COMMANDE DE LINEARISATION D'UN SYSTEME NON LINEAIRE

INTRODUCTION

La linéarisation par retour d'état est une approche liée aux systèmes non linéaires consistant à transformer le système non linéaire en un système linéaire pour pouvoir utiliser les techniques de commandes linéaires. Dans ce chapitre la technique de linéarisation entrée sortie par retour d'état sera présentée

CAS MONO ENTREE MONO SORTIE

$$\dot{x} = f(x) + g(x).u$$

$$y = h(x)$$

Avec $x \in \mathcal{R}^n$ le vecteur d'état du système $y \in \mathcal{R}^1$ la sortie du système

On considère f, g, h des fonction non linéaire continues différentiables.

La linéarisation entrée sortie consiste à la détermination d'une équation différentielle linéaire liant la sortie du système a une nouvelle entrée à définir.

Pour aboutir à ce résulat, on dérive la sortie y juqu'a ce que la commande apparaît. 0n aboutit à :

$$\dot{y} = \frac{dh}{dx} f(x) + \frac{dh}{dx} g(x) u$$

$$\dot{y} = L_f h(x) + L_g h(x) u$$

Avec

$L_f h(x) = \frac{dh}{dx} f(x) : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}$. Dérivée de lie de la fonction $h(x)$ selon $f(x)$

$L_g h(x) = \frac{dh}{dx} g(x) : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}$ Dérivée de lie de la fonction $h(x)$ selon $g(x)$.

Le control par retour d'état de la forme :

$$u = \alpha(x) + \beta(x) v$$

Tel que :

$$u = \frac{1}{L_g h(x)} \left(-L_f h(x) + v\right)$$

Permet d'aboutir au système linéaire entre-sortie suivant

$$\dot{y} = v$$

Dans le cas où $L_g h(x) = 0$ quelque soit x , on dérive encore jusqu'à l'apparition de la commande u

Soit pour la deuxième dérivée :

$$\ddot{y} = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x) u$$

La commande par retour d'état permettant de linéariser le système ci-dessus est :

$$u = \frac{1}{L_g L_f h(x)} \left(-L_f^2 h(x) + v\right)$$

Par substitution, la relation entrée /sortie linéaire sera comme suit :

$$\ddot{y} = v$$

En généralisant et si r constitue l'ordre pour lequel $L_f^i L_f h(x) = 0$ avec $i = 0, \ldots . r - 2$

La loi de commande par retour d'état sera formulée comme suit :

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \left(-L_f^r h(x) + v\right)$$

Par substitution la relation entrée/sortie sera de la forme:

$$y^{(r)} = v$$

r est appellé degré relatif du système

EXEMPLE 1 :

Soit le système mono variable et non linéaire suivant décrit sous forme d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_2^2 + \lambda x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ cos x_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1$$

En dérivant la sortie :

$$\dot{y} = x_1 + x_2$$

Endérivant une seconde fois :

$$\ddot{y} = x_1 + x_2 + x_3 + u.cosx_1$$

On pose $\ddot{y} = v$ telle que v soit la nouvelle entrée.

La commande linéarisante par retour d'état est définit comme suit:

$$u = \frac{1}{cosx_1}\left(v - (x_1 + x_2 + x_3)\right)$$

Cela permet d'obtenir le système linéaire suivant:

$$\ddot{y} = v$$

CAS MULTI ENTREE – MULTI SORTIE

On considère le système non linéaire et multivariable suivant :

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=0}^{p} g_i u_i$$

$$y_1 = h_1(x)$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$y_p = h_p(x)$$

Tel que : $x \in \mathcal{R}^n$ $y \in \mathcal{R}^p$ et $u \in \mathcal{R}^p$

On considère f, $g_{i,}$ h_i des fonction non linéaire continues différentiables.

Pour obtenir un système d'équations différentielle linéaire liant les soties et les nouvelles entrée à définir, on différentie les sorties y_j dans le temps. On aboutit à :

$$\dot{y}_j = L_f h_j(x) + \sum_{i=1}^{p} \left(Lg_i h_j(x)\right) u_i$$

Si $Lg_i h_j(x) = 0$ la commande du système n'apparaît pas dans l'équation ci-dessus par conséquent il faut continuer a dériver jusqu'à l'apparition de la commande soit r_j l'ordre minimal d'apparition alors

$$\dot{y}_j^{(r_j)} = L_f^{r_j} h_j(x) + \sum_{i=1}^{p} L_{g_i}\left(L_f^{r_j - 1} h_j(x)\right) u_i$$

