

# *Initiation à la rhéologie*

Sébastien PONCET

(sebastien.poncet@univ-amu.fr)

Module de mécanique des fluides – Semestre 4

Groupe **MECAFLU-GTE-2A** sur l'ENT

IUT Génie Thermique et Energie – Marseille

Année 2012-2013

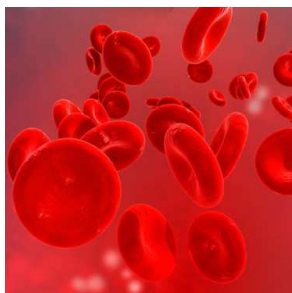
## *Applications des fluides non newtoniens*

- Industrie alimentaire: qualité des aliments (texture...), coûts de production...

- Géophysique: volcans, avalanches, coulées de boue...



- Biologie: sang, sève, liquide viscoélastique dans les plantes carnivores



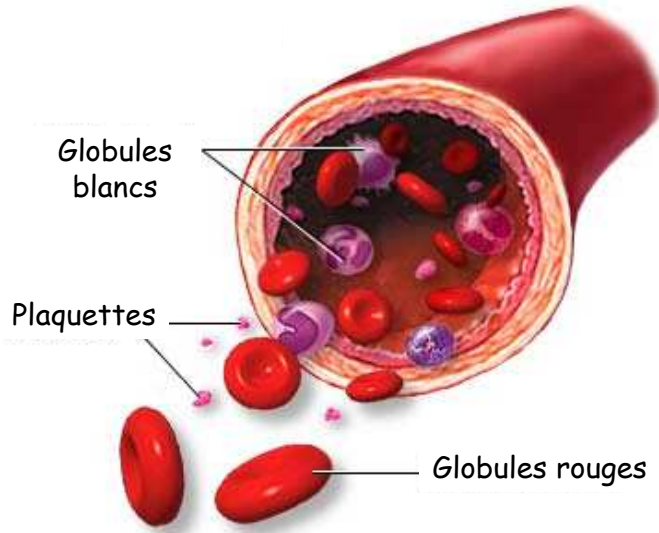
Filament de fluide viscoélastique

L. Gaume & Y. Forterre, PLoS ONE 2 (11), 2007

## Le sang

Le sang est un fluide non newtonien dit rhéofluidifiant (sa viscosité apparente diminue lorsque le taux de cisaillement augmente).

Le taux de cisaillement augmente avec la vitesse de l'écoulement. Pour des faibles taux de cisaillement, les cellules sanguines sont orientées au hasard. Quand la vitesse de l'écoulement augmente, donc le taux de cisaillement aussi, les hématies s'orientent dans le sens de l'écoulement, parallèlement les unes par rapport aux autres. L'écoulement est alors facilité et la viscosité du sang diminue.



Les cellules et notamment leur nombre (hématocrite) influencent largement l'écoulement du plasma et donc sa viscosité.

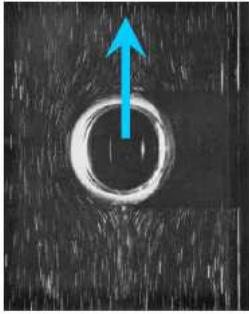
Il y a des risques cardio-vasculaires très importants.

Aucune influence de la température (24-37°C).

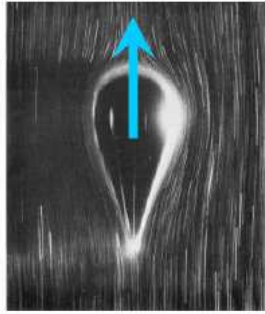


# Comportements non newtoniens

## Ascension d'une bulle d'air dans des fluides non newtoniens

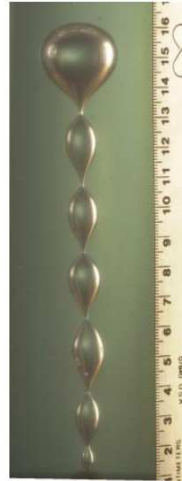


newtonien

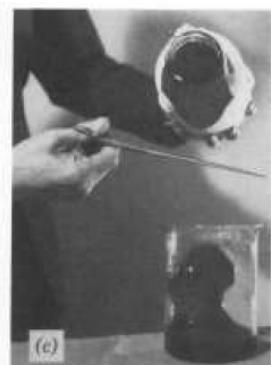


non-newtonien

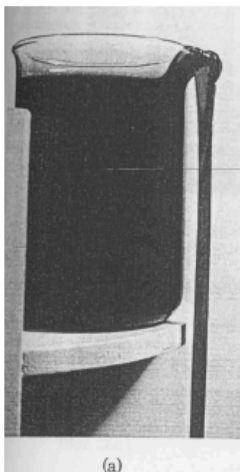
D'après I.L. Kliakhandler, Phys. Fluids 15 (9), 2003



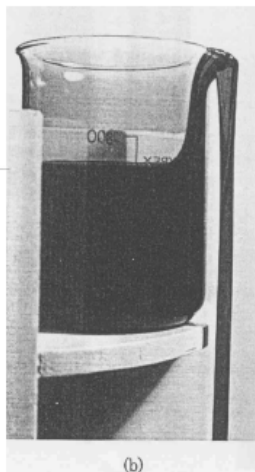
## Détente élastique, mémoire du fluide



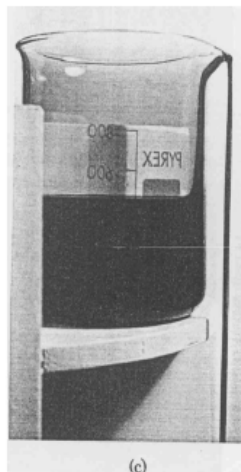
# Comportements non newtoniens



(a)



(b)

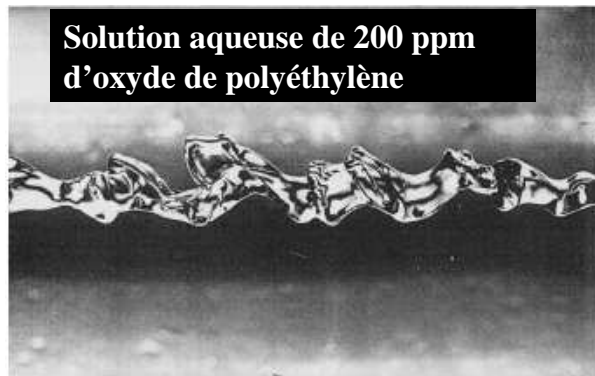
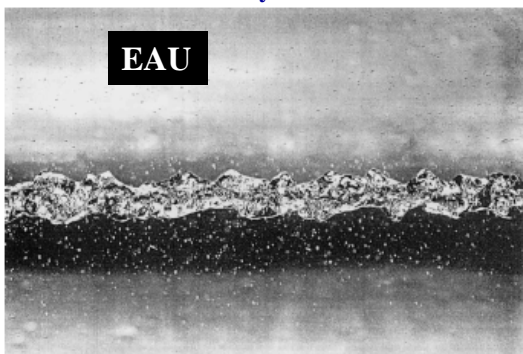


(c)

**Siphon ouvert** réalisé avec une solution aqueuse de 0.75% de polyox WSR 301. Développement du siphon à partir du versement initial hors du bécher.

D.V. Boger & K. Walters, Rheological phenomena in focus, Elsevier, 1993

## Jet à haut nombre de Reynolds



Bible, livre des Juges Chap.5, versé 5, chant de la prophétesse Déborah après la victoire de Baraq sur Sisera le Philistin:

« the mountains flowed (or melted) before the Lord »

(Sināi)

(Yahvé)

Tout n'est qu'une question d'échelle de temps caractéristique !

-500 avant J.C.: Héraclite: « panta rhei »  $\Rightarrow$  tout s'écoule.

1929: **Bingham** (chimiste): naissance de la **rhéologie** (du grec « rheô » couler et « logia » théorie)

- discipline née de l'incapacité des théories classiques de la mécanique des fluides et des solides au XIXe siècle à prédire le comportement de nombreux matériaux (verre, bois, ...)
- étude de la déformation et des écoulements
- science des mouvements de la matière en réponse à une sollicitation.
- Exemples: la mousse à raser ou la peinture peuvent s'étaler mais ne coulent pas.



Les montres molles, Salvador Dali

## NOMBRE DE DEBORAH

(d'après Prof. M. Reiner, Physics Today, 1964)

Nombre de Déborah:

$$De = \frac{t}{t_{obs}}$$

Temps de **relaxation** du fluide suite à une déformation – propriété intrinsèque de la matière.

Temps d'**observation** entre  $10^{-2}$  et  $10^3$  secondes

A l'échelle humaine:

Temps de relaxation  $\gg$  temps d'observation  $\rightarrow$  solide

Temps de relaxation  $\ll$  temps d'observation  $\rightarrow$  fluide

Eau:  $t \sim 10^{-12}$  s  $\Rightarrow$   $De \ll 1$

Polymères, tensioactifs:  $t \sim 10^{-2}$  s  $\Rightarrow$   $De \sim 1$

Systèmes vitreux (verres colloïdaux, émulsions):  $t \sim 10^3$  s -  $\infty$   $\Rightarrow$   $De \gg 1$

} **rhéologie**

Pour les ouvrages d'art (ponts, tunnels), le temps d'observation est la durée de mise en service. Il est à comparer au temps de relaxation du béton.



