation d'un point pris comme pôle et de l'accélération de rotation autour du pôle.

<u>Dans le cas d'un mouvement accéléré</u> <u>Dans le cas d'un mouvement décéléré.</u>



$$\text{tg}\,\beta = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$



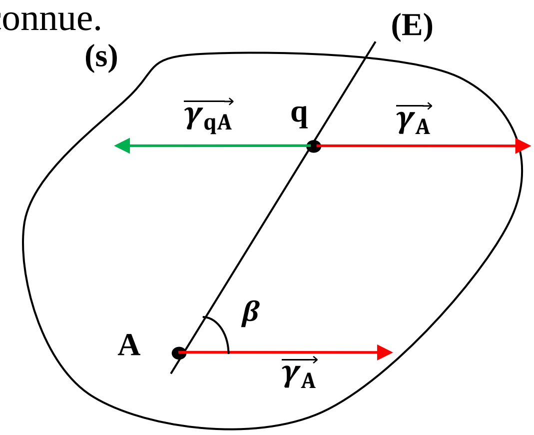
$$\gamma_{BA} = BA.\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}$$

Si le point A ne décrit pas un mouvement rectiligne, la formule d'Euler s'écrit :

$$\overrightarrow{\gamma_B} = \overrightarrow{\gamma_A^t} + \overrightarrow{\gamma_A^n} + \overrightarrow{\gamma_{BA}^t} + \overrightarrow{\gamma_{BA}^n}$$

<u>Centre instantané des accélérations.</u>

$\overrightarrow{\gamma_A}$ est l'accélération d'un point de (s) connue.



$$\text{Tg}\,\beta = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \qquad (1)$$

Définition : Si un corps solide est animé dans sa section (s) d'un mouvement autre qu'une translation alors il existe à chaque instant un point q dont l'accélération est nulle. On appelle ce point centre instantané des accélérations.

$$\overrightarrow{\gamma_q} = \overrightarrow{\gamma_A} + \overrightarrow{\gamma_{qA}}$$

q est centre instantané des accélérations (C.I.A) donc : $\overrightarrow{\gamma_q} = 0$

$\overrightarrow{\gamma_A} = -\overrightarrow{\gamma_{qA}}$ avec $\overrightarrow{\gamma_{qA}} = \mathrm{qA}.\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{qA} = \frac{\gamma_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

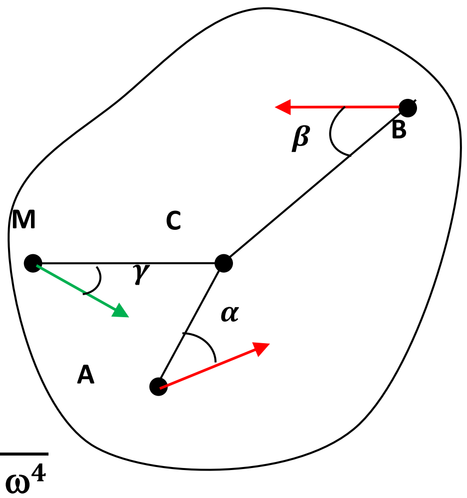
Si on connait l'accélération $\overrightarrow{\gamma_A}$ d'un point A d'un corps et si on connait les grandeurs ω et ε, la position du centre q est déterminé de la façon suivante :

1- On calcul la valeur de l'angle β d'après la formule (1).

2- On mène par le point A l'angle β par rapport au vecteur $\overrightarrow{\gamma_A}$ la droite AE.

