



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ECHAHID MOSTEFA BEN BOULAID BATNA 2  
FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE MECANIQUE  
SPECIALITE : MECANIQUE

Année Universitaire 2019/2020

OPTION : BIOMECANIQUE

Master I

MODULE : **Comportement Biomécanique**

Enseignant : R. Manaa

**Chapitre I** : Lois de comportement viscoélastiques

Dans ce chapitre, il est demandé aux étudiants de lire le plus possible tout en regardant les figures ou les courbes d'illustration du comportement des matériaux viscoélastiques. Dans la partie rhéologie, il est important de se familiariser avec les différents éléments standards (ressort, amortisseur et patin) qui nous renseignent sur le comportement complexe des polymères en réponse instantanée et différée (Elastique et anélastique). Ces matériaux ont une loi de comportement complexe et sa réponse aux excitations mécaniques (sollicitations) comporte une réponse réelle (réponse instantanée linéaire élastique) et une réponse complexe (partie imaginaire anélastique) d'où les équations correspondantes de forme  $S_{ol} = R_{eel} + I_{mag}$

**Chapitre I** : Critères de résistance

Dans ce chapitre des critères de résistance sont illustrés par des dessins et des équations correspondantes qu'il faut bien lire pour comprendre le principe de dimensionnement optimal selon des équation qui au départ prene en compte les hypothèses de la mécanique des milieux continus.

## I. Lois de comportement viscoélastiques et viscoplastiques

I.1 : Note : (COVID 19) Alors efficacité oblige et pour se faire, il est recommandé de lire le document en ayant une méthodologie de vouloir comprendre les principes de fonctionnement en s'aidant par les dessins ou les graphes qui illustrent le phénomène ou le model. Le programme s'articule sur deux chapitres distincts. Des lors que le dé-confinement est amorcé, nous aurions besoin de peu de séances pour bien expliquer le contenu.

### 1.2.1. Comportement viscosélatique unidimensionnel

La compréhension et l'identification du comportement d'un matériau passe inévitablement par une étape d'expérimentation. Les essais mecaniques unidimensionnels sur les matériaux montrent que la réponse à une sollicitation instatanée est en général constituée d'une partie instantanée et d'une pertie différée. Lorsque la réponse différée est réversible après la suppression de la sollicitation, on assiste à une viscoélasticité. Il est lieu de définir le comportement viscoélastique qui se traduit essentiellement par une réponce réversible dépendante du temps. Ce comportement étant dépendant du temp, Il peut être mis en évidence par deux essais rhéologiques qui sont l'essai du fluage et celui de la relaxation. Ces derniers peuvent être complétés respectivement par l'essai de recouvrance et celui de l'effacement.

#### 1.2.1.1. Essai du fluage

Sous l'effet d'une contrainte  $\sigma_0$  appliquée instantanément au matériau au temps  $t_0$  et puis maintenue constante durant l'essai, le fluage se traduit par une déformation instantanée  $\varepsilon_0$  puis une augmentation de la déformation  $\varepsilon_t$  au cours du temps (figure 1.a). Ainsi on écrit :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \mathcal{H}(t - t_0) = \sigma_0 \mathcal{H}_{t_0} \quad (I - 1)$$

Ou  $\mathcal{H}_{t_0}$  est la fonction de Heaviside.  $\mathcal{H}_{t_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_0 \\ 1 & \text{si } t > t_0 \end{cases}$

La réponse viscoélastique, en termes de déformation évoluant en fonction du temps s'exprime alors par la formule suivante :

$$\varepsilon(t) = J(t_0, t) \sigma_0 \quad (I - 2)$$

Ou  $J(t_0, t)$  représente la fonction du fluage.

#### 1.2.1.2. Essai de relaxation

Dans un essai de relaxation, une déformation d'amplitude  $\varepsilon_0$  est instantanément imposée à l'instant  $t_0$  et maintenue constante au cours de l'essai. La contrainte  $\sigma(t)$ , qui est la réponse observée, diminue en fonction du temps (Figure 1.b). Ainsi on écrit :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \mathcal{H}(t - t_0) = \varepsilon_0 \mathcal{H}_{t_0} \quad (I - 3)$$

La réponse correspondante, en termes de contrainte, est alors :

$$\sigma(t) = D(t_0, t) \varepsilon_0 \quad (I - 4)$$

Où  $D(t_0, t)$  représente la fonction de relaxation.