# The Deborah Number

By M. Reiner

The following lines are from an after-dinner talk presented at the Fourth International Congress on Rheology, which took place last August in Providence, R. I. Marcus Reiner, research professor at the Israel Institute of Technology, is currently in the United States as a visiting professor at the Polytechnic Institute of Brooklyn.

physics where such problems will be dealt with." I said, "This branch of physics already exists; it is called mechanics of continuous media, or mechanics of continua."

"No, this will not do," Bingham replied. "Such a designation will frighten away the chemists."

So he consulted the professor of classical languages and arrived at the designation of rheology, taking as the motto of the subject Heraclitus' *παντα ῥεει* or "everything flows."

Rheology has become a well-known branch of physics, but most typists think it is a misprint for rheology. I constantly receive mail addressed to the Theological Laboratory of the Israel Institute of Technology and, on the occasion of the Second International Congress at Oxford ten years ago, there was a special coach in the train at Paddington Station reserved for the members of the Theological Congress. This seems ridiculous, but there is some relation between rheology and theology, and on this I want to say a few words.

Heraclitus' "everything flows" was not entirely satisfactory. Were we to disregard the solid and deal with fluids only? There are solids in rheology, even if they may show relaxation of stress and consequently creep.\*

The way out of this difficulty had been shown by the Prophetess Deborah even before Heraclitus. In her famous song after the victory over the Philistines, she sang, "The mountains flowed before the Lord." When over 3000 years ago, the Bible was translated into English, the translators, who had never heard of Heraclitus, translated the passage as "The mountains melted before the Lord"—and so it stands in the authorized version. But Deborah knew two things: First, that the mountains flow, as everything flows. But, secondly, that they flowed before the Lord, and not before man, for the simple reason that man in his short lifetime cannot see them flowing, while

the time of observation of God is infinite. We may therefore well define as a nondimensional number the Deborah number

$$D = \frac{\text{time of relaxation/time of observation}}$$

The difference between solids and fluids is then defined by the magnitude of  $D$ . If your time of observation is very large, or, conversely, if the time of relaxation of the material under observation is very small, you see the material flowing. On the other hand, if the time of relaxation of the material is larger than your time of observation, the material, for all practical purposes, is a solid. In problems of industrial design, you may introduce the *time of service* for the time of observation. When designing a concrete bridge you make up your mind to decide how long you expect it to serve, and then compare this time interval with the time of relaxation of concrete.

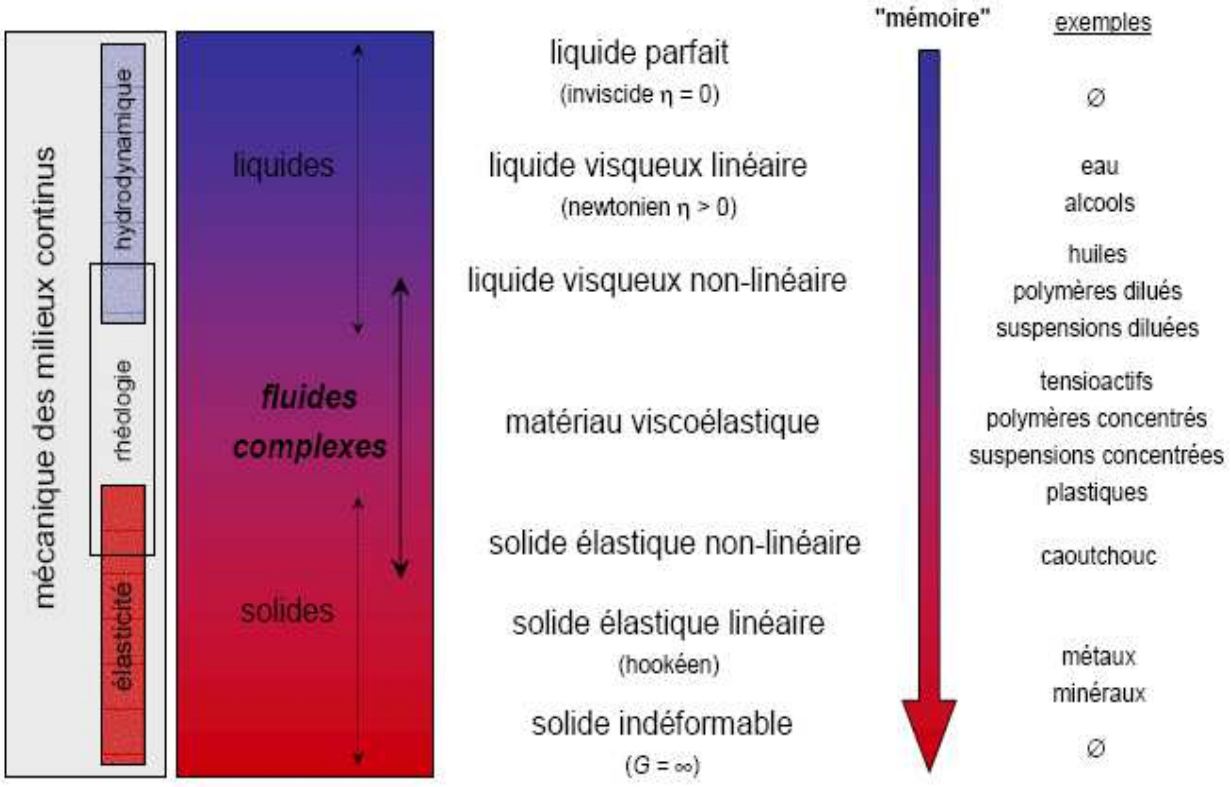
It therefore appears that the Deborah number is destined to become the fundamental number of rheology, bringing solids and fluids under a common concept, and leaving Heraclitus' *παντα ῥεει* as a special case for infinite time of observation, or infinitely small time of relaxation. The greater the Deborah number, the more solid the material; the smaller the Deborah number, the more fluid it is.

There is a story they tell about two students of theology. They were praising the Almighty God. Said one: "For God, one thousand years are like a minute. And as He is the Creator of all, a thousand dollars are for Him like a cent." Said the other: "Wonderful; next time I pray to God, I shall pray, 'God, give me a cent.'" Said the first: "What will it help you? He will say 'Wait a minute!'"

This man did not take care of the difference between God's and his own time scale. And this is the connection between rheology and theology. In every problem of rheology make sure that you use the right Deborah number.

\* and at this Congress a large number of papers dealt with solids.

## Tentative de classification des fluides complexes



# CONTRAINTE

Forces surfaciques à courtes portées dont l'origine est dans les interactions moléculaires qui assurent la cohésion du liquide (pression, forces visqueuses...). Sur un élément de surface  $dS$ , de normale unité  $\vec{n}$ , cette force de surface s'écrit:

$$d\vec{F} = \sigma \cdot \vec{n} dS$$

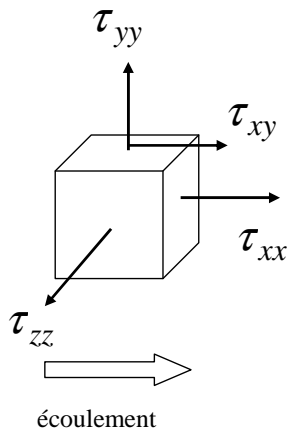
Le tenseur des contraintes est noté  $\sigma$ . Il est **symétrique**. Les termes diagonaux sont les **contraintes normales** et les autres sont les **contraintes tangentielles**.

Dans un fluide en mouvement, il se décompose en 2 parties:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

↑  
pression (partie isotrope)

← déviateur (partie anisotrope)  
contrainte de viscosité

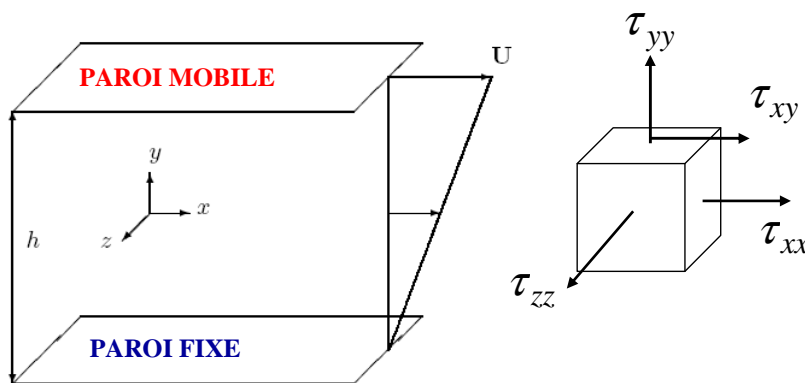


$$\tau_{ij} = \begin{cases} \tau_{xx} & \tau_{xy} = \tau_{yx} & \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} = \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{cases}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} -p + \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -p + \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & -p + \tau_{zz} \end{cases}$$

# CONTRAINTE (2)

## Cisaillement pur – Ecoulement de Couette plan

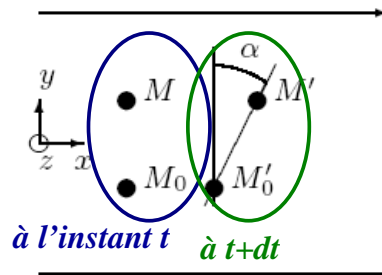
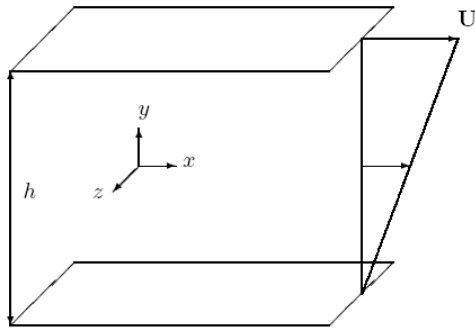


$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \approx \mu \frac{U}{h}$$

# DEFORMATION

Sous l'action des contraintes, un matériau va se déformer.

