GENERALITES SUR LES SYSTEMES NON LINEAIRES

INTRODUCTION :

Les systèmes d'une manière générale sont très complexes et de nature non linéaire. De plus les modèles ne sont pas facilement utilisables en commande.

Cependant, et afin de réaliser l'objectif de commande de ces systèmes, il est important de disposer du modèle le plus simple et le plus fidèle possible afin d'aider à

- Evaluer ses performances (rapidité, précision, etc….)
- Etudier sa stabilité.
- Réaliser des simulations.
- Déterminer les régulateurs si nécessaires.

SYSTEME LINEAIRE :

Un système linéaire est un système vérifiant le principe de superposition. Il est décrit par des équations différentielles linéaires d'ordre fini à coefficients constants.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}$$

Les termes constituants ces équations doivent être du 1er degré dans les variables dépendantes et leurs dérivées. En outre, parmi les propriétés les plus importantes des systèmes linéaires, c'est qu'ils ne peuvent présenter qu'un seul point d'équilibre.

SYSTEME NON-LINEAIRE :

Un système est non linéaire si contrairement au système ci-dessus le principe de superposition n'y est pas applicable. Il est décrit par des équations différentielles non linéaires.

Plusieurs types de non linéarités peuvent être introduits ce qui rend très complexe une étude systématique des systèmes non linéaire puisqu'il n'existe pas de théorie générale.

Exemple de système non linéaire

$$\dot{x}^2 + x = u$$

$$\ddot{x} + a(\dot{x})^3 + x = u$$

Où la non linéarité est introduite par une puissance supérieure à 1 de la première dérivée de la variable d'état

Les non linéarités de ces systèmes peuvent être naturelle (Hystérésis, frottement visqueux, etc.) Ou artificielle en général introduite par les concepteurs des systèmes.

Par exemple :

- Une saturation ou un cycle hystérésis sont introduite par un circuit magnétique composant le système
- Un seuil est introduit par des diodes composant un redresseur.

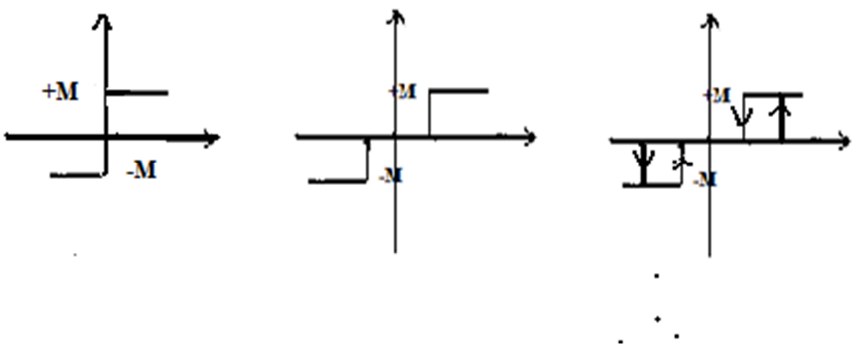
On peut classer les non-linéarités en plusieurs catégories selon leurs propriétés :

- des non-linéarités continues (courbures) ou discontinues (relais),
- des non-linéarités avec ou sans mémoire (toutes celles avec hystérésis),
- des non-linéarités accidentelles, c'est-à-dire dues aux imperfections des composants (saturation d'un amplificateur, jeu), ou essentielles, c'est à-dire liées à la nature même du composant (relais)

TYPES DE NON LINEARITE

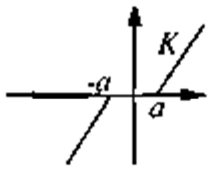
A- Systèmes naturellement non linéaire.

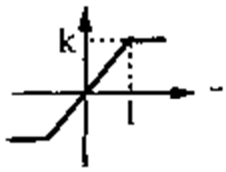
Dans la figure ci-dessous sont représentés des systèmes à relais, système a relais à trois positions, système a relais a trois position avec hystérésis

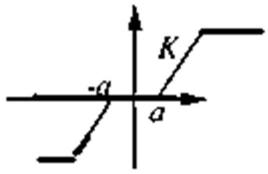


B- Systèmes accidentellement non linéaire.

Ces systèmes sont linéaires dans leurs conceptions mais imparfaitement puisque des fois on ajoute des composants qui ne sont pas linéaires. Ci dessous sont représentés les fonctions seuils, la fonction saturation, la combinaison d'une zone morte et d'une saturation.







Ces types de non linéarité sont caractérisés par leurs caractéristiques statiques. Et dont la sortie dépend essentiellement de l'entrée appliquée à ces composants

REPRESENTATION D'ETAT D'UN SYSTEME NON LINEAIRE.