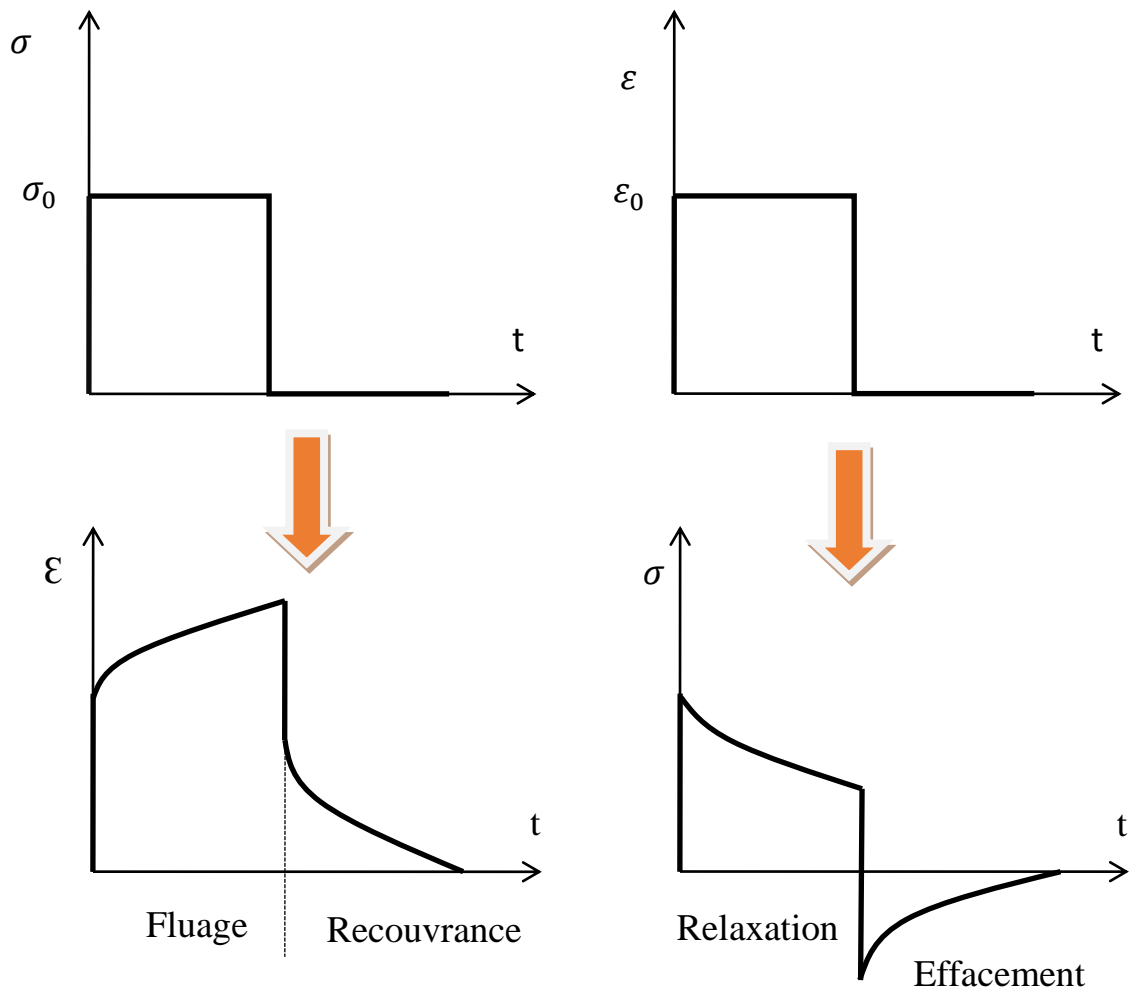


Figure 1. Essais de fluage-recouvrance et relaxation-effacement

### 1.2.2. Principe de superposition de Boltzmann

Le principe de superpositions de Boltzmann énonce la linéarité du comportement du matériau considéré en impliquant une homologie entre la superposition des sollicitations et celle des réponses. Il s'exprime par les intégrales suivantes :

$$\sigma(t) = \int_0^t D(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (1 - 5)$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (1 - 6)$$

En se servant du théorème du produit de convolution de Laplace, les expressions ci-dessus peuvent s'exprimer comme suit :

$$\mathcal{L}\sigma(t) = \mathcal{L}(D(t))\mathcal{L}\left(\frac{d\varepsilon(t)}{dt}\right) \quad (1 - 7)$$

$$\mathcal{L}\varepsilon(t) = \mathcal{L}(J(t))\mathcal{L}\left(\frac{d\sigma(t)}{dt}\right) \quad (1 - 8)$$

En appliquant le théorème de dérivée de la transformée de Laplace, on obtient :

$$\mathcal{L}\sigma(t) = s\mathcal{L}(D(t))\mathcal{L}(\varepsilon(t)) \quad (1 - 9)$$

$$\mathcal{L}\varepsilon(t) = s\mathcal{L}(J(t))\mathcal{L}(\sigma(t)) \quad (1 - 10)$$

Il s'ensuit que la relation entre la fonction du fluage  $J(t)$  et celle de relaxation  $D(t)$  s'expriment en transformée de Laplace par :

$$\mathcal{L}(D(t))\mathcal{L}(J(t)) = \frac{1}{s^2} \quad (1 - 11)$$

En inversant la transformée de la place et en se servant toujours du théorème de convolution, on obtient :

$$\int_0^t D(t - \tau)J(\tau)d\tau = \int_0^t J(t - \tau)D(\tau)dt = t \quad (1 - 12)$$

### 1.2.3. Modèles rhéologiques viscoélastiques

Les relations viscoélastiques sont exprimées sous des formes intégrales ou différentielles. Les formes intégrales sont généralement appropriées aux études théoriques. Par ailleurs, les formes différentielles sont liées a des modèles rhéologiques qui offrent une interprétation physique du comportement viscoélastique. Une description des différents modèles rhéologiques se réfère aux travaux de références [10, 19, 21]. Les modèles rhéologiques utilisés en viscoélasticité linéaire pour le matériau non vieillissant sont constitués à partir des deux modèles élémentaires représentés par un ressort et un amortisseur. Le ressort représente le comportement élastique instantané tandis que l'amortisseur décrit le comportement visqueux. Un arrangement en série ou en parallèle de ces deux éléments permet de produire une infinité de modèles rhéologiques dont les plus simples sont les modèles de Maxwell et Kelvin-Voigt.

### 1.2.3.1. Modèle de Maxwell

Le modèle de maxwell est une combinaison en série d'un ressort et d'un amortisseur (Figure 2.a). Les équations de ce modèle s'expriment comme suit :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\mu} \quad (1 - 13)$$

En tenant compte que la contrainte est la variable contrôlée, l'équation ci-dessus s'écrit :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{\mu} \int_0^t \sigma(\tau) d\tau \quad (1 - 14)$$

En intégrant par partie, on obtient :

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \left( \frac{1}{E} + \frac{t-\tau}{\mu} \right) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (1 - 15)$$

En comparant cette équation aux équations de Boltzmann, on peut déduire que la fonction du fluage  $J(t - \tau)$  dans le modèle de Maxwell est exprimée par :

$$J(t - \tau) = \frac{1}{E} + \frac{t - \tau}{\mu} \quad (1 - 16)$$

En supposant maintenant que l'histoire de déformation est connue, et en utilisant la solution des équations différentielles de premier ordre, on obtient :

$$\sigma(t - \tau) = \int_0^t E e^{\left(\frac{t-\tau}{T_r}\right)} \dot{\varepsilon}(t) d\tau$$

Avec  $T_r = \mu/E$  est appelé temps de relaxation.

Ceci nous permet de déduire la fonction de relaxation  $D(t - \tau)$  du modèle de maxwell.

$$D(t - \tau) = E e^{\left(\frac{t-\tau}{T_r}\right)} \quad (1 - 17)$$

### 1.2.3.2. Modèle de Kelvin-Voigt

Ce modèle combine un ressort et amortisseur montés en parallèles (Figure 2.b). Il est piloté par les équations suivantes :

$$\sigma = E\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon} \quad (1 - 18)$$

$$\varepsilon(t - \tau) = \int_0^t \frac{1}{E} \left( 1 - e^{\left(\frac{t-\tau}{T_f}\right)} \right) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (1 - 19)$$

$T_f$  étant homogène au temps de relaxation du model de maxwell, il vaut  $(\mu/E)$ . Il s'ensuit que la fonction de fluage du model de kelvin-Voigt  $J(t - \tau)$  est donnée par :

$$J(t - \tau) = \frac{1}{E} \left( 1 - e^{\left(\frac{t-\tau}{T_f}\right)} \right) \quad (1 - 20)$$