## Cisaillement pur



Vitesse du fluide parallèle à l'axe des x

$$M_0(x, y, z) \longrightarrow M'_0(x + \xi, y, z)$$

$$M(x, y + dy, z) \longrightarrow M'(x + \xi + (d\xi/dy)dy, y + dy, z)$$

On appelle **déformation**, la variation du déplacement lorsqu'on passe d'une couche à une couche infiniment voisine:

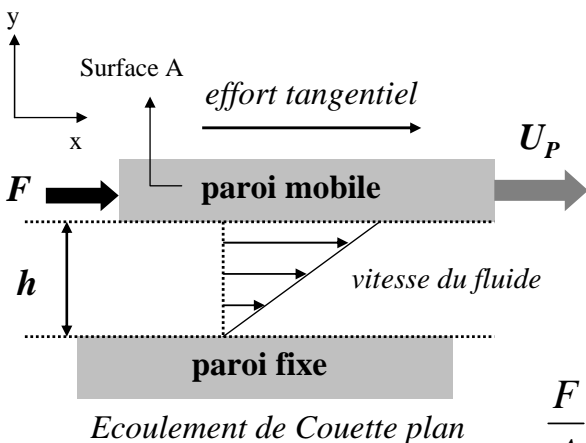
$$\gamma = \frac{d\xi}{dy} = \tan \alpha \longrightarrow \dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d\xi}{dy} = \frac{d}{dy} \frac{d\xi}{dt} = \frac{du}{dt}$$

Ici, la vitesse de déformation et le taux de cisaillement sont égaux.

Le **taux de cisaillement** dans le cas général en 2D s'exprime par:

$$e_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

# VISCOSITE DYNAMIQUE



Il faut exercer un effort tangentiel pour maintenir la paroi en mouvement et à une vitesse constante  $U_p$ .

L'intensité  $\tau_p$  de la densité surfacique d'effort associée est proportionnelle à l'intensité du taux de cisaillement :

$$\frac{F}{A} = \tau_{yx} = \mu \frac{dV_x}{dy} = \mu \dot{\gamma} \longrightarrow \tau_p = \mu \frac{U_p}{h}$$

Expérimentalement, on fixe le plus souvent  $U_p$  (ie  $\dot{\gamma}$ ) et on mesure  $\tau_p$ . On en déduit le coefficient de proportionnalité  $\mu$ . C'est une **propriété matérielle du fluide**, que l'on appelle **viscosité dynamique**. Elle s'exprime en **Pa.s** dans le système SI. Les autres unités que l'on rencontre sont le Poiseuille (Pl) et le Centipoise (Cpo) avec la correspondance suivante:

$$1 \text{ Pa.s} = 1 \text{ kg/m/s} = 1 \text{ Pl} = 1000 \text{ Cpo}$$

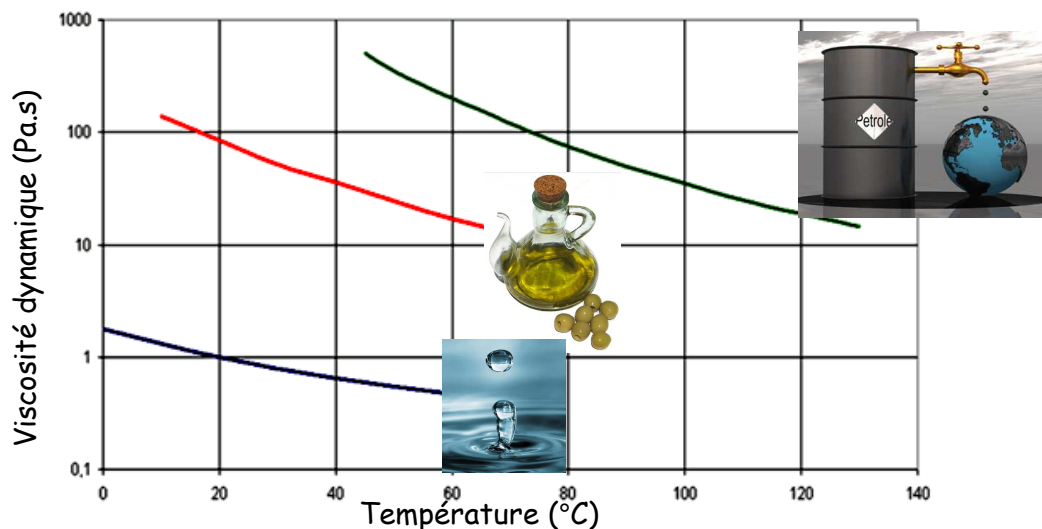
## Quelques valeurs typiques

Produits	Viscosité dynamique en Pa .s	Viscosité cinématique (m <sup>2</sup> /s)
H2	8,9.10 <sup>-6</sup> $\mu$	105.10 <sup>-6</sup> $\nu$
air	18,5.10 <sup>-6</sup>	15,6.10 <sup>-6</sup>
hexane	0,3. 10 <sup>-3</sup>	0,46.10 <sup>-6</sup>
benzène	0,652.10 <sup>-3</sup>	0,741.10 <sup>-6</sup>
eau	1,005.10 <sup>-3</sup>	1,007.10 <sup>-6</sup>
mercure	1,554.10 <sup>-3</sup>	0,1147.10 <sup>-6</sup>
lait	2,0.10 <sup>-3</sup>	1,93.10 <sup>-6</sup>
sang de l'homme à 37°C	4,0.10 <sup>-3</sup>	
huile d'olive	84.10 <sup>-3</sup>	91,5.10 <sup>-6</sup>
glycérol	1,49	1182.10 <sup>-6</sup>
gels /crèmes	1 à 100	
vernis /peintures	10 à 1000	
résines/goudron/bitume	100 à 100 000	
glace à 0°C	10 <sup>13</sup>	
granit	10 <sup>20</sup>	

Valeurs caractéristiques de viscosités dynamiques et cinématiques obtenues à 20°C et 1 bar.

Rappel:  $\nu = \mu / \rho$

## Influence de la température



La viscosité des liquides diminuent lorsque la température augmente.

Pour les gaz, la viscosité provient des collisions entre les molécules et donc elle augmente quand la température augmente (à condition que le gaz soit à pression constante).



$$\mu_{\text{eau}} > 50 \mu_{\text{air}} \text{ mais } \nu_{\text{air}} \approx 20 \nu_{\text{eau}}$$



# LOI DE NEWTON

Un fluide **newtonien** est défini comme un fluide satisfaisant une **relation linéaire entre sa contrainte et son taux de cisaillement**.

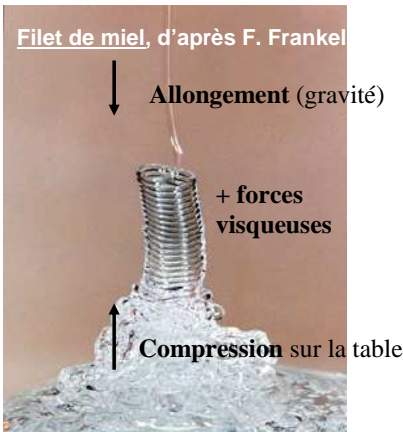
$$\tau_{ij} = \mu \dot{\gamma}_{ij} \Rightarrow \tau = \mu \dot{\gamma}$$

taux de cisaillement
contrainte
viscosité dynamique

Ex. pour un écoulement 1D de type Couette plan:

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dy}$$

Loi de Newton vraie pour l'air, l'eau, le pétrole, l'alcool, les gaz, le glycérol, le miel...



$\tau$	$\text{g.cm}^{-1}\text{s}^{-2}$	<b>Pa</b>
$du/dy$	$\text{s}^{-1}$	$\text{s}^{-1}$
$\mu$	Poise (0.1 Pa.s)	<b>Pa.s</b>
$\nu$	Stokes ( $\text{cm}^2/\text{s}$ )	<b><math>\text{m}^2/\text{s}</math></b>

**Les écoulements de fluide newtonien sont réversibles !**

## Equations

•Équations de conservation:

- conservation de la masse = équation de continuité  $\boxed{\text{div}\vec{V} = 0}$  *Matériau incompressible*

- conservation de la quantité de mouvement (Navier-Stokes dans le cas newtonien)

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad})\vec{V} \right] = \text{div}\vec{\tau} + \vec{f}$$

*Équation de Cauchy*

avec  $\vec{f}$  forces volumiques à longues portées (gravité, forces électriques, magnétiques...).