3- On porte sur la droite AE le segment qA

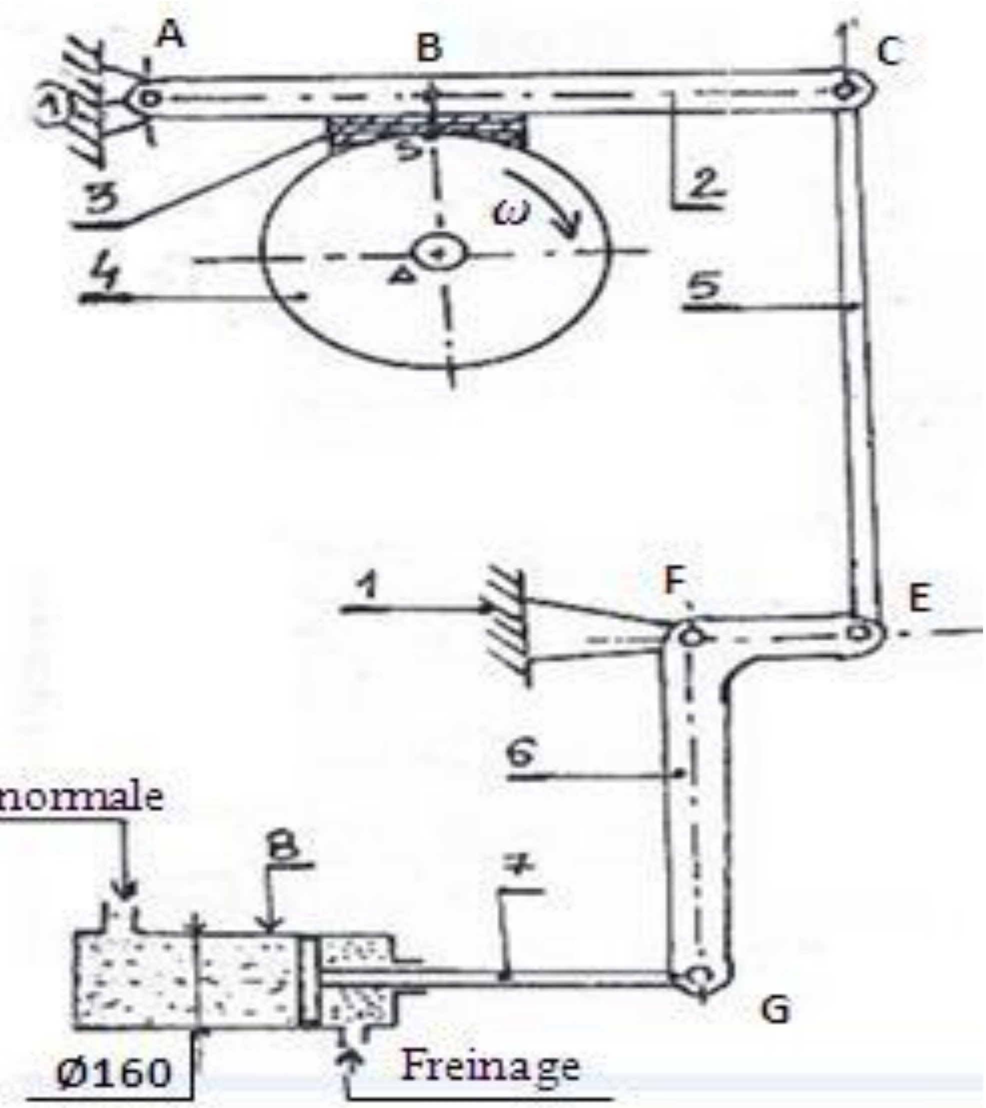
$$\begin{cases} \overrightarrow{\gamma_M} = \overrightarrow{\gamma_q} + \overrightarrow{\gamma_{Mq}} \\ \overrightarrow{\gamma_A} = \overrightarrow{\gamma_q} + \overrightarrow{\gamma_{Aq}} \\ \overrightarrow{\gamma_B} = \overrightarrow{\gamma_q} + \overrightarrow{\gamma_{Bq}} \end{cases} \quad \text{avec } \overrightarrow{\gamma_q} = O \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\gamma_M} = \overrightarrow{\gamma_{Mq}} \\ \overrightarrow{\gamma_A} = \overrightarrow{\gamma_{Aq}} \\ \overrightarrow{\gamma_B} = \overrightarrow{\gamma_{Bq}} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \gamma_M = \mathrm{Mq}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \\ \gamma_A = \mathrm{Aq}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \\ \gamma_B = \mathrm{Bq}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \end{cases}$$

$$\frac{\gamma_A}{Aq} = \frac{\gamma_B}{Bq} = \frac{\gamma_M}{Mq} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Exercice 3.



$|\overrightarrow{V_{7/8}}| = 40$ mmm/s

La machine est un mécanisme pour freiner le mouvement de rotation de la bobine 4 en exerçant une pression par l'intermédiaire d'un vérin (7-8) jusqu'à ce que l'effet atteigne la semelle (3), qui appuie sur la bobine.

1- Quelle est la nature des mouvements 7/8, 6/1,5/1 et 2/1.

2- Dessiner la vitesse $\overrightarrow{V_{7/8}}$ et en déduire les vitesses $\overrightarrow{V_{G\,6/1}}$, $\overrightarrow{V_{B\,2/1}}$ et $\overrightarrow{V_{C\,2/1}}$

Solution.