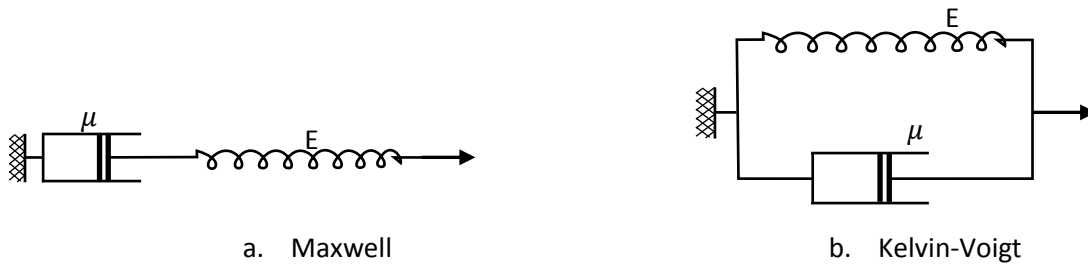


Figure 2. Modèle analogique viscoélastique : a. **Modèle de Maxwell**, b. **Modèle de Kelvin-Voigt**

### 1.2.3.3. Modèle de Burger

Si le modèle de Maxwell donne une représentation plus rationnelle en relaxation, celui de Kelvin-Voigt est mieux placé pour représenter le fluage du matériau. Le modèle de Burger, qui est une combinaison en série du modèle de Maxwell et celui de Kelvin-Voigt, s'avère alors plus adapté pour décrire aussi bien le fluage que la relaxation du matériau. Ainsi la réponse vaut la somme des réponses des deux modèles élémentaires.

$$\varepsilon(t - \tau) = \int_0^t \left( \frac{1}{E_M} + \frac{t - \tau}{\mu_M} \right) + \frac{1}{E} \left( 1 - e^{-\frac{(t-\tau)E_k}{\mu_k}} \right) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (I - 21)$$

En désignant par  $E_M \mu_M$  les paramètres du modèle de Maxwell et par  $T_f = \frac{\mu_k}{E_k}$  ceux de Kelvin-Voigt, la fonction du fluage est également la somme des fonctions du fluage des deux modèles élémentaire. Elle s'exprime alors par :

$$J(t - \tau) = \left( \frac{1}{E_M} + \frac{t - \tau}{\mu_M} \right) + \frac{1}{E} \left( 1 - e^{-\frac{(t-\tau)}{T_f}} \right) \quad (I - 22)$$

Il est à souligner que d'autres modèles analogiques viscoélastiques sont retrouvés dans la littérature dont ceux de Kelvin-Voigt à élasticité instantanée et de Zener. En effet des modèles analogiques peuvent incessamment avoir lieu en ajoutant en série ou en parallèles des ressorts ou des amortisseurs à des modèles existants.

### 1.2.3.4. Modèles généralisés

Les modèles élémentaires de Maxwell et de Kelvin-Voigt sont adoptés pour l'analyse qualitative du comportement viscoélastique. Ces modèles sont généralement insuffisants pour la représentation quantitative du comportement réel des matériaux. Afin d'améliorer la représentation quantitative, il est nécessaire d'augmenter le nombre de paramètres en combinant de nombreux ressorts et d'amortisseurs. Il est question de la construction des modèles généralisés de Maxwell et de Kelvin-Voigt. Le modèle de Maxwell généralisé est composé de plusieurs modèles de Maxwell montés en parallèles avec un ressort qui assure que la recouvrance est totale. En désignant par  $T_{ri} =$

$(\mu_i/E_i)$ , les temps de relaxation, et par N le nombre de modèles élémentaire de Maxwell, la fonction de relaxation pour ce modèle généralisé s'exprime par :

$$D(t - \tau) = E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-\left(\frac{t-\tau}{T_{ri}}\right)} \quad (I - 23)$$

Le modèle de Kelvin-Voigt généralisé est composé de plusieurs modèles de Kelvin-Voigt montés en série avec un ressort qui représente l'élasticité instantanée. Ainsi en mettant  $T_{fi} = (\mu_i/E_i)$ , et e, désignant par N le nombre de modèles élémentaire de Kelvin-Voigt, la fonction de fluage pour ce modèle généralisé est donnée par :

$$J(t - \tau) = \frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{E_i} (1 - e^{-\left(\frac{t-\tau}{T_{fi}}\right)}) \quad (I - 24)$$

### 1.3. Viscoélasticité non linéaire

Soumis à des sollicitations mécaniques relativement sévères, de nombreux matériaux montrent un comportement viscoélastique non linéaire [22-24]. Plusieurs approches de modélisation sont disponibles pour la modélisation de la viscoélasticité non linéaire. Un des modèles viscoélastiques non linéaires les plus connus est celui de Schapery [24]. Dérivé à partir de la théorie de la thermodynamique, il s'exprime en situation unidimensionnelle par :

$$\varepsilon(t) = g_0 J_0 \sigma = g_1 \int_0^t \Delta J(\Psi - \Psi') \frac{dg_2 \sigma}{d\tau} d\tau \quad (I - 25)$$

$g_0, g_1, g_2$  : sont des paramètres non linéaires dépendant de la contrainte,  $J_0$  est la fonction du fluage instantanée et  $\Delta J$  est la fonction du fluage écrite sous forme de série de Prony.  $\psi$  et  $\psi'$  représentent les temps réduits et s'expriment par :

$$\psi = \psi(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a_\sigma}, \psi' = \psi'(\tau) = \int_0^\tau \frac{dt'}{a_\sigma}, \quad a_\sigma > 0 \quad (I - 26)$$

En petites déformations, les paramètres  $g_0 = g_1 = g_2 = a_\sigma = 1$ , le comportement est viscoélastique linéaire. Le modèle de Schapery est donc compatible aussi bien en viscoélasticité linéaire que non linéaire.

#### 1.3.1. Principe de superposition non linéaire

En effet, la modélisation du fluage avec cette équation ne tient pas compte des effets de recouvrance et d'histoire. Une formulation fondée sur une superposition non linéaire permettant de prédire la relation non linéaire de l'histoire de contrainte à l'histoire de déformation peut s'exprimer avec l'équation suivante :

$$\sigma(t) = \int_0^t D(t - \tau, \varepsilon(\tau)) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{I} - 27)$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \tau, \sigma(\tau)) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{I} - 28)$$

### 1.3.2. Modèles rhéologiques viscoélastiques non linéaires

Plusieurs études antérieures ont proposé des modèles rhéologiques non linéaires. Il s'agit de garder les mêmes modèles rhéologiques sus mentionnés tout en remplaçant les éléments constitutifs qui sont les ressorts et les amortisseurs linéaires par d'autres non linéaires [16,25]. Ainsi les paramètres décrivant ces éléments ne sont plus constants mais s'expriment comme des fonctions dépendant de temps, de contraintes, de déformations ou de températures [26]. Si l'on considère à titre d'exemple les modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt, composés d'élément non linéaires, on peut respectivement écrire :

$$\sigma(\varepsilon, t, \dot{\varepsilon}) = E(\varepsilon_e, t) = \mu(\dot{\varepsilon}_v, t) \quad (\text{I} - 29)$$

$$\sigma(\varepsilon, t, \dot{\varepsilon}) = E(\varepsilon_e, t) + \mu(\dot{\varepsilon}_v, t) \quad (\text{I} - 30)$$