Pour prédire le comportement dynamique d'un système électrique, mécanique, ou autre, il est utile de le représenter par un modèle dynamique et calculer sa solution.

La représentation d'état est une des représentations dynamiques des systèmes. La forme générale est fournie par le système d'équation suivant :

$$\dot{x} = f(x, u)$$
$$y = h(x, u)$$

La première équation est dite équation d'état.

La seconde équation est dite équation de sortie.

Pour le cas des systèmes non linéaires régis par des équations différentielles d'ordre élevés, on adopte en générale un changement de variable adéquat pour atteindre la représentation d'état.

A- **Cas d'un système du second ordre** :

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, u)$$

On pose

$$x_1 = x$$
$$x_2 = \dot{x}$$

Alors en dérivant on obtient la représentation d'état suivante:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = f(x_1, x_2, u)$$

Plusieurs méthodes sont proposé pour déterminer la trajectoire du système sur le plan de phase de coordonnées (x_1, x_2). On citera la méthode des isoclines.

B- Cas d'un système d'ordre supérieur

C'est une généralisation du cas ci-dessus

$$x^{(n)} = f(x, \dot{x} \dots \dots x^{(n-1)}, u)$$

On pose comme précédemment :

$$x_1 = x$$
$$x_2 = \dot{x}$$
$$x_3 = \ddot{x}$$
$$\dots\dots\dots$$
$$x_n = x^{(n-1)}$$

En dérivant on aboutit à la représentation d'état du système non linéaire d'ordre n

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = x_4$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x^{(n)} = f(x_1, x_2, \dots\dots x_{n-1}, u)$$

REPRESENTATION D'ETAT D'UN SYSTEME NON LINEAIRE AFFINE EN LA COMMANDE

A- Cas mono entrée /mono sortie :

Caractérisé par une seule entrée et une seule sortie

$$\dot{x} = f(x) + g(x).u$$
$$y = h(x)$$

Avec : $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ **,** $\boldsymbol{u} \in \mathcal{R}^1$ **,** $\boldsymbol{y} \in \mathcal{R}^1$

B- **Cas multi entrée/multi sortie** :

Caractérisé par plusieurs entrées et plusieurs sorties

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i\,(x).u_i$$
$$y = h(x)$$

Avec : $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ **,** $\boldsymbol{u} \in \mathcal{R}^m$ **,** $\boldsymbol{y} \in \mathcal{R}^p$

PRINCIPE DE LINEARISATION

Les notions de fonction de transfert et des techniques d'analyse et de synthèse sont élargies aux systèmes non linéaires Le modèle non linéaire d'un système peut être remplacé par son approximation linéaire valide dans un domaine restreint dépendant des variables d'état. Les techniques d'analyse et de synthèse des systèmes linéaires peuvent donc y être appliquées. Cependant les résultats d'analyse de ces systèmes ne peuvent être généralisés à cause de la validité locale ou fréquentielle de l'approximation linéaire.

On cite deux méthodes de linéarisation :

- Approximation linéaire utilisant le développement de Taylor
- Approximation du premier harmonique

APPROXIMATION LINEAIRE D'UNE FONCTION

Soit à déterminer l'approximation linéaire de la fonction de sortie suivante autour de son point de fonctionnement x_0

$$y = f(x)$$

Tel que $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ est une fonction continument et dérivable.

Le développement de Taylor nous permet d'écrire l'équation suivante :

$$y = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dt}(x - x_0) + Termes\ d'ordre\ élevé$$

La linéarisation autour de permet x_0 permet d'obtenir

$$y = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dt}(x - x_0)$$

$$y = y_0 + \frac{df(x_0)}{dt}(x - x_0)$$

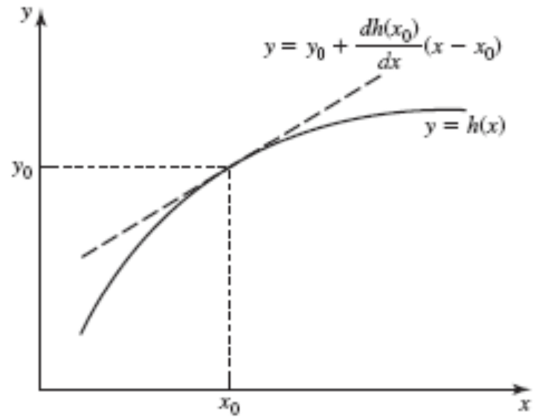
Tel que $y_0 = f(x_0)$

Soit $\delta y = y - y_0$; $\delta x = x - x_0$ par conséquent on aboutit à :

$$\delta y = \frac{df(x_0)}{dt}\delta x$$

Ce résultat décrit l'approximation du modèle non linéaire par un modèle linéaire valide

Autour du point de fonctionnementx_0. Comme cela est indiqué sur la figure



LINEARISATION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES NON LINEAIRE.