•Relations constitutives qui dépendent des propriétés et de la nature du matériau:

$$\boxed{\tau_{ij} = f(\dot{\gamma}_{ij})} \quad \dot{\gamma}_{ij} \text{ tenseur taux de déformation}$$

## Hypothèses :

- Écoulement isotherme
- Écoulement stationnaire et inertie négligeable
- Écoulement homogène, pas de glissement

## Fluides non newtoniens

- **Exemples de fluides complexes ou non newtoniens:**

ketchup, moutarde, mayonnaise, harissa, eau + maïzena, sang, polymères, peinture, neige, boue, crème...

Cela est dû à la présence dans le fluide de structures de grande taille par rapport à l'échelle atomique (ex: gouttelettes dans des émulsions, particules dans des suspensions...)

- **Effets visqueux non linéaires ou forts effets de mémoire**

- Pour les fluides non newtoniens, on peut définir de la même façon une relation de la forme:

$$\tau_{ij} = \mu_{app} \dot{\gamma}_{ij} \quad \longrightarrow \quad \tau = \mu_{app} \dot{\gamma}$$

viscosité apparente

Par contre, la viscosité apparente du fluide n'est ici pas constante contrairement au cas d'un fluide newtonien. **La viscosité apparente du fluide dépend du taux de cisaillement !**

$$\mu_{app} = K |\dot{\gamma}|^{n-1} \Rightarrow \tau = K \dot{\gamma}^n$$

**Équation constitutive du fluide dite de type loi de puissance ou d'Ostwald – de Waehle**

**K** indice de consistance (Pa.s<sup>n</sup>)

**n** indice d'écoulement ou de comportement

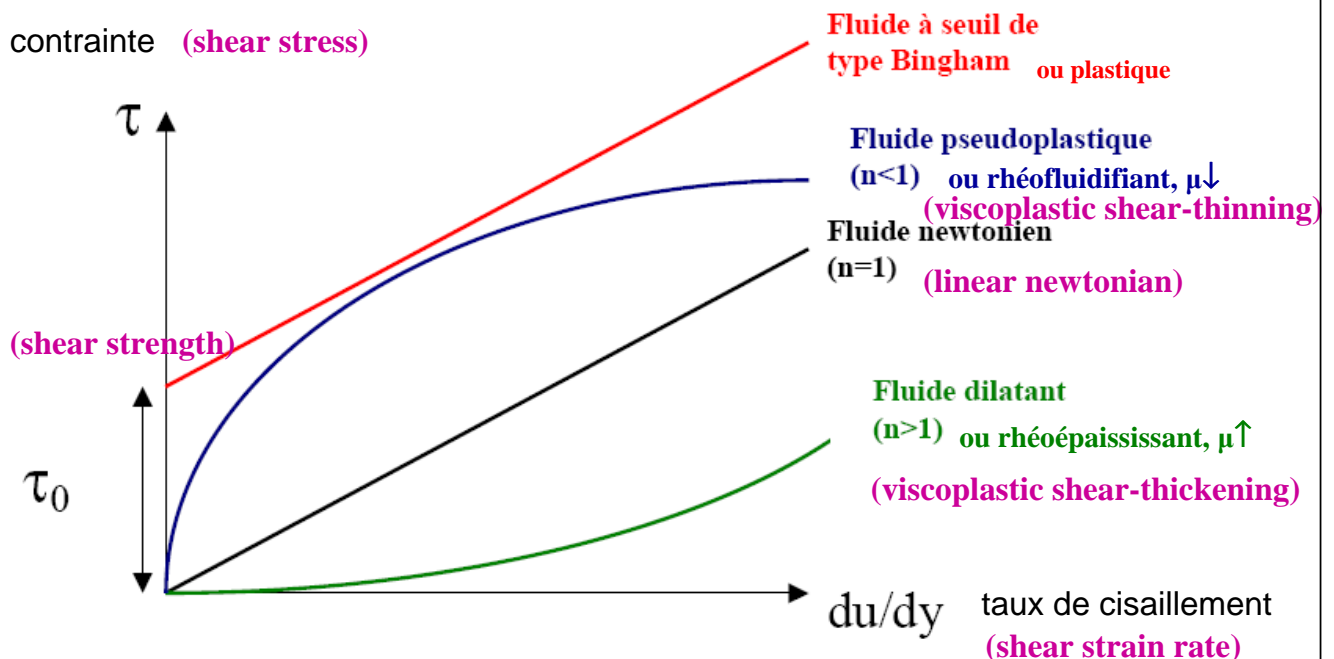
## Relations entre contrainte et taux de cisaillement pour différents fluides

### Loi de puissance ou d'Ostwald – de Waehle :

$$\mu_{app} = K |\dot{\gamma}|^{n-1} \Rightarrow \tau = \mu_{app} \dot{\gamma} = K \left( \frac{du}{dy} \right)^n$$

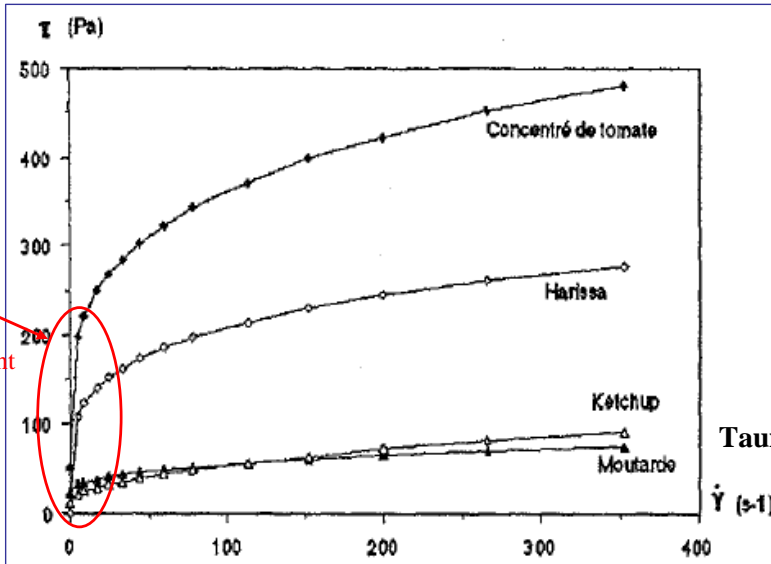
loi valide pour une certaine gamme de taux de cisaillement !

pas réaliste pour  $du/dy \rightarrow 0$  ou  $\infty$



## Exemples de rhéogramme pour quelques produits alimentaires

contrainte



D'après A. Hamza-Chaffai, Sciences des Aliments, 11, 1991.

Modèle d'Ellis pour prendre en compte la zone linéaire pour  $\mu_0$  (même chose pour  $\mu_\infty$  avec le modèle de Sisko)

Taux de cisaillement

Produit	Temps (°C)	Vitesse (s <sup>-1</sup> )	Modèle	$\tau_0$ (Pa)	K (Pa·s <sup>n</sup> )	n	Source
	26	5,59- 352	Herschel-Bulkley	51,3	103,2	0,21	Présent travail *
Concentré de tomate	25	5,59- 352	Loi en puissance	-	100	0,26	Rao et al., 1981 *
	23	1 -1600	Herschel-Bulkley	43	93,9	0,26	Barbosa-Canovas et Peleg, 1983 *
	-	-	-	120-123	-	-	Kaltunc-Cancor et Peleg, 1984 *

$\tau_0$ : contrainte seuil

K: Indice de consistance

n: Indice d'écoulement

Résultats dépendant du mode opératoire (types de rhéomètres), de la température

## Catalogue de lois de comportement

En général:  $\tau = \mu_{app} \dot{\gamma}$

$$\tau = \mu_0 \dot{\gamma} + K\dot{\gamma}^n \quad \text{Sisko}$$

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + (\tau_{yx} / \tau_{1/2})^{\alpha-1}} \quad \text{Ellis}$$

$$\tau = \left[ \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (\lambda\dot{\gamma})^n} \right] \dot{\gamma} \quad \text{Cross}$$

$$\tau = \left[ \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{(1 + \lambda^2 \dot{\gamma}^2)^n} \right] \dot{\gamma} \quad \text{Williams}$$

$$\tau = \left[ \frac{1 + (\lambda\dot{\gamma})^n}{\alpha + (\lambda\dot{\gamma})^n} \right]^2 \mu_\infty \dot{\gamma} \quad \text{Quemada}$$

$$\tau = \left[ \frac{1 + \alpha\sqrt{\dot{\gamma}}}{1 + \beta\sqrt{\dot{\gamma}}} \right]^2 \mu_0 \dot{\gamma} \quad \text{Stoltz-Ravey}$$

$$\tau = \left[ \frac{1 + \alpha\dot{\gamma}}{1 + \beta\dot{\gamma}} \right] \mu_0 \dot{\gamma} \quad \text{Olroyd (1950)}$$

$$\tau = \left[ \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \frac{1 + \log(1 + \lambda\dot{\gamma})}{1 + \lambda\dot{\gamma}} \right] \dot{\gamma} \quad \text{Yeleswarapu}$$

SANG

• • •

## Fluides pseudoplastiques ou rhéofluidifiants ( $n < 1$ ):

La viscosité apparente (effective) diminue lorsque le gradient de vitesse (la contrainte) augmente.