Dans ce cas, les paramètres  $E$  et  $\mu$  sont des fonctions non linéaire qui peuvent s'exprimer avec des fonctions de loi puissance. Ainsi en désignant par  $A, B, \alpha, \beta$  des paramètres dépendants du matériau, on peut alors écrire :

$$E(\varepsilon, t) = A\varepsilon^\alpha(t) \quad (\text{I} - 31)$$

$$E(\dot{\varepsilon}, t) = A\dot{\varepsilon}^\beta(t) \quad (\text{I} - 32)$$

Le modèle de Bailey-Norton est l'un des modèles viscoélastiques non linéaires les plus utilisés étant régi par une équation aussi simple [8]. Destiné à modéliser le fluage primaire et secondaire,  $A, m, n$  t étant des paramètres du matériau, il s'exprime par la formulation suivante :

$$\varepsilon(\sigma, t) = A\sigma^m t^n \quad (\text{I} - 33)$$

Plusieurs autres modèles d'amortisseurs non linéaire sont retrouvés dans la littérature. On en cite le modèle de d'Eyring et celui de Briant qui s'emploient seuls ou en série avec des amortisseurs linéaires pour représenter le comportement du matériau. Ils s'expriment respectivement par :

$$\mu(\dot{\varepsilon}, t) = L \sinh^{-1} \frac{\dot{\varepsilon}}{C} \quad (\text{I} - 34)$$

$$\mu(\dot{\varepsilon}, t) = D \frac{\dot{\varepsilon}}{(\dot{\varepsilon} + d)^\gamma} \quad (\text{I} - 35)$$

Ou  $L, C, D, d, \gamma$  sont des paramètres dépendant du matériau.

### 1.4. Viscoplasticité



La théorie de la viscoplasticité décrit l'écoulement par fluage de la matière, qui par rapport à la plasticité dépend du temps de façon essentielle. On se reporte aux travaux des références pour plus de détails sur les fondements de la viscoplasticité qui s'applique à une grande variété de matériaux dont le bois, les bétons, les métaux et alliages à hautes températures, les polymères et les composites . La modélisation combinée viscoélastique viscoplastique est souvent très compliquée et n'est pas encore bien maîtrisée. Le couplage du comportement viscoplastique avec le comportement élastique ou viscoélastique présente toujours une large plage de recherche.

Une distinction est d'abord à faire d'après Berzyna entre le comportement élastique\viscoélastique et le comportement élastique-viscoplastique. En effet le comportement élastique\viscoélastique s'applique sur les matériaux ayant un caractère visqueux uniquement dans le domaine plastique alors que le comportement élastique-viscoplastique ou élasto-viscoplastique est propre aux matériaux ou on assiste à des propriétés visqueuses aussi bien dans le domaine élastique que dans le domaine plastique. Récemment certains auteurs ont introduit des modélisations basées sur des approches viscoélastiques-viscoplastiques. De ce fait, on peut accepter une décomposition de la déformation en deux parties :une partie viscoélastique  $\epsilon_{vp}$ .

$$\epsilon = \epsilon_{ve} + \epsilon_{vp} \quad (1-36)$$

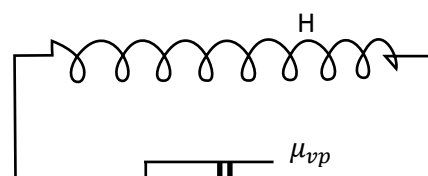
Il est à souligner que les réponses élastique et plastique instantanées sont incluses respectivement dans les réponses viscoélastiques et viscoplastique .le caractère viscoélastique étant explicité auparavant, on s'intéresse dans ce qui suit à l'écoulement viscoplastique qui se fait selon plusieurs modèles dont on cite certains en situation unidimensionnelle.

#### 1.4.1. Modèles rhéologiques viscoplastiques

Tout comme les modèles rhéologiques viscoélastiques représentés par des modèles analogiques, le comportement viscoplastique peut se décrire par la combinaison des ressorts et des amortisseurs en série ou en parallèle. Un troisième élément propre au comportement viscoplastique, c'est le patin, celui-ci permet d'enclencher l'écoulement viscoplastique une fois un seuil de contraint est atteint. La formulation des lois de comportements viscoplastiques implique essentiellement deux aspects qui sont le choix de la fonction de viscosité ou de potentiel viscoplastique et le choix de la fonction de l'écrouissage. Par ailleurs, le comportement viscoplastique peut être linéaire ou non linéaire. On présente dans la suite quelques modèles de comportements en situation unidimensionnelle.

##### 1.4.1.1. Modèle de Bingham

Ce modèle est susceptible de modéliser aussi bien le comportement viscoplastique parfait (Figure 3.a) et le comportement viscoplastique avec écrouissage (figure 3.b).Il correspond à un modèle



analogique composé d'un patin, un ressort et un amortisseur montés en parallèle. On peut passer du modèle à écrouissage au modèle parfait en supprimant le ressort.

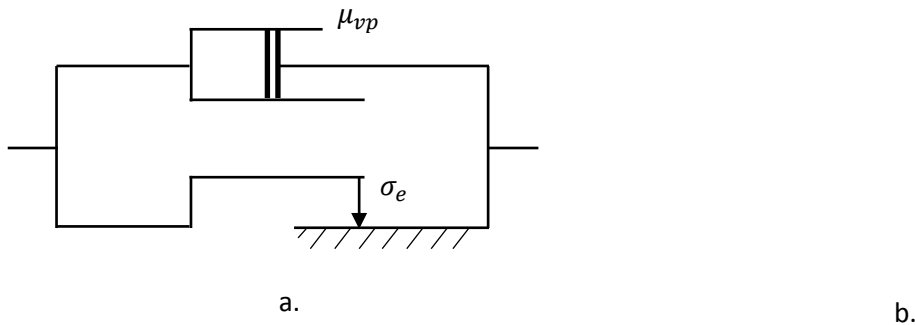


Figure 3. Modèles viscoplastiques de Bingham : a. Parfait, b. à avec écrouissage

Ainsi sans écrouissage, la contrainte est fonction de la vitesse de déformation viscoplastique.

Or en prenant en compte l'écrouissage, la contrainte est fonction non seulement de la vitesse de déformation mais aussi de la déformation. Ils s'expriment respectivement par les équations suivantes :

$$\sigma = \sigma_e + \mu_{vp} \dot{\epsilon}_{vp} \quad (1-37)$$

$$\sigma = \sigma_e + H \epsilon_{vp} + \mu_{vp} \dot{\epsilon}_{vp} \quad (1-38)$$

Avec  $\sigma_e$ ,  $H$  et  $\mu_{vp}$  correspondent respectivement à la limite élastique, le module d'écrouissage et module de viscosité.