Tel que :

$$L_{g_i}\left(L_f^{r_j-1}h_j(x)\right) \neq 0 \quad , \quad \vee\, x$$

En généralisant cette procédure à toutes les autres sorties, on définit le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ . \\ . \\ \dot{y}_p^{(r_p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{r_1}h_j(x) \\ \vdots \\ . \\ . \\ L_f^{r_p}h_j(x) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} L_{g_1}\left(L_f^{r_1-1}h_j(x)\right) & \cdots & L_{g_p}\left(L_f^{r_1-1}h_j(x)\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1}\left(L_f^{r_p-1}h_j(x)\right) & \cdots & L_{g_p}\left(L_f^{r_p-1}h_j(x)\right) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ . \\ . \\ u_2 \end{bmatrix}$$

On appelle $E(x)$ la matrice de découplage, telle que

$$E(x) = \begin{pmatrix} L_{g_1}\left(L_f^{r_1-1}h_j(x)\right) & \cdots & L_{g_p}\left(L_f^{r_1-1}h_j(x)\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1}\left(L_f^{r_p-1}h_j(x)\right) & \cdots & L_{g_p}\left(L_f^{r_p-1}h_j(x)\right) \end{pmatrix}$$

Si $det\left(E(x)\right) \neq 0$ Alors la matrice inverse $E(x)^{-1}$ existe. Par consequent la loi de commande par retour d'état est décrite par l'equation suivante :

$$u = -E(x)^{-1} \begin{bmatrix} L_f^{r_1}h_j(x) \\ \vdots \\ . \\ . \\ L_f^{r_p}h_j(x) \end{bmatrix} + E(x)^{-1}.v$$

Cette loi permet d'aboutir a un comportement entrée /sortie linéaire et découplé de la forme

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ . \\ . \\ \dot{y}_p^{(r_p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ . \\ . \\ v_p \end{bmatrix}$$

Le degré relatif totale du système multivariable est définit par $r = r_1 + \cdots . r_p$

Ces résultats que se soit pour le cas mono variable ou le cas multivariable donnent la possibilité d'application de toutes les techniques de commande lineaires.

EXEMPLE 2 :

Soit le système multivariable et non linéaire suivant décrit sous forme d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (cosx_4)u_1 \\ x_1 \\ u_2 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$y_2 = x_4$$

En dérivant

$$\dot{y}_1 = (cosx_4)u_1 + x_1 + u_2$$

$$\dot{y}_2 = x_2 + x_3$$

$$\ddot{y}_2 = x_1 + u_2$$

Donc $r_1 = 1$, $r_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cosx_4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

En posant

$$\dot{y}_2 = v_1$$

$$\ddot{y}_2 = v_2$$

Alors la commande linéarisante par retour d'état est donnée par :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cosx_4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \right)$$

Le système non linéaire a un comportement Entrée sortie linéaire et découplé.

FORME NORMAL D'UN SYSTEME SISO:

Quand le degré relatif $r < n$ avec n le nombre de variable d'état ou l'ordre du système, le système non linéaire peut être transformé sous la forme normale dont une partie des variables d'état, linéairement indépendante, seraient choisies comme suit :

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \dots \\ \xi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ L_f h \\ \dots \\ \dots \\ L_f^{r-1} h \end{bmatrix}$$

Pour obtenir un système d'état de dimension n il est judicieux de completer les $n-r$ variables d'états restantes par le choix des variables d'états, telles que $\eta = [\eta_1, \dots \dots \dots \eta_{n-r}]^T$ linéairement indépendantes et indépendantes des variables d'états choisies précédement.
Ces variables d'états suplémentaires sont déduites en utilisant le théorème de FROBENIUS introduit par la relation :

$$L_g \lambda_k(x) = 0$$

En dérivant on aboutit au système d'état suivant :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_{r-1} \\ \xi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \dots \\ \xi_r \\ a(\xi,\eta) + b(\xi,n)u \end{bmatrix}$$

$$\dot{\eta} = w(\xi,\eta)$$

$$y = \xi_1$$

REMARQUE :

Les dynamiques $\dot{\eta} = w(\xi,\eta)$ constituent en fait la partie interne du système inobservable dont il est nécessaire de démontrer la stabilté avant d'effectuer la synthèse d'un régulateur du système. Cela est effectué par la métohde de la dynamique des zeros.

DYNAMIQUE DES ZEROS

La dynamique des zeros du système est celle qui correspond à considérer que toutes les sorties du système sont nulles. Par extension sur la forme normale décrite ci-dessus cela prend la forme suivante :

$$\dot{\xi} = 0$$

$$\dot{\eta} = w(0,\eta)$$

L'étude de stabilté de la dynamique inobservable sera très aisée en s'appyant sur le système ci-dessus.

Sans perte de généralité la même procédure sera appliquée au système multivarible.