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_1 \dots \dots x_n, u_1, u_2, \dots \dots, u_m)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_1 \dots \dots x_n, u_1, u_2, \dots \dots, u_m)$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$
$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_1 \dots \dots x_n, u_1, u_2, \dots \dots, u_m)$$

Tel que les fonctions $f_i \; pour \; i = 1, \dots n$ continument dérivable. D'une manière compacte le système ci dessus peut être représenté comme suit :

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Le point d'équilibre est déterminé par l'équation suivante :

$$f(x_e, u_e) = 0$$

Pour la linéarisation on suppose une faible perturbation autour du point d'équilibre

$$x = x_e + \delta x$$

Et

$$u = u_e + \delta u$$

Le développement de Taylor autour de ce point permet de fournir l'équation suivante :

$$f(x, u) = f(x_e, u_e) + \frac{\partial f(x_e, u_e)}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f(x_e, u_e)}{\partial u}\delta u + terme\ de\ degré\ élevé$$

Avec

$$\frac{\partial f(x_e,u_e)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}$$

Et

$$\frac{\partial f(x_e,u_e)}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}$$

En négligeant les termes d'ordre élevés on aboutit a l'approximation linéaire suivante :

$$\delta\dot{x} = A\delta x + B\delta u$$

Avec

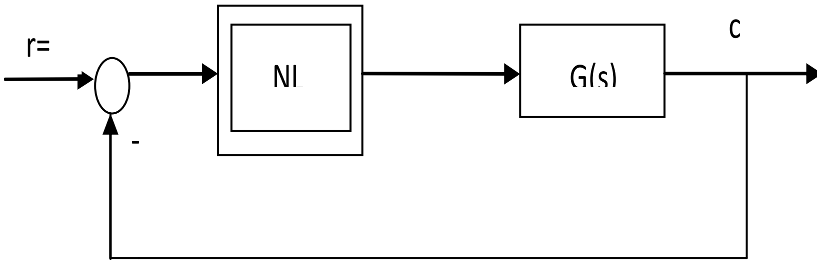
$$A = \frac{\partial f(x_e,u_e)}{\partial x}$$

$$B = \frac{\partial f(x_e,u_e)}{\partial u}$$

La stabilité du système obtenu est basée sur l'étude du signe des parties réelle des valeurs propres de la matrice A. si $\Re e\big(\lambda(A)\big) < 0$ alors le système est stable

LINEARISATION PAR APPROXIMATION AU PREMIER HARMONIQUE

C'est une technique de linéarisation dite approximation du premier harmonique. Elle est dédiée a l'étude de systèmes non linéaires particulier disposant d'une partie non linéaire séparable et d'une partie linéaire jouant le rôle d'un filtre passe-bas comme il est indiqué sur la figure suivant :



Le problème consiste à généraliser la fonction de transfert à ces systèmes non linéaire qui permettra de prédire l'existence ou non d'un cycle limite. C'est une approche qui ne peut être appliqué que dans le cas d'un régime harmonique sinusoïdale. Par conséquent, on supposera que l'entrée de l'élément non linéaire est sinusoïdale de la forme

$$x = X.sin\omega t$$

Avec $X: amplitude\ maximale$ et $\omega: pulsation\ du\ signal$

La sortie de l'élément non linéaire est généralement non sinusoïdale à l'instar de l'entrée mais périodique, décomposable en série de Fourier sous la forme suivante:

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\propto} (A_k sink\omega t + B_k cosk\omega t)$$

Avec

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w(t)\, d(\omega t)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w(t)\cos(k\,\omega t)\, d(\omega t)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w(t)\sin(k\,\omega t)\, d(\omega t)$$

L'approximation du premier harmonique consiste à ne considérer que le fondamentale de cette série de Fourier. La seule composante significative puisque la partie linéaire $G(s)$ est en générale un filtre passe-bas et que de ce fait les harmonique de rang supérieur sont atténuées en haute fréquence. On peut donc écrire la sortie de l'élément non linéaire comme suit

$$y_1 = A_1 sin\omega t + B_1 cos\omega t = Asin(\omega t + \varphi_1)$$

Avec $A = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$ et $\varphi = artg\left(\frac{B_1}{A_1}\right)$

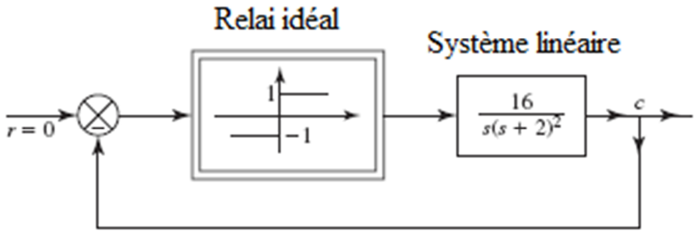
L'élément non linéaire peut par conséquent être décrit par la fonction de transfert représentant le rapport entré sortie comme suit :

$$N(X) = \frac{y_1}{x} = \frac{A}{X}\angle\varphi_1$$

$N(X)$ est en fait une quantité complexe qu'on peut représenter sur le plan complexe (Reel ; Imaginaire) pour différentes valeurs de$X$.