1- Nature des mouvements

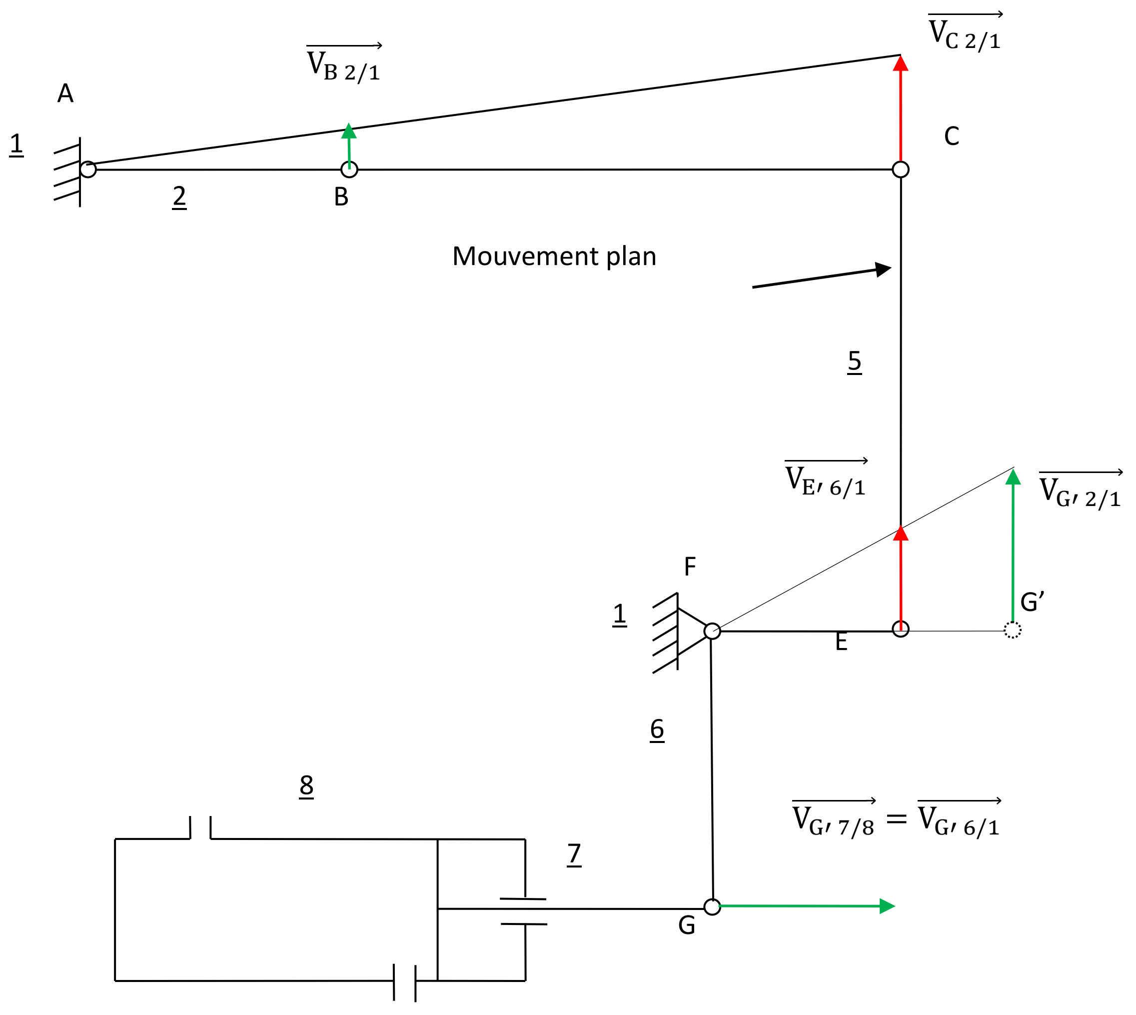
7/8 : Mouvement de translation rectiligne

6/1 : Mouvement de rotation autour de F

5/1 : Mouvement plan

2/1 : Mouvement de rotation autour de A.

2- Détermination des différentes vitesses.



a- Le mouvement de 6/1 est un mouvement de rotation autour de F, donc $\overrightarrow{V_{G\,6/1}}$ est perpendiculaire à GF (trajectoire circulaire) et $\overrightarrow{V_{G\,6/1}} = \overrightarrow{V_{G\,7/8}}$ puisque G est un point commun.

b- $\overrightarrow{V_{E\,6/1}}$ perpendiculaire à EF. Obtenue par utilisation du champ de vitesses par rapport au centre de rotation F.

c- $\overrightarrow{V_{C\,2/1}}$ perpendiculaire à AC. Par équiprojectivité on peut déterminer cette vitesse. $\overrightarrow{V_{C\,2/1}} = \overrightarrow{V_{C\,5/1}}$

d- $\overrightarrow{V_{B\,2/1}}$ est perpendiculaire à AB. On utilise le champ de vitesses par rapport à A, la vitesse est déterminée.

Notion de liaison.

Nombre de degrés de liberté d'un mouvement.

On appelle nombre de degrés de liberté du mouvement d'un point matériel, d'un solide, ou d'un système de solides, le nombre de paramètres indépendants servant à fixer la position du point, du solide ou du système dans son mouvement par rapport à un repère de référence.

C'est ainsi que dans le cas d'un point matériel libre, le nombre de degrés de liberté est égal à trois puisque la position du point par rapport au repère de référence est définie par ses trois coordonnées (cartésiennes, sphériques, cylindriques ou autres).

De la même manière, dans le cas d'un solide libre, le nombre de degrés de liberté du mouvement est égal à six, puisque la position du solide par rapport au repère de référence est déterminée, par exemple, par trois coordonnées **(a,β, γ)** cartésiennes définissant un point du solide(par exemple, le centre de gravité G) et par trois angles d'Euler (ψ,θ,φ) définissant le mouvement autour de G(si G est choisi). En effet la connaissance de $(\alpha,\beta,\gamma,\varphi,\theta,\psi)$ définit parfaitement la position d'un point quelconque du solide.

D'une manière générale, si la position d'un point, d'un solide ou d'un système de solides est définie par p paramètres liés par q équations, alors le nombre de degrés de liberté du mouvement est égal à (p-q). C'est ainsi par exemple, que le nombre de degrés de liberté du mouvement d'un point matériel mobile sur une surface dont les équations paramétriques sont :

$$x = f(u, v), y = f(u, v), z = f(u, v)$$

Et l'équation cartésienne est :

$$F(x, y, z) = 0$$

Est égal à deux puisque la position du point est déterminée par deux paramètres indépendants u et v ou bien par trois paramètres x,y,z, liés par l'équation cartésienne de la surface.

Types de liaisons : liaisons holonomes et liaisons non holonomes.

Une liaison est dite holonome si elle se traduit par une ou plusieurs relations entre les paramètres qui définissent la position du point, du solide ou du système étudié.