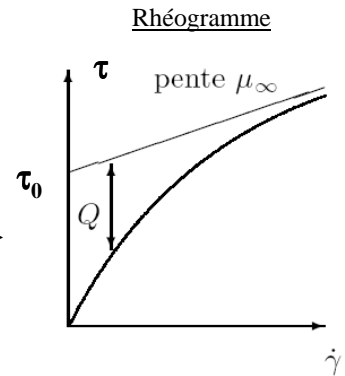
Exemples: huiles et graisses utilisées en rhéofluidification, sang, solutions de polymères, shampoing, concentrés de jus de fruits, encres d'imprimerie...

Remarque: **seuil + rhéofluidifiant** = fluide de Casson

loi de puissance: 
$$\mu_{app} = K \dot{\gamma}^{n-1}$$

loi de Carreau: 
$$\frac{\mu_{app} - \mu_{\infty}}{\mu_0 - \mu_{\infty}} = \left( 1 + \lambda^a \left( \frac{du}{dy} \right)^a \right)^{\frac{n-1}{a}}$$
  
 $\lambda$  temps caractéristique

loi de Shandraw: 
$$\tau = \tau_0 + \mu_{\infty} \dot{\gamma} - \tau_0 \exp(-b \dot{\gamma})$$



## Fluides dilatants ou rhéoépaississants ( $n > 1$ ):

La viscosité apparente augmente lorsque le gradient de vitesse augmente.

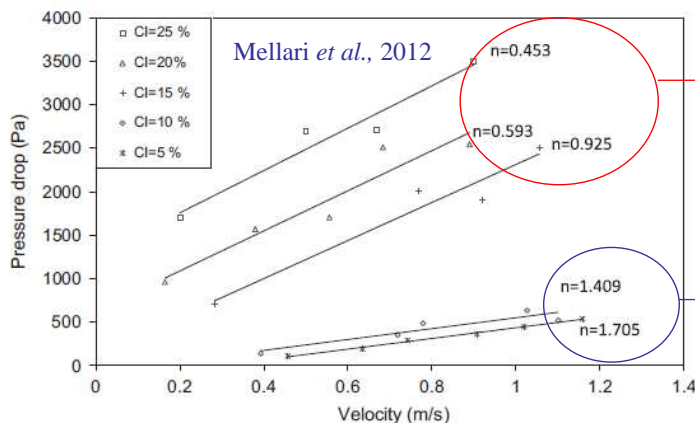
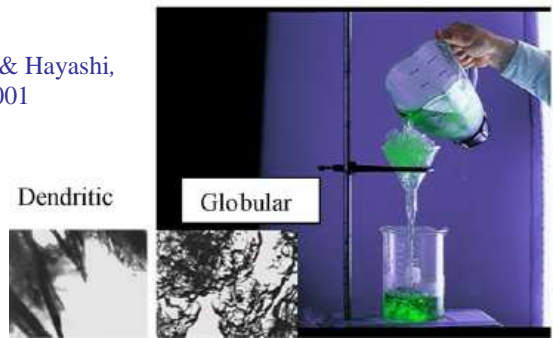
Exemples: suspensions fortement concentrées dans lesquelles la phase liquide n'occupe pratiquement que les interstices entre particules solides, comme les solutions colloïdales d'argile dans l'eau, sable mouillé, suspensions concentrées d'amidon.

Remarque: il n'y a **jamais de seuil**. On utilise la loi de puissance pour les représenter.

## Exemple du coulis de glace (antigel+eau+glace)



Kasza & Hayashi, 2001



Comportement rhéofluidifiant pour des hautes valeurs de concentrations en glace

Comportement rhéoépaississant pour des faibles valeurs de concentrations en glace

Fig. 2 – Effect of the flow velocity, ice and solute mass fraction on the pressure drop for  $D = 2.54$  cm and  $C_s = 5\%$ .



# Fluides à seuil ou fluides (visco)plastiques



D'après Coussot et al., PRL 88, 2002

Fluide à seuil sur un plan incliné

Exemples:

- suspensions de solides dans un liquide, solutions de polymères...
- Crèmes et émulsions, pâtes dentifrices, ciment frais, concentrés de tomate.

## Loi de Bingham

peintures

$$\tau = \tau_0 + \mu \left( \frac{du}{dy} \right)$$

## Loi de Casson

Argiles, sang

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \sqrt{\mu \left( \frac{du}{dy} \right)}$$

## Loi de Herschel-Bulkley

peintures

$$\tau = \tau_0 + A \left( \frac{du}{dy} \right)^n$$

viscosité plastique



$$\mu_{app} = \mu + \frac{\tau_0}{\left( \frac{du}{dy} \right)}$$



Fluides à seuil et rhéofluidifiants

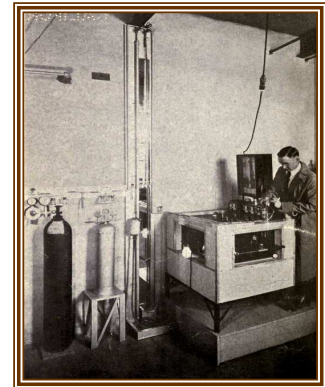
Remarques: paramètres dépendant de la température T:  $\mu \propto \exp(A/(RT))$

fluides à seuil souvent thixotropes:  $\mu = f(t, du/dy)$

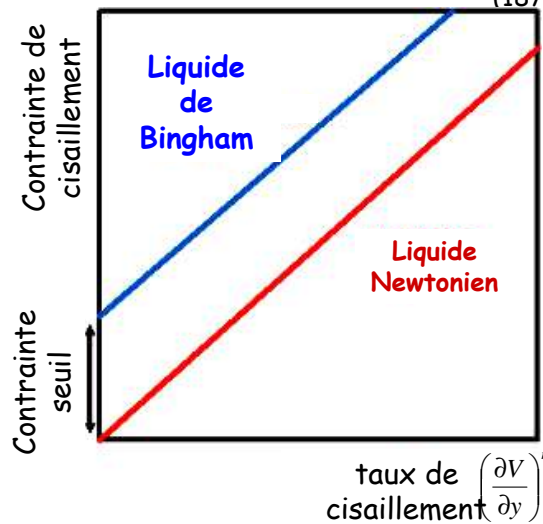
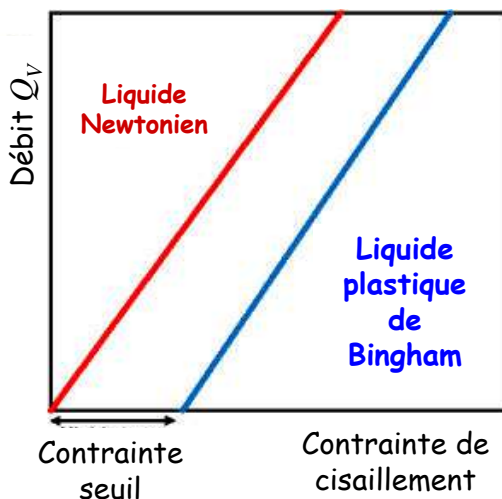
# Fluides à seuil de type Bingham

Il existe une contrainte seuil au-dessous de laquelle il n'y a pas d'écoulement.

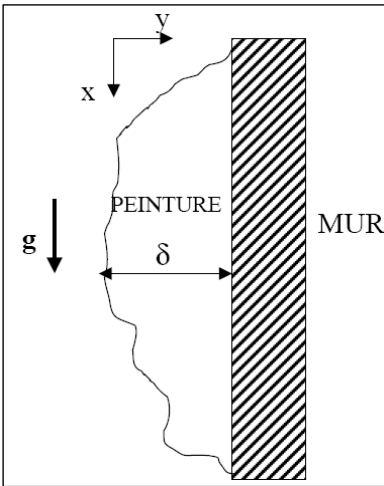
Exemple: le dentifrice. Il ne peut sortir du tube sous l'action de son propre poids, il faut appuyer sur le tube pour « franchir le seuil de contrainte ».



Eugene Bingham (1878- 1945)



**Exercice : L'écoulement d'une peinture le long d'un mur vertical.**



**Hypothèses:**

1. peinture = fluide à seuil de type Bingham,
2. écoulement 2D stationnaire,
3. couche de peinture de même épaisseur quelque soit x.

Question:  
Déterminer l'épaisseur maximale de peinture à partir de laquelle on observera un écoulement de peinture le long du mur vertical.

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ 0 = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow P = Cte(x) \end{cases} \Rightarrow 0 = g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

or  $dP/dx=0$  à l'interface donc  $dP/dx=0$  partout.

+ conditions aux limites:  $\tau_{yx}(y = 0) = 0$   
 $u(\delta) = 0$

**Exercice : L'écoulement d'une peinture le long d'un mur vertical.**

On obtient alors par intégration:

$$\tau_{yx} = -\rho g y$$

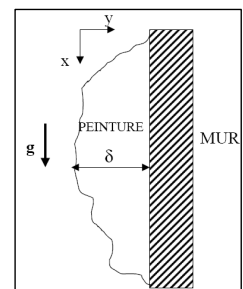
On considère alors un fluide à seuil de type Bingham, pour lequel on a:

$$\begin{aligned} \rho g y &= \tau_0 + \mu \frac{du}{dy} & |\tau| > \tau_0 \\ \frac{du}{dy} &= 0 & 0 \leq \tau \leq \tau_0 \end{aligned}$$

L'épaisseur maximale atteinte  $\delta_{max}$  est obtenue pour  $\tau = \tau_0$  et  $du/dy = 0$ . On a ainsi:

$$\begin{aligned} \rho g \delta_{max} &= \tau_0 \\ \Rightarrow \delta_{max} &= \frac{\tau_0}{\rho g} \end{aligned}$$

Une couche de peinture plus épaisse que  $\delta_{max}$  induit un écoulement de peinture dans la direction x le long du mur.