Le modèle de Bingham établit une fonction linéaire entre la contrainte et la déformation d'une part et entre la contrainte et la vitesse de déformation d'autre part. On peut utiliser des ressorts et/ou des amortisseurs comme des fonctions non linéaires de la déformation et de la vitesse de déformation si l'on veut prévoir un comportement non linéaire. Dans ce cas, on écrit :

$$\sigma = \sigma_e + H(\epsilon_{vp}) + \mu_{vp}(\dot{\epsilon}_{vp}) \quad (1-39)$$

$H$  et  $\mu_{vp}$  représentent dans ce cas deux fonctions non linéaires dépendant relativement de la déformation et de sa vitesse. Ainsi à titre d'exemple, au dessus d'un seuil de contrainte, les modèles de Herschel-Bulkley et celui de Casson s'expriment respectivement par les équations suivantes :

$$\sigma = \sigma_e + \mu_{vp} \dot{\epsilon}_{vp}^n \quad (1-40)$$

$$\sqrt{\sigma} = \sqrt{\sigma_e} + \sqrt{\mu_{vp} \dot{\epsilon}_{vp}} \quad (1-41)$$

## Modélisation rhéologique et expérimentation

## 1. Modèle rhéologique proposé

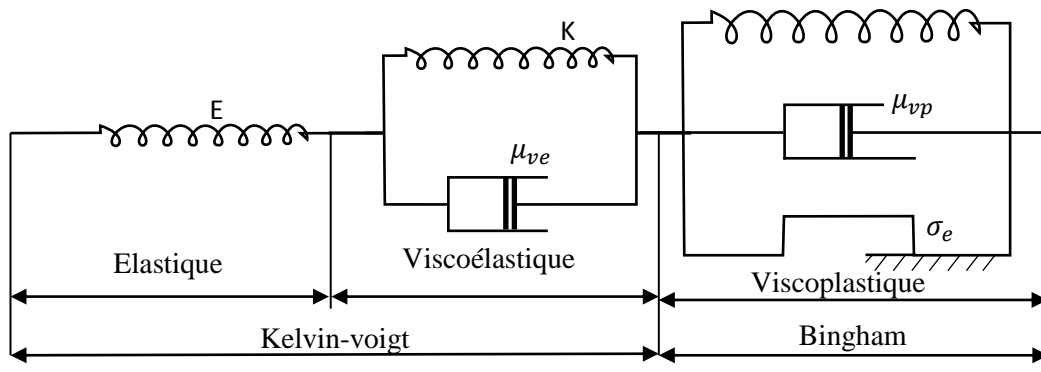


Figure 28. Modèle rhéologique élasto-viscoplastique

Le modèle rhéologique proposé est un montage en série de deux mécanismes dont l'un, représentant le comportement viscoélastique (figure 28), est défini par le modèle de Kelvin-Voigt à élasticité instantanée, composé d'un ressort représentant l'élasticité instantanée monté en série avec une combinaison en parallèle d'un autre ressort et d'un autre amortisseur reproduisant ainsi une élasticité différée (ou une viscoélasticité). Ce modèle est souvent adopté pour décrire le comportement viscoélastique des polymères. L'autre mécanisme, qui n'est activé que lorsque le chargement dépasse une valeur critique connue par le seuil de plasticité, représente le comportement viscoplastique décrit par le modèle généralisé de Bingham. Il est défini par l'association en parallèle d'un patin indiquant le seuil de plasticité, d'un ressort représentant l'écrouissage du matériau et d'un amortisseur simulant la déformation plastique différée (ou viscoplastique). Le modèle de Bingham est appliqué pour décrire le comportement viscoplastique du bois et des polymères. Le modèle a été appliqué avec succès pour modéliser le comportement des polymères.

De par ses composantes, ce modèle est extensible et par conséquent susceptible de simuler une grande variété de matériaux, en faisant varier les valeurs des paramètres des différents éléments constituant le modèle ou en supprimant certains de ces éléments. On peut également prévoir des fonctions non linéaires de ses paramètres en fonction des sollicitations.

## 2. Formulation mathématique des équations de comportement

De par ces trois composantes, le modèle analogique proposé représente une réponse composée d'une partie élastique instantanée, d'une partie viscoélastique et d'une autre partie viscoplastique. Le mécanisme viscoplastique n'est opérationnel que lorsque le patin est activé, autrement dit lorsqu'un seuil de contrainte est atteint. Ceci se traduit sur le plan mathématique par les équations suivantes :

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} & \sigma \leq \sigma_e \\ \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} + \varepsilon_{vp} & \sigma > \sigma_e \end{cases} \quad (IV-3)$$

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon_e = K\varepsilon_{ve} + \mu_{ve}\dot{\varepsilon}_{ve} & \sigma \leq \sigma_e \end{cases} \quad (IV-4)$$

$$\sigma = \sigma_e + H\varepsilon_{vp} + \mu_{vp}\dot{\varepsilon}_{vp} \quad \sigma > \sigma_e$$

Avec  $\varepsilon, \varepsilon_e, \varepsilon_{ve}, \varepsilon_{vp}$  sont respectivement la déformation totale, la déformation élastique instantanée, la déformation viscoélastique et la déformation viscoplastique.  $\dot{\varepsilon}_{ve}$  et  $\dot{\varepsilon}_{vp}$  étant respectivement les vitesses des déformations viscoélastique et viscoplastique.  $\sigma$  et  $\sigma_e$  représentent la contrainte et la contrainte correspondant au seuil de plasticité.  $E, K, \mu_{ve}$  sont des paramètres viscoélastiques et  $H, \mu_{vp}$  des paramètres viscoplastiques.

## 2. Techniques d'homogénéisation

Les techniques d'homogénéisation permettent de modéliser le comportement mécanique d'un matériau hétérogène. Il s'agit de prévoir un matériau homogène équivalent à partir des propriétés des différentes phases qui le composent. Ces techniques s'appliquent sur un volume élémentaire représentatif sur lequel est déterminé le comportement du matériau homogène équivalent.

La démarche d'une technique d'homogénéisation repose en trois étapes. D'abord, la description du matériau hétérogène à l'échelle microscopiques. Ensuite, la détermination des liens des réponses mécaniques entre les deux échelles microscopiques et macroscopiques. Enfin, l'identification du comportement macroscopique du matériau.

### 2.1. Homogénéisation en élasticité linéaire

Les modèles analytiques proposés dans la plupart des travaux sur les matériaux composites à matrice renforcée. Ces modèles supposent que l'adhésion entre la matrice et les fibres est parfaite de telle manière que les lois de l'élasticité peuvent être appliquées. Dans un volume élémentaire représentatif, les constituants du matériau hétérogène sont désignés comme des phases. Ainsi dans un composite à deux phase soient une matrice et des fibres désignés respectivement par les indices «m» et «f», la fraction volumique  $v$  de chaque phase vérifie l'équation.

$$v_m + v_f = 1 \quad (IV-5)$$

Le modèle de Voigt, connu aussi par la loi des mélanges fait l'hypothèse de la déformation constante. Le comportement effectif du composite est alors donné par :

$$E_c = v_m E_m + v_f E_f \quad (IV-6)$$

$$\sigma_c = v_m \sigma_m + v_f \sigma_f \quad (IV-7)$$

Où  $E$  et  $\sigma$  représentent respectivement le module de Young et la contrainte tandis que les indices m, f et c désignent respectivement la matrice, les fibres et le composite.