Une liaison est dite non-holonome si elle se traduit par une relation entre les dérivées des paramètres et si cette relation ne peut être intégrée en une relation entre les paramètres.

Signalons qu'une liaison holonome est dépendante du temps si les coordonnées absolues du point (ou des points du solide ou du système) soumis à cette liaison renferment explicitement le temps. Dans le cas contraire, la liaison est dite indépendante du temps.

Exemple.

Un point matériel P est mobile dans un plan vertical, lequel est animé d'une rotation autour de l'une de ses droites, D, verticale et supposée fixe. Si (O,x,y,z) est un repère orthonormé dont l'axe Oz est porté par D, si (O,xyz) est un repère lié au plan mobile tel que (α,O,β) soient les coordonnées relatives de P, alors les coordonnées absolues de P sont :

$$(\alpha \cos\psi, \alpha \sin\psi, \beta)$$

Où :

$$\psi = O\overrightarrow{x_1}, O\overrightarrow{x}$$

Si le mouvement du plan mobile est imposé, c'est-à-dire connu, par exemple si sa rotation aotour de D est uniforme, alors : $\psi = \psi'_\alpha + \psi_\beta$ et les coordonnées absolues de P renferment explicitement le temps ; la liaison (de P au plan mobile) sera dite « dépendante du temps ». Si le mouvement de rotation du plan mobile n'est pas connu en fonction du temps, alors les coordonnées absolues de P ne renferment pas explicitement le temps ; la liaison considérée sera dite « indépendante du temps ».

Solides en contact ponctuel (Glissement).

Soient deux solides (S_1) et (S_2) en contact ponctuel, à un instant t, au point M. Si les solides restent en contact ponctuel pendant un intervalle de temps donné, le point M a, pendant cet intervalle, une trajectoire $C^{(1)}$(M) tracée sur la surface (S_1) limitant le solide (S_1) et une trajectoire $C^{(2)}$(M) tracée sur la surface (S_2) limitant le solide (S_2).

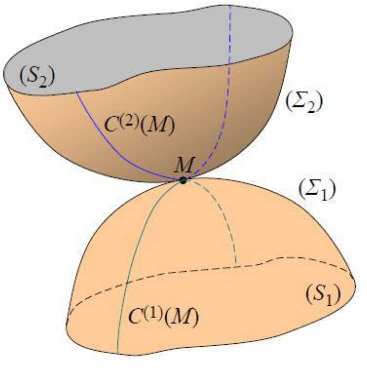


Figure. Solides en contact ponctuel.

Le mouvement du solide (S_2) par rapport au solide (S_1) est caractérisé par le torseur cinématique de résultante le vecteur rotation instantané du mouvement. Le point M étant mobile par rapport aux solides (S_1) et (S_2).

Pivotement et roulement.

Lorsque les deux solides (S_1) et (S_2) sont tangents au point Mil est usuel de décomposer le vecteur rotation en la somme de deux vecteurs rotation.

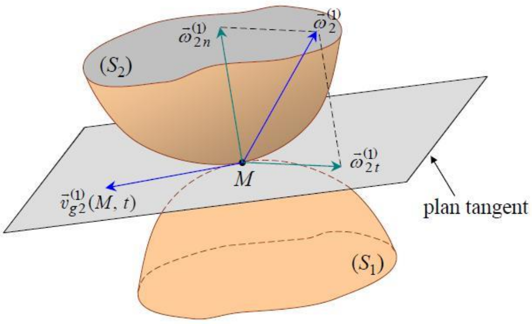


Figure. Glissement, roulement et pivotement

Solides en contact en plusieurs points.

Les considérations précédentes peuvent être reprises en chaque point de contact, dans le cas où deux solides sont en contact en plusieurs points. En particulier :

- Si deux solides (S_1) et (S_2) sont en contact en deux points et si le vecteur vitesse de glissement est nul en ces deux points. Dans ce cas le vecteur rotation est considéré comme vecteur directeur de la droite passant par ces deux points.

- Si deux solides (S_1) et (S_2) sont en contact en plus de deux points et si le glissement est nul en tous ces points, ils sont nécessairement alignés.

Transmission d'un mouvement de rotation par friction.

Dans le cas de la transmission des mouvements de rotation par friction, la transmission se fait par contact direct entre les deux solides (S_1) et (S_2), sans qu'il y ait glissement aux points de contact.

Roues cylindriques.

Dans le cas de roues cylindriques, les axes sont parallèles et les surfaces de contact sont des cylindres de révolution. Les axes étant parallèles.

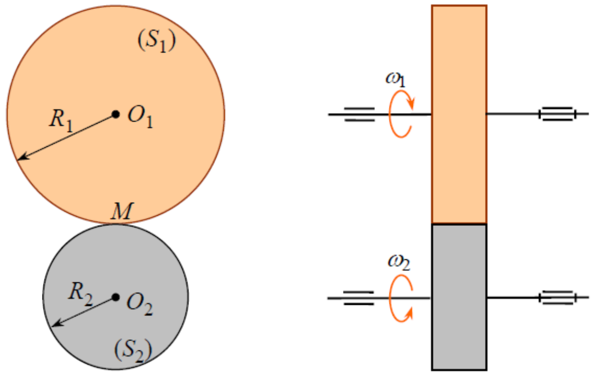


Figure. Transmission par roues cylindriques.

Roues coniques.