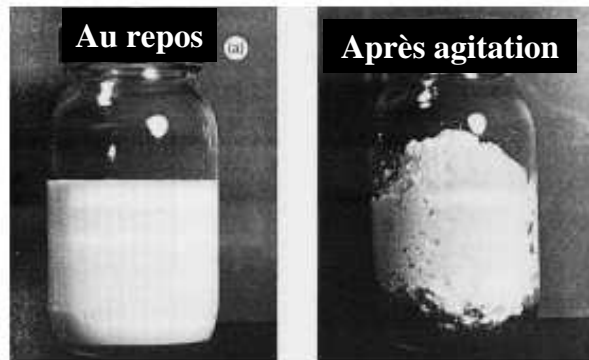
## Thixotropie (1)

Les fluides thixotropes ont une **viscosité qui diminue avec le temps** quand on leur applique une contrainte constante. Après suppression de cette contrainte, on ne retrouve la viscosité initiale qu'après un certain temps plus ou moins long. C'est un phénomène réversible. Tous les fluides sont plus ou moins thixotropes.

Ex.: moutarde, ketchup, yahourt, peintures, boues de forage, pâte de gypse, certains polymères.

Le caractère thixotrope de certaines peintures est exploitée en ajustant le temps de restructuration en fonction des besoins. Ces peintures ne doivent pas couler au repos avant séchage mais on doit pouvoir les étaler facilement. Cette propriété est obtenue en ajoutant de fines particules d'argile le plus souvent. Au repos, cela forme des agrégats et cela permet d'ajuster la cinétique de re-/destruction.

### Déstructuration



D.V. Boger & K. Walters, Rheological phenomena in focus, Elsevier, 1993

## Thixotropie (2)

L'inverse de la thixotropie est la **rhéopexie**. Ces fluides ont une viscosité qui **augmente** avec le temps quand on leur applique une contrainte constante. Après suppression de cette contrainte, on ne retrouve la viscosité initiale qu'après un certain temps plus ou moins long.

$$De = \frac{t}{T}$$

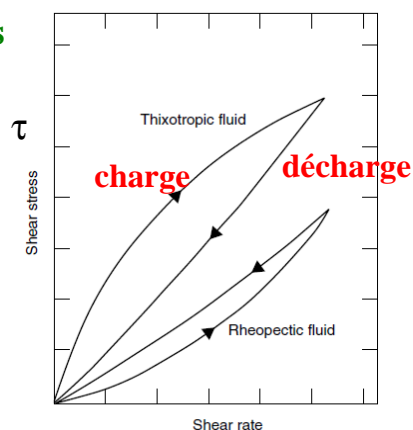
← Temps de réarrangement de la structure interne du fluide.

← Temps de variation de la contrainte.

Si  $De \ll 1$ , le fluide a le temps de se réarranger lorsqu'on fait varier la contrainte ou le cisaillement.

Si  $De \gg 1$ , il y a évolution des propriétés rhéologiques du fluide  $\Rightarrow$  hystérésis, cycle limite.

### Boucle d'hystérésis (effet mémoire)



Modèle thixotrope de Cheng:

$$\tau = \underbrace{\tau_0 + \mu\dot{\gamma}}_{\tau_{\text{équilibre}}} + \underbrace{\tau_c e^{-t/\lambda}}_{\tau_{\text{structurel}}}$$

contrainte à l'équilibre      prend en compte la thixotropie

## Thixotropie (3): le cas du ketchup

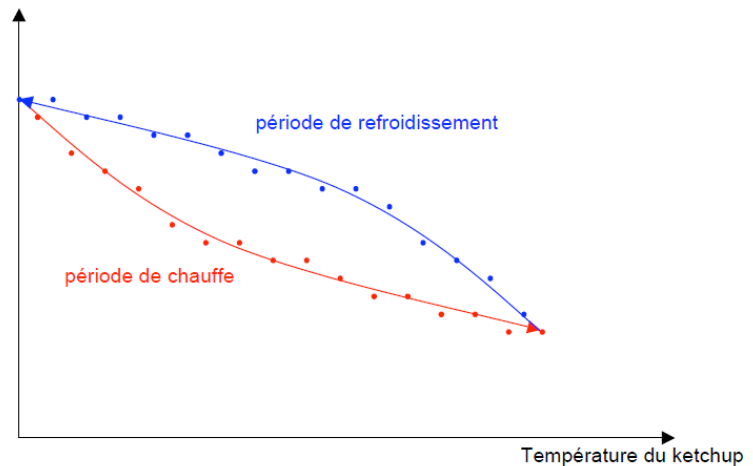


Au repos, le ketchup est épais et ne veut jamais rejoindre l'assiette. Lorsqu'on l'agite fortement, il devient fluide et s'écoule. Ce caractère thixotrope peut être mis en évidence en chauffant le ketchup.

Mesure du temps de chute d'un poids donné dans du ketchup = mesure de la viscosité du ketchup.

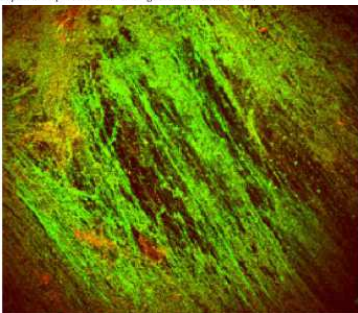
Influence de la température.

Temps de chute = viscosité



## Thixotropie (4): le mucus bronchique

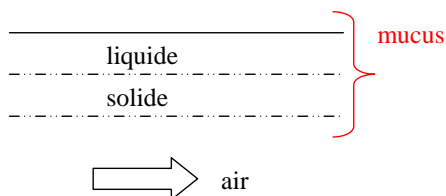
Fig. 7. Confocal micrograph of CF sputum showing DNA polymers in green (YOYO-1 stain) and minimal mucin staining in red (JAE-Texas red). Figure obtained from Ref. [81]. Color reproduction of this figure is available online.



Le mucus respiratoire peut être considéré comme un gel capable à la fois de s'écouler comme les liquides (viscosité) et de se déformer comme les solides (élasticité).

Le transport du mucus par le tapis mucocillaire dépend notamment de ces propriétés de visco-élasticité. Dans la mucoviscidose, la viscosité est trop élevée.

Mais ce mucus est thixotrope, c'est à dire que sa viscosité peut changer. In vitro lorsqu'on fait subir des oscillations de fréquence adaptée (10 à 15 Hz) à du mucus prélevé chez des patients atteints de pathologies respiratoires chroniques, sa viscosité diminue pour se rapprocher de la viscosité du mucus des individus sains → jusqu'à 50% de mucus expectorié en plus.



Appareil d'aide à l'expectoration:

- Fréquence optimale ?
- Forme du signal ?
- Universalité des paramètres ?
- Temps et répétition des séances ?
- Caractérisation rhéologique du mucus ?



## Viscoélasticité

**Les solides élastiques:** les liens intermolécules se tendent mais ne se rompent pas. Décrit par le modèle de Kelvin-Voigt.

**Les fluides viscoélastiques:** comportement (instantané) élastique + comportement visqueux (au temps long).

L'importance du caractère solide pour ces fluides dépend de la façon dont est appliquée la sollicitation  $\tau$ . Si la contrainte est brutale, il se comporte comme un solide et si la contrainte est régulière comme un fluide.

Exemple le silli-putti (élastomère à base de silicone): posé sur une table, il s'étale. En forme de boule, si on le jette, il rebondit. Si on le frappe avec un marteau, il se brise comme du verre (à la température ambiante).

Applications: emballages, textiles, pneus... tous les polymères (appelés plastiques).

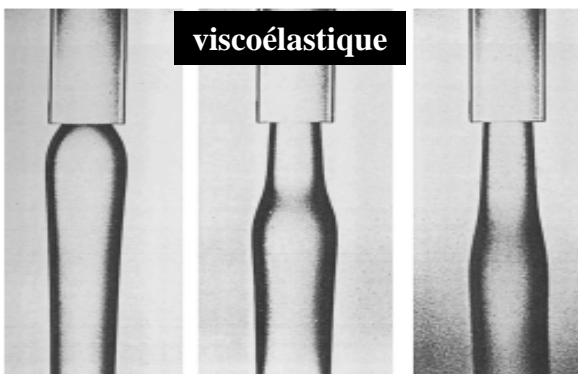
Modèle ou corps de Maxwell:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Taux de variation de} \\ \text{la contrainte petit} \end{array} \right\} \tau = \mu \frac{du}{dy}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Variations rapides de} \\ \text{la contrainte de cisail.} \end{array} \right\} \frac{d\tau}{dt} = A \frac{du}{dy}$$

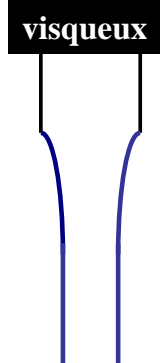
$$\Rightarrow \tau + \frac{\mu}{A} \frac{d\tau}{dt} = \mu \frac{du}{dy} \Rightarrow \mu_{app} = \mu + \left( 1 - \frac{\frac{d\tau}{dt}}{A \frac{du}{dy}} \right)$$

## Viscoélasticité



**viscoélastique**

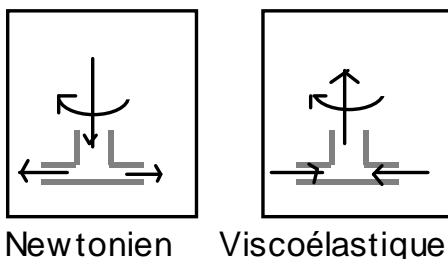
Gonflement retardé à l'extrusion pour une solution aqueuse de 5% de polyacrylamide lorsque  $Re$  augmente. D'après D.V. Boger & K. Walters, *Rheological phenomena in focus*, Elsevier, 1993



**visqueux**

Un **jet laminaire issu d'un orifice** se contracte sous l'effet de l'accélération due à la pesanteur. Un fluide viscoélastique présente un ralentissement et un élargissement du jet dus aux contraintes orthogonales et aux contraintes de cisaillement.