Le modèle de Reuss qui fait, contrairement au modèle de Voigt, l'hypothèse de la contrainte constante permet d'exprimer le comportement effectif du composite par:

$$E_c = \frac{E_m E_f}{V_f E_m + V_m E_f} \quad (\text{IV-8})$$

$$\sigma_c = \frac{\sigma_m \sigma_f}{v_f \sigma_m + v_m \sigma_f} \quad (\text{IV-9})$$

## 2.2. Homogénéisation en viscoélasticité

La technique d'homogénéisation des composites en élasticité linéaire peut être étendue afin de modéliser le comportement viscoélastique d'une matrice de comportement viscoélastique renforcée par des fibres élastique [123]. En effet, le comportement viscoélastique linéaire s'exprime par la relation:

$$\sigma(t) = \int_0^t D(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{IV-10})$$

En appliquant le théorème de la dérivée de la transformée de Laplace ainsi qu'il est élucidé dans le chapitre 1, on obtient la relation:

$$\mathcal{L}\sigma(t) = s\mathcal{L}(D(t))\mathcal{L}(\varepsilon(t)) \quad (\text{IV-11})$$

$\mathcal{L}\sigma(t) = s\mathcal{L}(D(t))\mathcal{L}(\varepsilon(t))$  Représentent respectivement la contrainte  $\sigma$ , la fonction de relaxation  $D$  et la déformation  $\varepsilon$  dans l'espace de Laplace. La linéarité de la relation contrainte déformation permet d'utiliser les équations développées dans le domaine élastique linéaire. Or la solution dans l'espace temporel est obtenue par l'inversion de celle obtenue dans le domaine de Laplace. On se reporte aux références [124-126] pour plus de détails sur les techniques d'homogénéisation.

## CRITERES DE PLASTICITE USUELS: VON MISES ET TRESCA

### 1. Préliminaires

Comme nous l'avons vu à la section 3.2 du chapitre I, la fonction de charge d'un matériau obéissant à un critère de *plasticité parfaite isotrope* s'écrit

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \tilde{f}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) \leq 0 \quad (\text{A.1})$$

Où  $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$  sont les contraintes principales. Le domaine d'élasticité peut donc être représenté dans  $R^3$ . Dans cet espace, la décomposition de la contrainte en parties *sphérique* et *déviatorique* d'un tenseur des contraintes

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{s}} + 1/3(\text{tr}\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}} \quad (\text{A.2})$$

Peut être représentée de la façon suivante (figure 1). Le vecteur  $\underline{\underline{OM}} \square \square \sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III} \square \square$  étant associé à  $\underline{\underline{1}} \square \square$ , et  $e_\Delta \square \square 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3} \square \square$ , vecteur *unitaire* porté par l'axe trissecteur  $\square \square$ , à  $\underline{\underline{1}}/\sqrt{3}$  il vient

$$\underline{OH} = (\underline{OM} \cdot \underline{e}_\Delta) \underline{e}_\Delta = (\text{tr} \underline{\sigma}) \underline{e}_\Delta / \sqrt{3} \quad (\text{A.3})$$

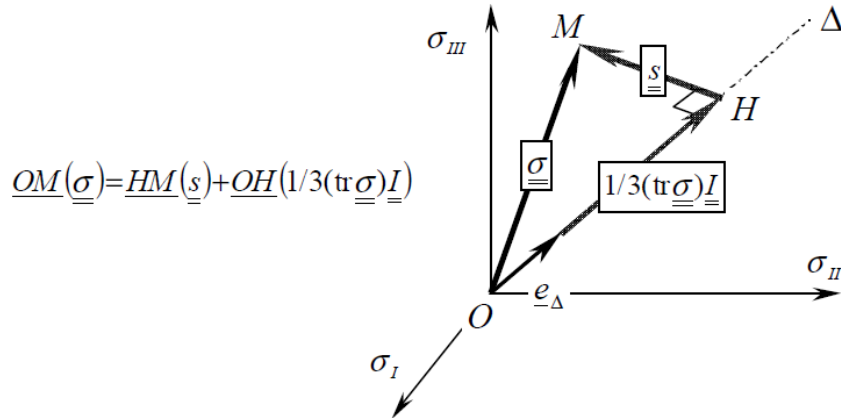


Figure 1. Représentation géométrique dans l'espace des contraintes principales de la décomposition d'un tenseur en parties sphérique et déviatorique

de sorte que le vecteur  $\underline{OH}$  de composantes  $\frac{\text{tr} \underline{\sigma}}{3}, \frac{\text{tr} \underline{\sigma}}{3}, \frac{\text{tr} \underline{\sigma}}{3}$  représente dans l'espace des contraintes principales la partie *sphérique* du tenseur  $\underline{\sigma}$ , la partie *déviatorique* étant associée au vecteur  $\underline{OM} = \underline{OH} + \underline{HM}$ . Ce dernier est perpendiculaire à l'axe  $\underline{e}_\Delta$ .

## 2. Critère de Von Mises

### 2.1. Domaine d'élasticité.

La fonction de charge relative à un tel critère s'écrit :

$$f(\underline{\sigma}) = \left( \frac{1}{2} \underline{s} : \underline{s} \right)^{1/2} - k = \left( \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} \right)^{1/2} - k = \left( \frac{1}{2} (s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2) \right)^{1/2} - k \quad (\text{A.4})$$

Où  $S_I, S_{II}, S_{III}$  désignent les valeurs principales de  $\underline{s}$  et  $k$  représente la *limite d'élasticité en cisssion simple*. Dans l'espace des contraintes principales, le module du vecteur  $\underline{HM}$  est égal à :

$$HM = \left( s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2 \right)^{1/2} \quad (\text{A.5})$$

de sorte que le critère de Von Mises peut également s'écrire

$$f(\underline{\sigma}) \leq 0 \Leftrightarrow HM \leq k\sqrt{2} \quad (\text{A.6})$$

Le domaine d'élasticité est un cylindre circulaire d'axe  $\underline{e}_\Delta$  et de rayon  $k\sqrt{2}$  (figure 2).