EXEMPLE :

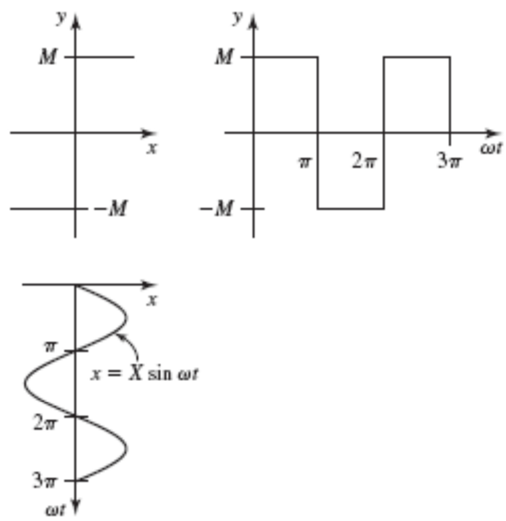
On considère le système non linéaire suivant composé d'un relai idéal et d'un filtre pas bas.



Fonctionnement du relai idéal

$$y = \begin{cases} M & si\ x > 0 \\ -M & si\ x < 0 \end{cases}$$

On considère l'entre du relai comme étant le signal : $x = Xsin\omega t$



Le signal de sortie de forme carrée peut être décomposé en série de Fourier. La fonction y est impaire par conséquent

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} B_k sink\omega t$$

Dont le fondamental est :

$$y_1 = B_1 sin\omega t$$

Avec B_1 déterminé par :

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} ysin\omega td\omega t$$

$$B_1 = \frac{2M}{\pi}\int_0^{\pi} sin\omega td\omega t$$

$$B_1 = -\frac{2M}{\pi} cos\omega t\Big|_0^{\pi} = \frac{4M}{\pi}$$

La fonction de transfert approximative du relai idéal est donnée par

$$N(x) = \frac{y_1}{x} = \frac{B_1}{X}\angle 0^0 = \frac{4M}{\pi X}$$

CARACTERISTIQUES DES SYSTEMES NON LINEAIRES

1°- **Multiplicité de points d'équilibre :**

Soit le système définie par :

$$\dot{x} = -x + x^2$$

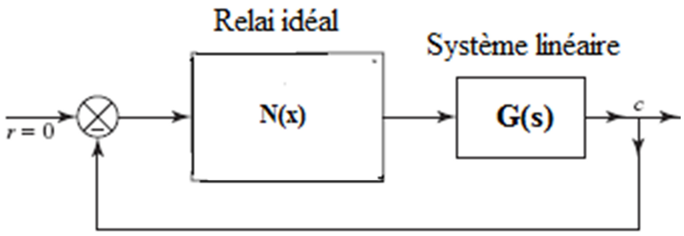
Ce système est définit par les points d'équilibres suivants tel que :

$$x(x-1) = 0$$

Donc $x = 0 \; et \; x = 1$

2°- Existence de cycle limite

Les systèmes a non linéarité séparable décrit comme ci-dessus peuvent être représenté comm suit :



Avec $N(x)$ représentant le gain harmonique équivalent

L'analyse de la stabilité d'un tel système, est basée sur l'étude des solutions de l'équation caractéristique suivante :

$$1 + N(x)G(s) = 0$$

Donc :

$$G(s) = -\frac{1}{N(x)}$$

Le point de rencontre des deux caractéristiques ci-dessus constitue un point d'oscillations d'amplitude et de fréquence donnée. Il démontre l'existence d'un cycle limite. (Dans le cas où il n'y'a pas d'intersection il y'a inexistence du cycle limite).

La stabilité du cycle limite est en générale effectué graphiquement. Sur la figure suivante on donne le cas de stabilité d'un cycle limite. (Dans le cas contraire le cycle limite n'est pas stable).

L'équation de Van Dr Pol constitue un exemple de système non linéaire oscillatoire dont la solution sur le plan de phase constitue un cycle limite. Dont l'amplitude dépend des paramètres du système.