### Écoulement de disques tournants avec le disque supérieur percé



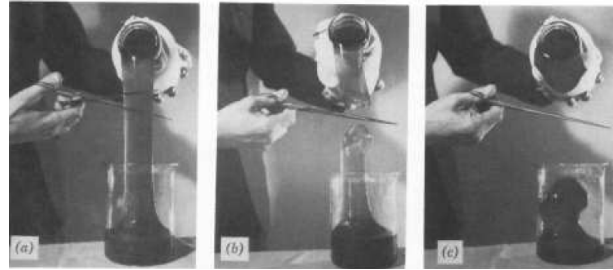
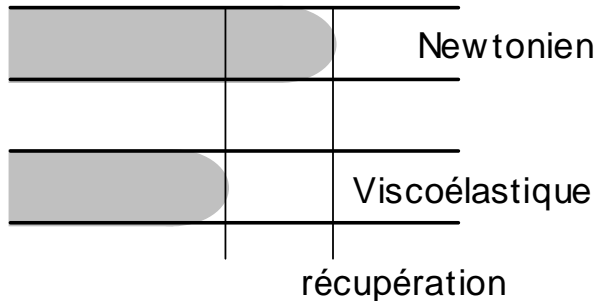
Newtonien

Viscoélastique

Inversion du sens de l'écoulement

# Viscoélasticité

## Écoulement dans un tube sous une différence de pression $P_1-P_2$



Il s'établit un profil de vitesse parabolique lorsque les forces de viscosité prédominent. En régime permanent, si les viscosités d'un fluide newtonien et d'un fluide viscoélastique sont les mêmes, les profils de vitesse sont identiques pour un même débit.

Le profil de vitesse peut être traduit visuellement en colorant le fluide à un instant donné. Le colorant se propage dans le tube avec un front parabolique, ce qui retrace le profil de vitesse. Si on stoppe le débit, ce front de couleur se conserve pour un fluide newtonien alors qu'il se rétracte pour un fluide viscoélastique suite à la **récupération élastique**. Cela peut poser des problèmes pour des écoulements transitoires (vannes,...).

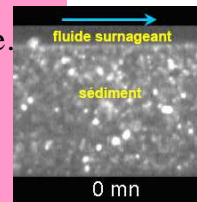
Autres exemples: la pâte à pain, des fibres textiles artificielles, les gelées, certaines mousses...

## Approches expérimentales

### MESURES 2D ou 3D résolues en temps

- Méthodes optiques: visualisation directe, suivi optique de particules, microscopie.
- Imagerie par résonances magnétique, vélocimétrie ultrasonore...

⇒ **Méthodes coûteuses en temps et en argent et pas nécessaires pour des industriels (agroalimentaire, traitements des eaux...)**



### MESURES GLOBALES

- Mesure de débit à travers un tube sous une pression donnée
- Mesure de vitesse de la chute d'une bille dans un fluide (Viscosimètre de Haake)
- Mesure du temps de vidage d'un certain volume de fluide à travers un entonnoir

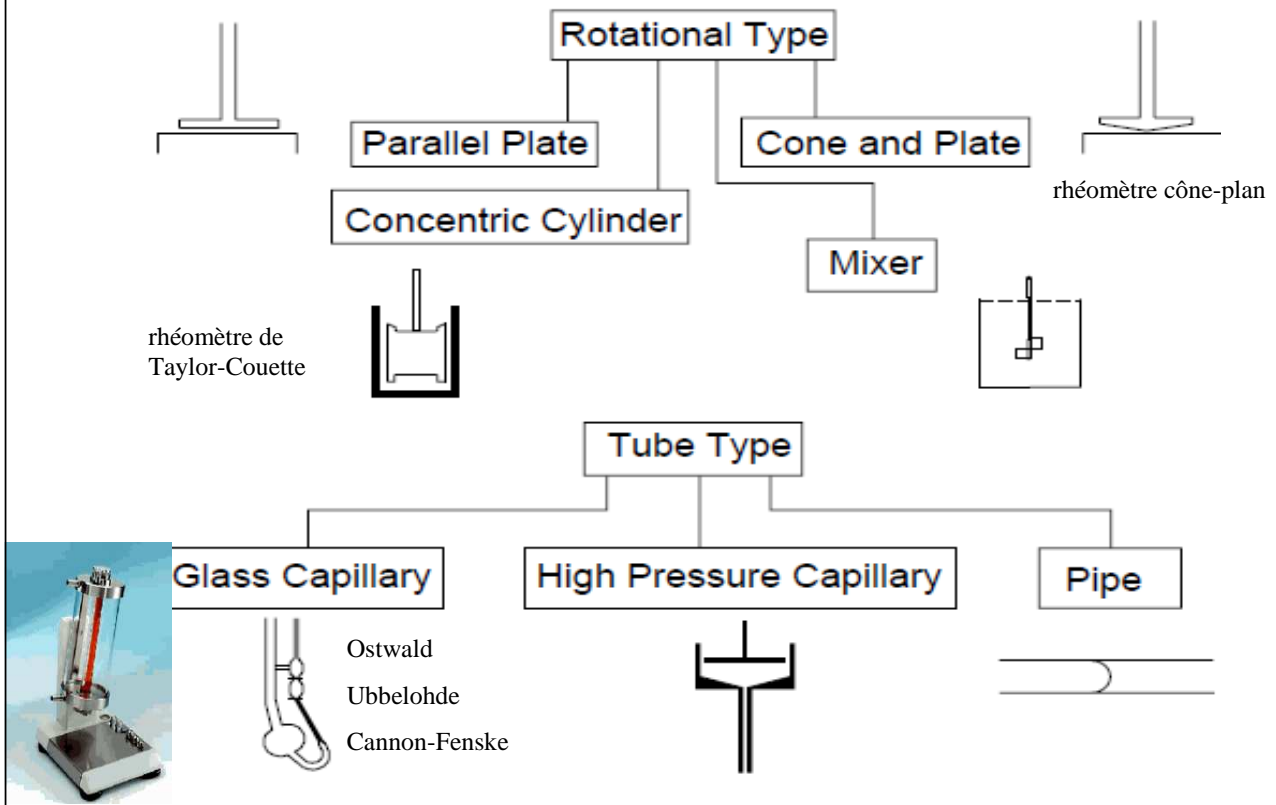
⇒ **Bonnes approches pour des fluides newtoniens !**

⇒ 2 problèmes pour des fluides non newtoniens :

1. Le taux de cisaillement dans ces dispositifs est parfois difficile à calculer.
2. Le taux de cisaillement n'est pas constant.

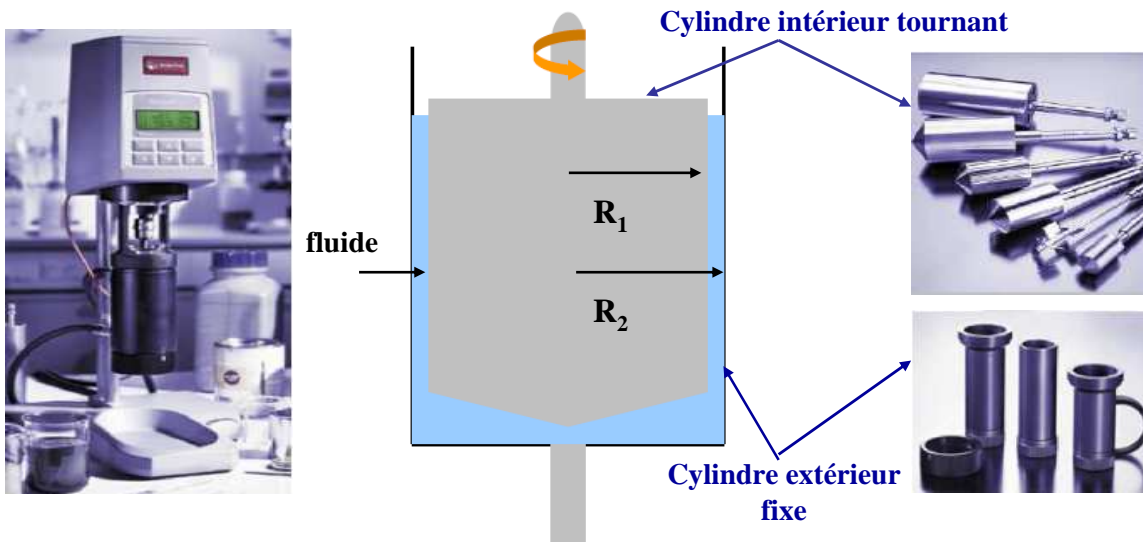
**D'où le besoin d'utiliser des géométries où le taux de cisaillement est connu et quasi constant dans le volume de mesure.**

## Deux grandes familles d'instruments pour la rhéologie



D'après J.F. Steffe, Rheological methods in food process engineering, Freeman Press, 1996.

