APPERCU SUR LA THEORIE DE LYAPUNOV

INTRODUCTION :

La stabilité est une propriété très importante recherchée dans le fonctionnement d'un système pour une longue période.

Deux types de stabilité sont recherchés en générale:

- Stabilité entrée/sortie
- Stabilité autour d'un point d'équilibre

Dans ce qui suit l'étude de la stabilité est effectuée autour d'un point d'équilibre pour des systèmes non linéaire par la méthode de Lyapunov.

POINT D'EQUILIBRE D'UN SYSTEME :

Soit le système définit par l'équation dynamique suivante :

$$\dot{x} = f(x)$$

$x \in \mathcal{R}^n$

Et f est un champ de vecteurs dérivables sur f sur $\mathcal{R}^n$

Un point d'équilibre est toujours déterminé par la solution de l'équation suivante :

$$f(x_e) = 0$$

Ce point représente en fait un point de fonctionnement du système. La question qui se pose est : Le système est – il stable ou non autour de ce point d'équilibre x_e ?

STABILITE DU POINT D'EQUILIBRE

Le point d'équilibre x_e est stable si :

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\|x(0) - x_e\| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon \;\; \forall\, t \geq 0$

STABILITE ASYMPTOTIQUE

Le point d'équilibre x_e est stable asymptotiquement si :

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\|x(0) - x_e\| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow lim\|x(t) - x_e\| = 0$ quand $t \to 0$

STABILITE ASYMPTOTIQUE EXPONENTIELLE

Le point d'équilibre x_e est stable asymptotiquement exponentiellement si :

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, (\delta(\varepsilon) > 0,\ k > 0,\ \lambda > 0)$, tel que $\|x(0) - x_e\| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow$

$\|x(t) - x_e\| \leq k\|x(0) - x_e\|e^{-\lambda t} \quad \forall\, t \geq 0$

ETUDE DE STABILITE D'UN SYSTEME LINEAIRE

Soit un système linéaire sous la forme suivante :

$$\dot{x} = Ax$$

Avec : $x \in \mathcal{R}^n$

Et $A \in \mathcal{R}^{n\times n}$

Ce système est stable asymptotiquement à l'origine si et seulement si toutes les valeurs propres sont strictement telles que:

$$\Re e\big(\lambda(A)\big) < 0$$

STABILITE D'UN SYSTEME NON-LINEAIRE : METHODE INDIRECTE

Soit le système non linéaire suivant :

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Avec : $x \in \mathcal{R}^n$

Pour étudier la stabilité de ce système, on procède d'abord à sa linéarisation locale autour du point d'équilibre par la méthode des petites perturbations, soit :

$$x = x_e + \delta x$$

$$u = u_e + \delta u$$

Ce changement nous permet d'aboutir au système linéaire suivant :

$$\delta\dot{x} = A.\delta x + B.\delta u$$

Tels que

$$A = \frac{\partial f(x_e, u_e)}{\partial x}$$

$$B = \frac{\partial f(x_e, u_e)}{\partial u}$$

Si le comportement des systèmes non linéaire et linéaire est similaire autour de ce point d'équilibre, on procédera tout simplement de la même manière que pour un système linéaire à savoir que l'étude de stabilité est basée sur le signe des valeurs propres du système linéaire équivalent.

Si on considère un point d'équilibre d'un système non linéaire. Alors si ce point est asymptotiquement stable pour le système linéarisé par conséquent il l'est aussi pour le système non linéaire original. Si le système linéarisé est instable autour de ce point il l'est aussi pour le système non linéaire.

APPLICATION :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + 0.5x_1^3 - 0.04x_2$$

1° Point d'équilibre :$x_e = (0,0);\ (\sqrt{2},0);\ (-\sqrt{2},0)$

2° $J_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + \frac{3}{2}x_1^2 & -0.04 \end{bmatrix}$

3° pour $x_e = (0,0)$ $\lambda_{1;2} = -0.02 \pm j$ le système est donc stable puisque le système linéarisé l'est aussi.

ETUDE DE STABILITE D'UN SYSTEME NON-LINEAIRE : METHODE DIRECTE

Cette méthode est basée sur la théorie de lyapunov qui consiste à observer le comportement d'une fonction scalaire représentant la fonction énergie de ce système. Cette intuition est empruntée à la théorie des systèmes mécaniques. Cette énergie généralement positive décroit normalement dans le temps pour un système stable. On utilisera cette approche pour démontrer la stabilité d'un système non linéaire. Dans ce cadre la fonction énergie sera dite fonction de Lyapunov.
En fait il n'existe pas de règle générale permettant de trouver une fonction de Lyapunov pour n'importe quel système. Des tentatives sont toujours effectuées pour présenter une fonction de Lyapunov dite candidate qui doit vérifier les conditions énumérées dans la définition suivante

Définition de la fonction de Lyapunov :

Soit le système autonome suivant :

$$\dot{x} = f(x)$$

Une fonction de lyapunov candidate $V(x)$ de ce système est une fonction scalaire avec les propriétés suivantes :

1° Fonction scalaire telle que : $V(x): \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$

2° $V(x) = 0$ pour $x = 0$

2° Définie positive c'est-à-dire : telle que $V(x) > 0 \; \forall \, x \neq 0$

Théorème de stabilité de Lyapunov

Un Système est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov s'il existe une fonction de Lyapunov vérifiant les conditions ci-dessus et telles que :

1° $V(0) = 0$

2° $V(x) > 0 \;\; \forall \, x \neq 0$

3° $\dot{V}(x) < 0 \;\; \forall \, x \neq 0$

APPLICATION :

Soit le système :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \varepsilon x_1^2 x_2 - x_1$$

Le point d'équilibre est définit par $x_e = (0,0)$

Fonction de Lyapunov candidate

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

1° $V(0) = 0$

2° $V(x) > 0 \;\; \forall \, x \neq 0$

3° $\dot{V}(x) = \dot{x}_1 x_2 + x_1 \dot{x}_2 = \varepsilon x_1^2 x_2^2$

Si $\varepsilon < 0$ le système est stable asymptotiquement.