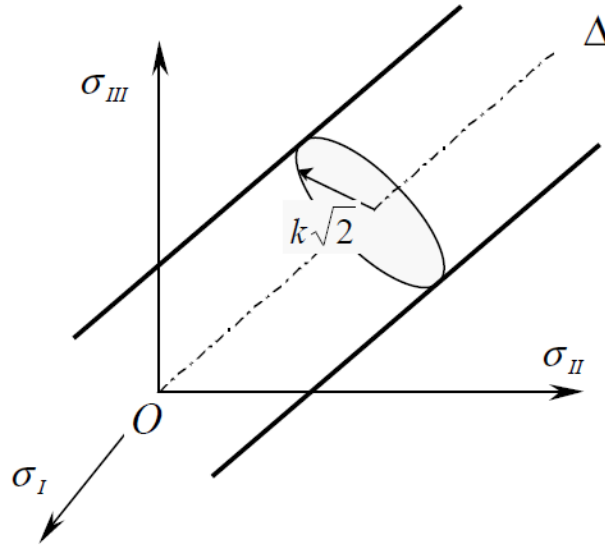


Figure 2. Domaine d'élasticité relatif au critère de Von Mises

## 2.2. Règle d'écoulement plastique (matériau standard)

Partant de l'expression générale

$$\underline{\underline{d}}^p = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \lambda \geq 0 \quad \text{si } f(\underline{\underline{\sigma}}) = \dot{f}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \quad (\text{A.7})$$

Tenant compte de (A.4), il vient

$$df = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : d\underline{\underline{\sigma}} = \frac{d(1/2 \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}})}{2(1/2 \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}})^{1/2}} = \frac{\underline{\underline{s}} : d\underline{\underline{s}}}{2k} = \frac{\underline{\underline{s}}}{2k} : d\underline{\underline{\sigma}} \quad \forall d\underline{\underline{\sigma}} \quad (\text{A.8})$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\underline{\underline{s}}}{2k} \quad (\text{A.9})$$

et par conséquent, puisque le multiplicateur plastique  $\lambda$  est *indéterminé*

$$\boxed{\underline{\underline{d}}^p = \lambda \underline{\underline{s}} \quad \lambda \geq 0 \quad \text{si } (1/2 \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}})^{1/2} = k \quad \text{et } \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = 0} \quad (\text{A.10})$$

Cette règle d'écoulement peut s'interpréter géométriquement en remarquant d'une part que  $\underline{\underline{d}}^p$  a les mêmes directions principales que  $\underline{\underline{s}}$  (voir également la section 4.4. du chapitre I), et que dans l'espace des contraintes principales le vecteur associé à  $\underline{\underline{d}}^p$  est *normale extérieure* à la surface de charge cylindrique, donc perpendiculaire à l'axe  $\square\square$ , et même plus précisément *colinéaire* au vecteur associé à  $\underline{\underline{s}}$  (figure 3).

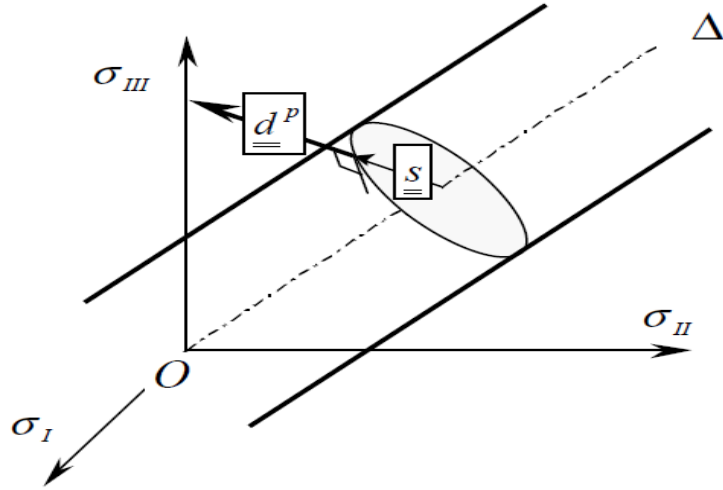


Figure 3. Interprétation géométrique de la règle d'écoulement associée pour un critère de von Mises  
 La relation (A.10) implique en particulier que

$$\text{tr}(\underline{\underline{d}}^P) = \text{tr}(\lambda \underline{\underline{s}}) = 0 \quad (\text{A.11})$$

signifiant ainsi que le matériau est *plastiquement incompressible*.

### 3. Critère de Tresca

#### 3.1. Domaine d'élasticité

La fonction de charge d'un tel critère s'écrit :

$$\hat{f}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = \sup_{K,L=I,II,III} \{\sigma_K - \sigma_L\} - \sigma_0 \leq 0 \quad (\text{A.12})$$

où  $\sigma_0 = 2C$  représente la limite d'élasticité en *traction simple* du matériau,  $C$  désignant sa *cohésion*. Dans l'espace des contraintes principales le domaine d'élasticité est représenté par un cylindre d'axe  $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$ . En effet étant donné un point  $M(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$  appartenant à ce domaine, c'est-à-dire vérifiant l'inégalité (A.12), ce dernier contient toute la droite passant par  $M$  et parallèle à  $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$  constituée des points de la forme  $M + \alpha(\sigma_I + \alpha, \sigma_{II} + \alpha, \sigma_{III} + \alpha)$  puisqu'il est facile de voir que

$$\forall \alpha \quad \hat{f}(\sigma_I + \alpha, \sigma_{II} + \alpha, \sigma_{III} + \alpha) = \sup_{K,L=I,II,III} \{\sigma_K + \alpha - \sigma_L - \alpha\} - \sigma_0 = \hat{f}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) \quad (\text{A.13})$$

Il reste alors à préciser la section de ce cylindre en se plaçant dans un *plan déviateur* quelconque, perpendiculaire à  $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$  (figure 4). L'expression (A.12) fait apparaître que le critère de Tresca consiste à *limiter la différence entre les contraintes principales extrêmes*, la contrainte principale intermédiaire n'intervenant pas dans un tel critère. L'espace des contraintes principales peut être ainsi subdivisé en six régions égales délimitées par les trois plans passant par  $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$  et contenant respectivement les trois



axes principaux. Chacune de ces régions correspond à un classement d'ordre donné entre les contraintes principales.

Plaçons nous par exemple dans la région où  $\sigma_I$  et  $\sigma_{II}$  sont les contraintes principales majeure et mineure, tandis que  $\sigma_{III}$  est la contrainte principale intermédiaire. Le critère de Tresca s'écrit alors

$$\sigma_I - \sigma_{III} - \sigma_0 \leq 0 \quad (\text{A.14})$$

La restriction du domaine d'élasticité à cette région est donc délimitée par le plan d'équation  $\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_0$  parallèle à  $\sigma_{II}$  et à l'axe  $O\sigma_0$ . Effectuant le même raisonnement pour les cinq autres régions, il apparaît que la frontière du domaine d'élasticité est un *hexagone régulier* représenté sur la figure 4.