Dans le cas de roues coniques, les axes sont concourants au point O et les surfaces de contact sont des cones de révolution.

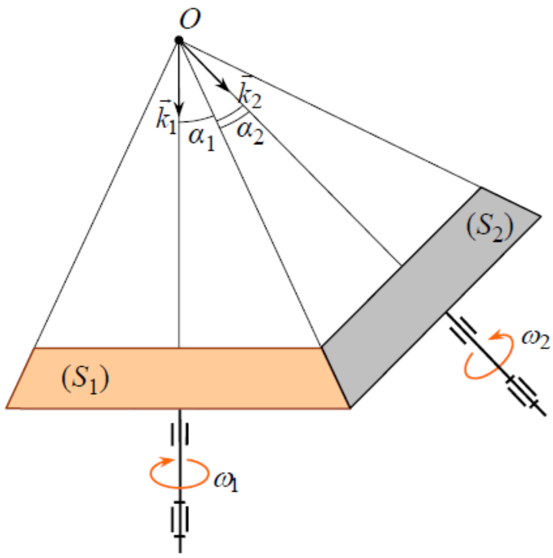


Figure. Transmission par roues coniques.

Géométrie des masses.

Masse.

En mécanique classique la masse est une grandeur :

- Positive m > 0

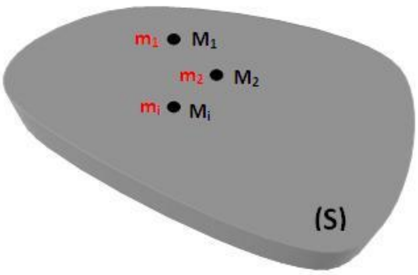
- Additive = $m_s = \sum m_i$

- invariante c'est à dire même valeur dans tous les référentiels.

Un point matériel géométrique affecté d'une masse m.

Système discret.

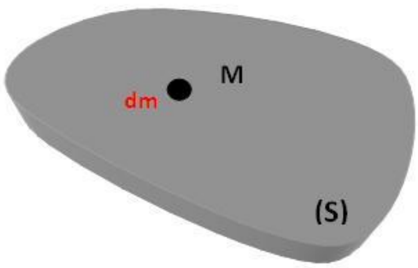
Un système (S) est dit discret (discontinu) si la distance entre les points constituants ce système est considérable. La masse totale du système est :



$$m_s = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Système continu.

Un système (S) formé de N points infini est dit continu si la distance entre les points tend vers zéro. La masse totale du système est:



$$m_s = \int_S dm$$

dm : masse élémentaire entourant le point M.

Distribution volumique de masse.

$$\rho = \frac{dm}{dV}\ \left[\frac{Kg}{m^3}\right]$$

ρ : densité volumique de masse

$$dm = \rho dV\ \rightarrow\ m_S = \iiint_V \rho dV$$

avec m_S : masse totale.

Si le système est homogène donc ρ est une constante :

$$m_S = \rho V$$

Distribution surfacique de masse.

$$\sigma = \frac{dm}{dS}\ \left[\frac{Kg}{m^2}\right]$$

σ : densité surfacique de masse

$$dm = \sigma dS\ \rightarrow\ m_S = \iint_S \sigma dS$$

avec m_S : masse totale.

Si le système est homogène donc σ est une constante :

$$m_S = \sigma S$$

Distribution linéique de masse.

$$\lambda = \frac{dm}{dl}\ \left[\frac{Kg}{m}\right]$$

λ : densité linéique de masse

$$dm = \lambda dl \ \rightarrow \ m_S = \int_L \lambda dl$$

avec m_S : masse totale.

Si le système est homogène donc λ est une constante :

$$m_S = \lambda L$$

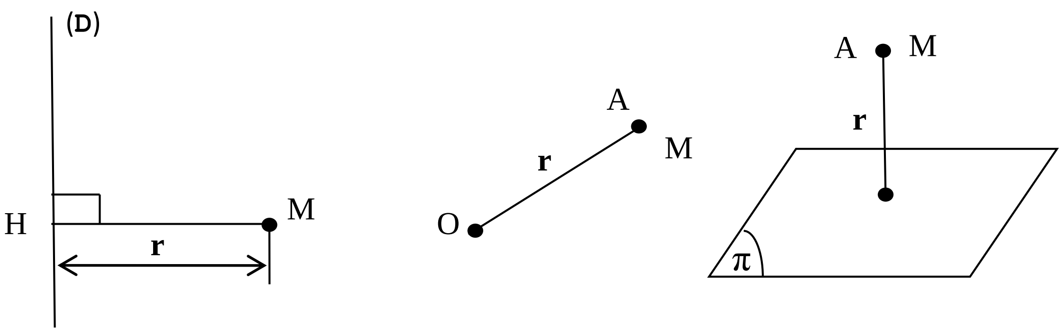
Remarque : Si le système est composé alors :

$$m_S = \int_L \lambda dl + \iint_S \sigma dS + \iiint_V \rho dV$$

Moment d'inertie.