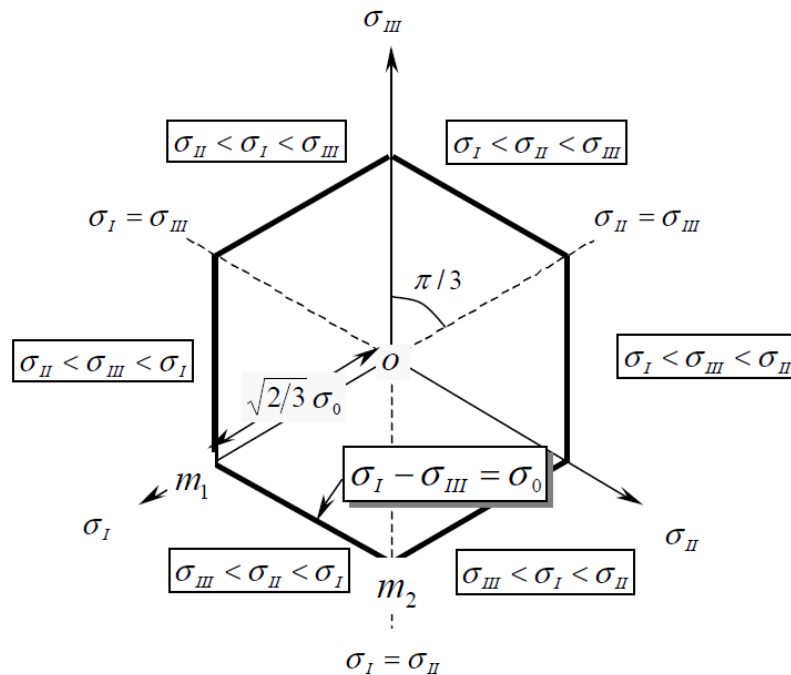


Figure 4. Section par un plan déviateur du domaine d'élasticité relatif à un critère de Tresca

La dimension de cet hexagone est caractérisée par la distance  $om_1 = om_2$ , où  $m_1$  désigne la trace dans le plan déviateur de l'arête du cylindre hexagonal, parallèle à l'axe  $\sigma_{II}$ , qui passe par le point  $(\sigma_I = \sigma_0, \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0)$  correspondant à limite d'élasticité en traction uniaxiale.

Cette distance n'est autre que la norme du déviateur associé à cet état de contrainte

$$(s_I = 2\sigma_0/3, s_{II} = s_{III} = -\sigma_0/3)$$

$$om_1 = om_2 = (s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 \quad (\text{A.15})$$

### 3.2. Règle d'écoulement

On utilise le résultat du cours (chapitre I, équation (1.39)) exprimé en vitesse :

$$d_K^p = \lambda \frac{\partial \hat{f}}{\partial \sigma_K}, \quad \lambda \geq 0 \quad (\text{A.16})$$

Deux cas doivent être distingués selon la position de l'état de contrainte sur la surface de charge hexagonale.

- *Régime de face* (figure 5-a). Le point est situé sur une face du polyèdre (segment  $m_1m_2$  à l'exclusion des extrémités). La fonction de charge s'écrit dans ce cas

$$\hat{f}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = \sigma_I - \sigma_{III} - \sigma_0 = 0 \quad (\text{A.17})$$

d'où en vertu de (A.16)

$$d_I^p = \dot{\lambda} \geq 0 \quad d_{II}^p = 0 \quad d_{III}^p = -\dot{\lambda} \quad \text{lorsque} \quad \dot{f}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = \dot{\sigma}_I - \dot{\sigma}_{III} = 0 \quad (\text{A.18})$$

De même sur la «face»  $m_2m_3$

$$d_I^p = 0 \quad d_{II}^p = \dot{\mu} \geq 0 \quad d_{III}^p = -\dot{\mu} \quad \text{lorsque} \quad \dot{f}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = \dot{\sigma}_{II} - \dot{\sigma}_{III} = 0 \quad (\text{A.19})$$

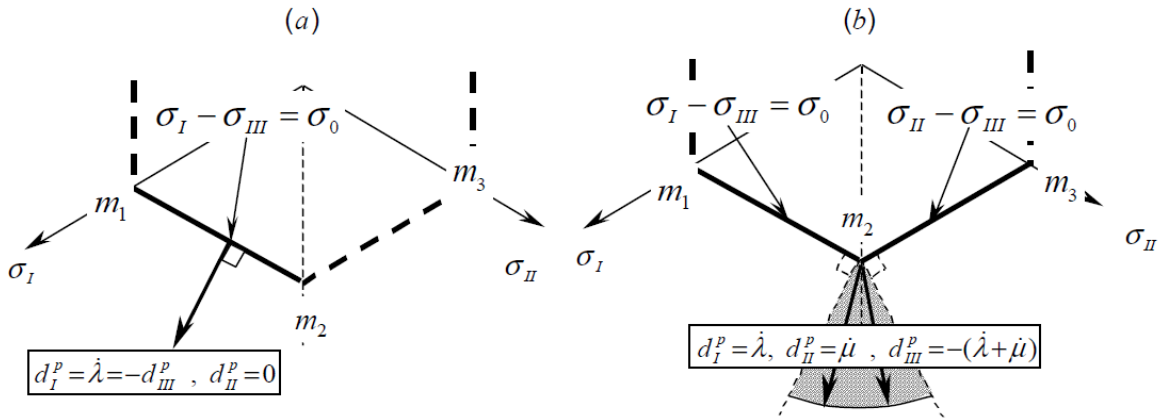


Figure 5. Règle d'écoulement plastique pour un matériau de Tresca : (a) régime de face, (b) régime d'arête

- *Régime d'arête* (figure 5-b). Le point est situé sur une arête du polyèdre (point  $m_2$ ). La fonction de charge s'écrit dans ce cas

$$\sigma_I - \sigma_{III} - \sigma_0 = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{II} - \sigma_{III} - \sigma_0 = 0 \quad (\text{A.20})$$

Le vecteur représentant le taux de déformation plastique appartient au *cône des normales extérieures* en ce point, c'est-à-dire qu'il est *combinaison convexe* des vecteurs correspondant aux régimes des «faces»  $m_1m_2$  et  $m_2m_3$ . Soit

$$d_I^p = \dot{\lambda} \geq 0 \quad d_{II}^p = \dot{\mu} \geq 0 \quad d_{III}^p = -(\dot{\lambda} + \dot{\mu}) \quad \text{lorsque} \quad \dot{\sigma}_I = \dot{\sigma}_{II} = \dot{\sigma}_{III} \quad (\text{A.21})$$

On observe que dans tous les cas, la *condition d'incompressibilité plastique* est bien Vérifiée

$$\text{tr} \underline{\underline{d}}^p = \sum_K d_K^p = 0 \quad (\text{A.22})$$

ce qui se traduit géométriquement par le fait que le vecteur associé au taux de déformation plastique reste perpendiculaire à l'axe □□