Définition : On appelle moment d'inertie du point matériel M situé par rapport à (D) ou a un plan (π) ou bien à un point, la quantité :

$$\mathrm{I}_\Delta = \mathrm{r}^2 \mathrm{m}$$



Soit (s) un système de n points matériels $m_1, m_2, \ldots m_n$, alors le moment d'inertie du système (s) par rapport à (D) est par définition :

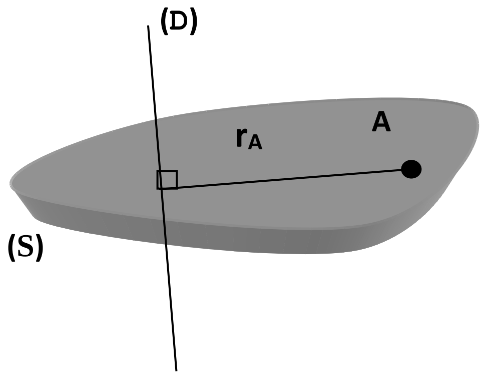
$$I_\Delta = r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2 + \cdots + r_n^2 m_n +$$

$$\mathbf{I_\Delta = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i}$$

r_i c'est la distance de m_i à (D). De même pour le plan et le point.

Dans le cas d'un solide de masse totale répartie de façon continue, on aura :

$$\mathbf{I_\Delta = \int_{(s)} r_a^2\, dm}$$



$\boldsymbol{r_a}$ représente la distance dm situé au point A par rapport à (D), P et (O)

Soit $\rho(x, y, z)$ masse volumique de (s).

$$I_\Delta = \int_{(V)} \rho(x, y, z) r_a^2\, dV$$

Si le solide est homogène, c'est-à-dire que $\rho(x, y, z)$ est une constante, alors :

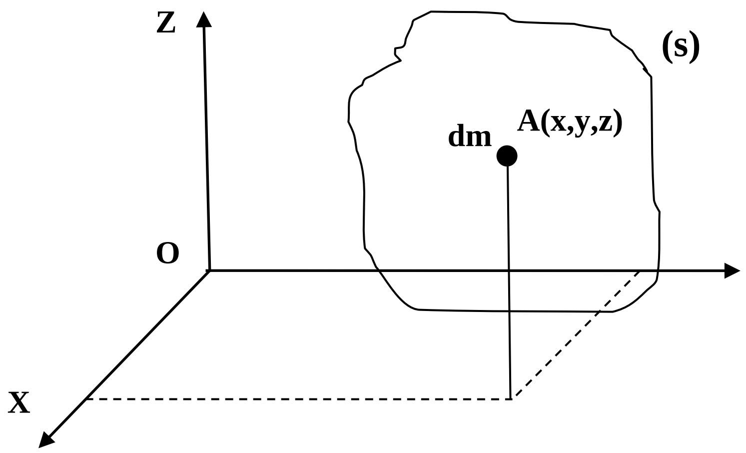
$$I_\Delta = \int_{(V)} \rho r_a^2\, dV = \rho \int_{(V)} r_a^2\, dV$$

Dans le cas général :

$$I_\Delta = M\, R_O^2 \Rightarrow R_O = \sqrt{\frac{I_\Delta}{M}}$$

Où : M représente la masse de (s) R_O le rayon de giration du solide.

Calcul des moments d'inertie.



$$I_{xx} = \int_{(s)} (y^2 + z^2)\mathrm{dm} = \int_{(s)} (y^2 + z^2)\ \rho(x,y,z)dV$$

$$I_{yy} = \int_{(s)} (z^2 + x^2)\mathrm{dm} = \int_{(s)} (x^2 + z^2)\ \rho(x,y,z)dV$$

$$I_{zz} = \int_{(s)} (y^2 + x^2)\mathrm{dm} = \int_{(s)} (y^2 + x^2)\ \rho(x,y,z)dV$$

$$I_{xoy} = \int_{(s)} z^2\,\mathrm{dm} = \int_{(s)} z^2\ \rho(x,y,z)dV$$

$$I_{yoz} = \int_{(s)} x^2\,\mathrm{dm} = \int_{(s)} x^2\ \rho(x,y,z)dV$$

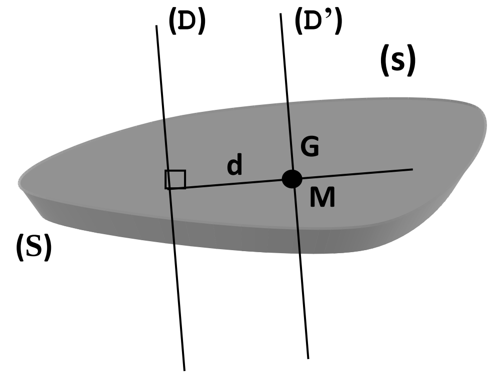
$$I_{zox} = \int_{(s)} y^2\,\mathrm{dm} = \int_{(s)} y^2\ \rho(x,y,z)dV$$

$$I_o = \int_{(s)} oA^2\,\mathrm{dm} = \int_{(s)} (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{dm} = 1/2(I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})$$

D'où : $\mathbf{I_o = I_{xoy} + I_{yoz} + I_{zox}}$

Théorème de Hyghens : Le moment d'inertie d'un solide (s) par rapport à (D) est égale au moment d'inertie par rapport à un axe Δ_G // à (D) passant par G augmenté du moment d'inertie de la masse totale M supposée concentrée en G.

$$I_\Delta = I_{\Delta G} + Md^2$$



Produit d'inertie.

Les produits d'inertie sont calculés par les intégrales suivantes :

$$I_{xy} = \int_{(s)} xy\,dm,\;\; I_{xy} = \int_{(s)} xy\,dm,\;\; I_{zx} = \int_{(s)} zx\,dm$$

$$I_{xy} = I_{yx},\; I_{yz} = I_{zy},\;\; I_{zx} = \;\; I_{xz}$$

$$I_{yz} = \int_{(s)} yz\,dm$$

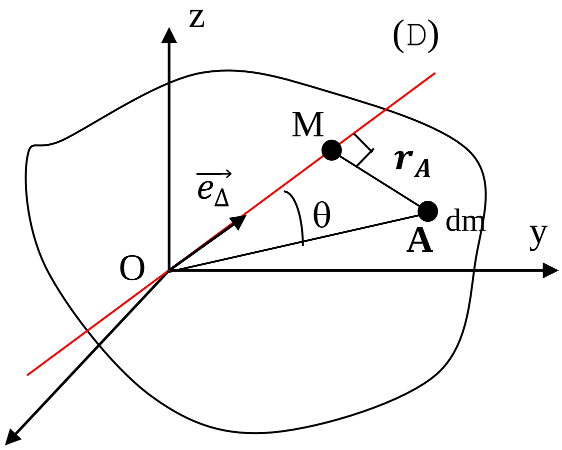
Matrice d'inertie.

Définition : Axe (D) passanr par O et orienté par $\overrightarrow{e_{(\Delta)}}$

$$I_\Delta = \int_{(s)} {r_A}^2\,dm \qquad (1)$$

$$r_A = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| \sin\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{e_{(\Delta)}}\right) = \left|\overrightarrow{e_{(\Delta)}} \wedge \overrightarrow{OA}\right|$$

$$\overrightarrow{e_{(\Delta)}} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \gamma\vec{k}$$



$$r_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\beta z - \gamma y)\vec{i} + (\gamma x - \alpha z)\vec{i} + (\alpha y - \beta x)\vec{k}$$

$$r_A{}^2 = (\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$$

$$r_A{}^2 = \alpha^2(y^2 + z^2)\ \beta^2(x^2 + z^2)\ + \gamma^2(x^2 + y^2) - 2xy\alpha\beta - 2xz\alpha\gamma - 2yz\beta\gamma$$

$$I_\Delta = \alpha^2 \int_{(V)} (y^2 + z^2)dm + \beta^2 \int_{(V)} (x^2 + z^2)dm + \gamma^2 \int_{(V)} (x^2 + y^2)dm$$
$$- 2\alpha\beta \int xy\, dm - 2\alpha\gamma \int xz\, dm - 2\beta\gamma \int yz\, dm$$

$$I_\Delta = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 - 2I_{xy}\alpha\beta - 2I_{yz}\beta\gamma - 2I_{zx}\alpha\gamma \qquad (2)$$

$$\mathcal{J}_O = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

matrice d'inertie de (s) en O relative au repère (Oxyz).

$$e_{(\Delta)} = (\alpha, \beta, \gamma) \Rightarrow e_{(\Delta)}{}^T = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J}_O \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = e_{(\Delta)}\, \mathcal{J}_O\, e_{(\Delta)}{}^{T} \qquad (4)$$

Les expressions (2) et (4) sont déterminées par le moment d'inertie de (s) par rapport à (Δ) orienté par $\overrightarrow{e_{(\Delta)}}$ et passant par O si on connait la matrice d'inertie $\mathcal{J}_O$.

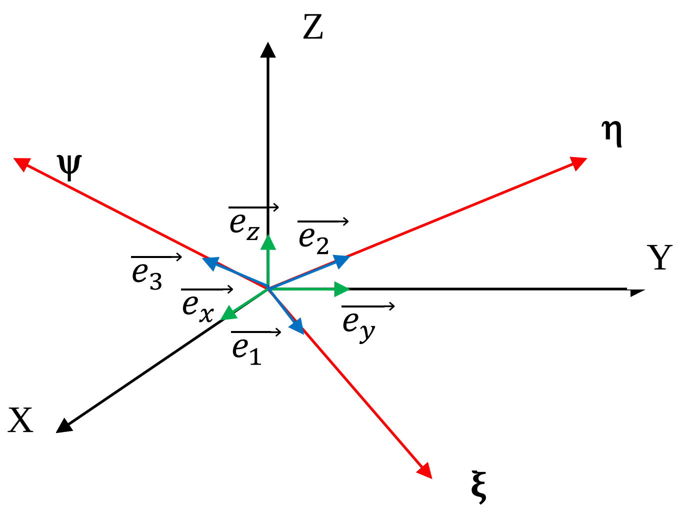
Axes principaux d'inertie.

La matrice $\mathcal{J}_O$ est symétrique et réelle, alors on peut la considérer comme matrice d'une transformation linéaire symétrique et réelle dans la base$(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Dans l'algèbre linéaire cette transformation admet trois valeurs propres $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^+$ et trois vecteurs propres correspondants $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, donc :

$$\begin{cases} \mathcal{J}_O \overrightarrow{e_1} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} \\ \mathcal{J}_O \overrightarrow{e_2} = \lambda_1 \overrightarrow{e_2} \\ \mathcal{J}_O \overrightarrow{e_3} = \lambda_1 \overrightarrow{e_3} \end{cases}$$

Delta chronecker $\Rightarrow\!\!> (\overrightarrow{e_\imath} . \overrightarrow{e_\imath}) = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$$\mathcal{J}_O^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{I_{\psi\psi} = \boldsymbol{\lambda_1}; I_{\eta\eta} = \boldsymbol{\lambda_2}; I_{\xi\xi} = \boldsymbol{\lambda_3}}$$ **; Oξ , Oη, Oψ sont les axes principaux.**

$$\begin{cases} I_1 = I_{\psi\psi} = \lambda_1 \\ I_2 = I_{\eta\eta} = \lambda_2 \\ I_3 = I_{\xi\xi} = \lambda_3 \end{cases}$$ sont les moments principaux d'inertie.

Alors : $$I_{\Delta}^{R\prime} = \mathbf{I_1}\alpha^2 + \mathbf{I_2}\beta^2 + \mathbf{I_3}\gamma^2$$

Eléments cinétiques des solides.

Soit R (Oxyz) un repère Galiléen fixe. La quantité de mouvement de (s) est déterminée par l'expression suivante :

$$\overrightarrow{Q^R} = \int_{(s)} \overrightarrow{V_A^R}\ \mathrm{dm}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\int \overrightarrow{OA}\ \mathrm{dm}}{M}$$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{V_G^R} = \frac{\int \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\ \mathrm{dm}}{M} = \frac{\int \overrightarrow{V_A^R}\ \mathrm{dm}}{M} \Rightarrow \overrightarrow{Q^R} = \mathrm{M}\,.\overrightarrow{V_G^R}$$

Pour le moment cinétique du solide (s) par rapport à O dans le repère R :

$$\overrightarrow{L_O^R} = \int_{(s)} \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{V_A^R}\mathrm{dm}$$

De même pour l'énergie cinétique :

$$E_c = 1/2 \int (\overrightarrow{V_A^R})^2 \mathrm{dm}$$

Solide animé d'une translation.

Pour tout point A de (s), on a : $\overrightarrow{V_A^R} = \overrightarrow{V_G^R}$

$$\overrightarrow{L_O^R} = \int_{(s)} (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{V_G^R})\mathrm{dm} = (\int_{(s)} \overrightarrow{OA}\ \mathrm{dm}) \wedge \overrightarrow{V_G^R} = M\,\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{V_G^R} = \overrightarrow{OG} \wedge M\overrightarrow{V_G^R}$$

$$= \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{Q^R}$$

$$E_c = 1/2 \int \overrightarrow{(V_A^R)}^2 \mathrm{dm} = \frac{1}{2}\overrightarrow{(V_G^R)}^2 \int \mathrm{dm} = \frac{1}{2}\mathrm{M}\,\overrightarrow{(V_G^R)}^2$$

Solide animé d'une rotation autour d'un axe fixe.

$$\overrightarrow{\mathrm{V_A^R}} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{L_O^R}} = \int_{(s)} (\overrightarrow{\mathrm{OA}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{V_A^R}})\mathrm{dm} = \int_{(s)} \overrightarrow{\mathrm{OA}} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OA}})\mathrm{dm}$$

$$= \int_{(s)} [\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}^2\, \vec{\omega} - (\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ \vec{\omega})\, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\ ]\mathrm{dm}$$

$$= \int_{(s)} (\ \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2)\omega\vec{\mathrm{k}} - (\mathrm{z}\omega)(\mathrm{x}\vec{\imath} + \mathrm{y}\vec{\jmath} + \mathrm{z}\vec{\mathrm{k}})]\mathrm{dm}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{L_O^R}} = -\,\mathrm{I_{xz}}\,\omega\,\vec{\imath} - \mathrm{I_{yz}}\,\omega\,\vec{\jmath} - \mathrm{I_{zz}}\,\omega\,\vec{\mathrm{k}}$$

Mais I_{xz}, I_{yz} et I_{zz} dépendent du temps. On choisit un repère R'(Ox'y'z') dans le solide.

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \mathrm{x}'\vec{\imath'} + \mathrm{y}'\vec{\jmath'} + \mathrm{z}'\vec{\mathrm{k}'} \text{ et } \omega = \omega\,\vec{\mathrm{k}'} = \omega\,\vec{\mathrm{k}}$$

Donc on aura une quantité indépendante du temps::

$$\overrightarrow{\mathrm{L_O^R}} = -\,\mathrm{I_{x'z'}}\,\omega\,\vec{\imath'} - \mathrm{I_{y'z'}}\,\omega\,\vec{\jmath'} - \mathrm{I_{zz}}\,\omega\,\vec{\mathrm{k}'}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\int \overrightarrow{(V_A^R)}^2 \mathrm{dm} = \frac{1}{2}\int \overrightarrow{V_A^R}\,\overrightarrow{V_A^R}\mathrm{dm}$$

$$= \frac{1}{2}\int \overrightarrow{V_A^R}\,(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \wedge \vec{\omega})\mathrm{dm} = \frac{1}{2}\int \vec{\omega}\,(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \wedge \vec{\omega})\mathrm{dm}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{\omega} \int \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \wedge \overrightarrow{V_A^R}\right) \mathrm{dm} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\,\overrightarrow{\mathrm{L_O^R}}$$

$$\mathrm{E_c} = \frac{1}{2}\,\mathrm{I_{zz}}\;\omega^2$$