## Rhéomètre de Couette



- $R_1$  et  $R_2 \approx 1$  à quelques centimètres et entrefer  $R_2 - R_1 \approx$  quelques millimètres

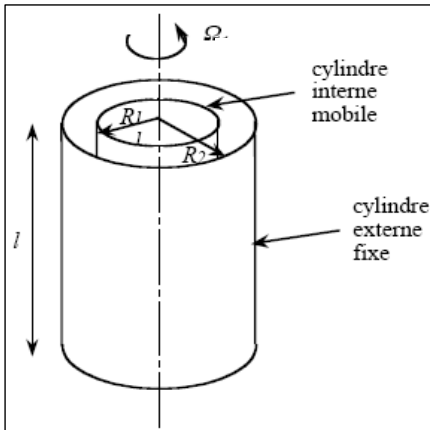
cisaillement constant si  $R_2 - R_1 \ll R_2$        $(R_2 - R_1)/R_1 < 0.15$  entrefer étroit

-Forme conique sur le bas pour éviter les effets parasites

-2 types de rhéomètre de Couette:

1. À *cisaillement imposé*: on impose la vitesse de rotation et on mesure le couple.
2. À *contrainte imposée*: on impose le couple et on mesure la vitesse de rotation obtenue.

## Dispositif de Taylor-Couette



2 cylindres coaxiaux de rayons  $R_1$  et  $R_2$ , le cylindre intérieur tournant à  $\Omega$  et le cylindre extérieur étant fixe.

Vitesse (U,V,W), coordonnées cylindriques (r,  $\theta$ , z)

Hypothèses: aucun gradient de pression extérieur

faibles vitesses de rotation

écoulement stationnaire, axisymétrique, invariant en z (fort rapport  $l/R_1$ )

➡ Pas de vitesse axiale  $W=0$  et vitesse tangentielle V indépendante de  $\theta$

➡ Vitesse radiale nulle  $U=0$

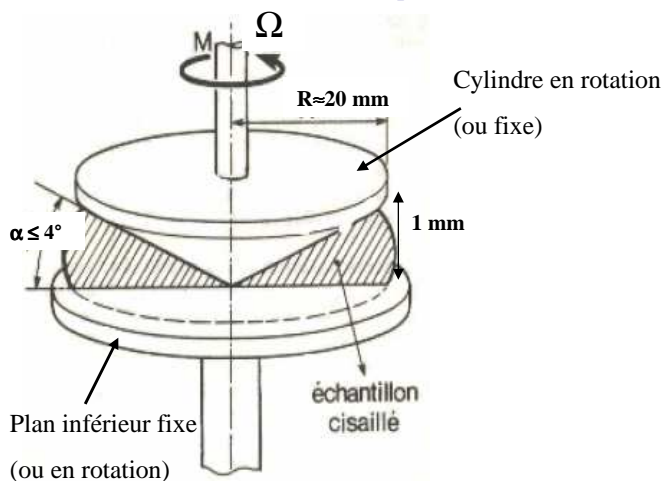
D'où  $V = a r + b / r$  avec  $V=0$  en  $R_2$  et  $V=\Omega R_1$  en  $R_1$

$$\rightarrow V = \frac{\Omega}{R_2^2 - R_1^2} \left( \frac{R_1^2 R_2^2}{r} - R_1^2 r \right) \rightarrow \dot{\gamma} = \left| \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} \right| = \frac{2\Omega}{1 - (R_1/R_2)^2}$$

$$\rightarrow \tau = \tau_{r\theta}(R_1) = \frac{M}{2\pi l R_1^2} = \frac{2\Omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \mu \quad \text{contrainte sur le cylindre intérieur}$$

$$M(R_1) = 4\pi \frac{\Omega R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \mu \quad \text{et} \quad \mu = \frac{R_2 - R_1}{2\pi l R_1^3} \frac{M}{\Omega}$$

## Rhéomètre cône-plan



$$\tau = \frac{3M}{2\pi R^3}$$

contrainte

$$\dot{\gamma} = \frac{\Omega}{\alpha}$$

taux de cisaillement

$$\mu = \frac{3\alpha}{2\pi R^3} \frac{M}{\Omega}$$

viscosité dynamique

$M$  est le moment du couple exercé sur le cylindre

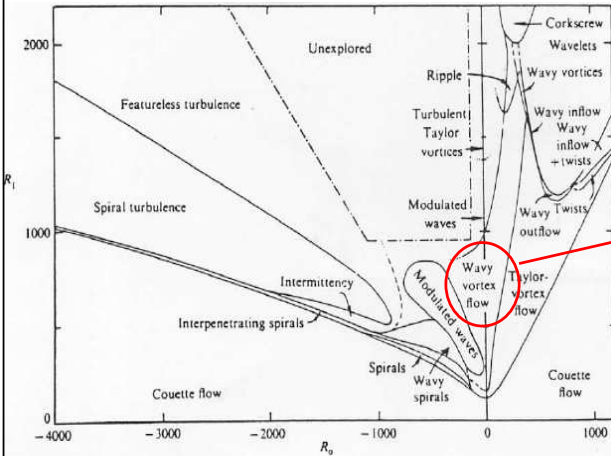
$\Omega$  est la vitesse angulaire de la partie tournante

**Avantages:** nécessite peu de liquide, facile d'utilisation, taux de cisaillement constant sauf près de la pointe tronquée, accès à de fortes valeurs de  $\Omega$

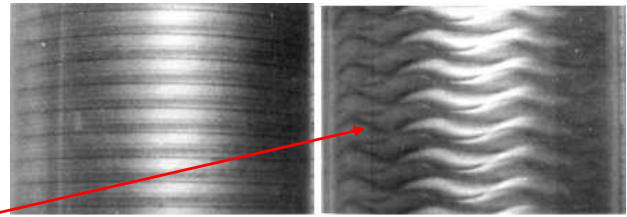
**Inconvénients:** apparition d'instabilités hydrodynamiques à forts taux de rotation, présence d'une surface libre sur le côté (ménisque) qui favorise l'évaporation, dispositif moins sensible et limité aux fluides aux viscosités élevées, positionnement difficile du cône.



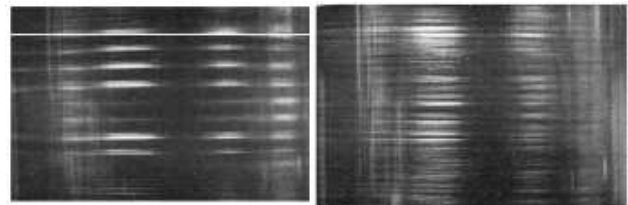
## Limite de la rhéologie: Instabilités de type Taylor-Couette



Instabilité primaire en « rouleaux »; rouleaux sinusoidaux.



Instabilités hydrodynamiques dans de l'eau d'après Burkhalter et Koschmieder.



Instabilités élastiques dans un fluide de Boger d'après S.J. Muller, Korean-Australia Rheology J. 20 (3), 2008.

Instabilité hydrodynamique pilotée par la force centrifuge.

➡ Instabilité inertielle:  $Re = \Omega R_1 (R_2 - R_1) / \nu \gg 1$ .

➡ Nombre de Taylor critique pour l'apparition de l'instabilité primaire:  $Ta_c = 2 (R_2 - R_1) Re^2 / R_1 = 1712$ .

## Limite de la rhéologie: l'Effet Weissenberg

Cet effet se manifeste dans les fluides complexes et consiste en une remontée de fluide le long d'une tige en rotation (Ex.: blanc d'œuf remontant le long du batteur, pâtes à pain).

**Instabilité élastique** pilotée par les forces normales:

nombre de Reynolds petit:  $Re \ll 1$  (effets visqueux  $\gg$  effets inertiels)

nombre de Weissenberg:  $Wi = t \gamma > 1$  ( $t$  temps de relaxation et  $\gamma = \Omega R_1 / (R_2 - R_1)$  le taux de cisaillement)

instabilité pour  $(R_2 - R_1) Wi^2 / R_1 > 35$  (Pakdel & McKinley, PRL 77, 1996).



Ascension d'une solution de polyisobutylène le long d'un barreau tournant.

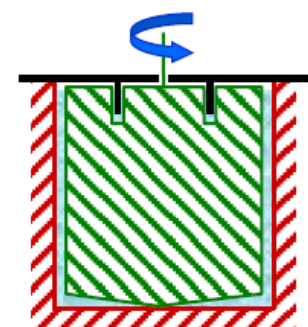
D'après J. Bico, R. Welsh et G. McKinley, Non-Newtonian FLuid Dynamics Research Group, MIT



Fluide newtonien (eau)

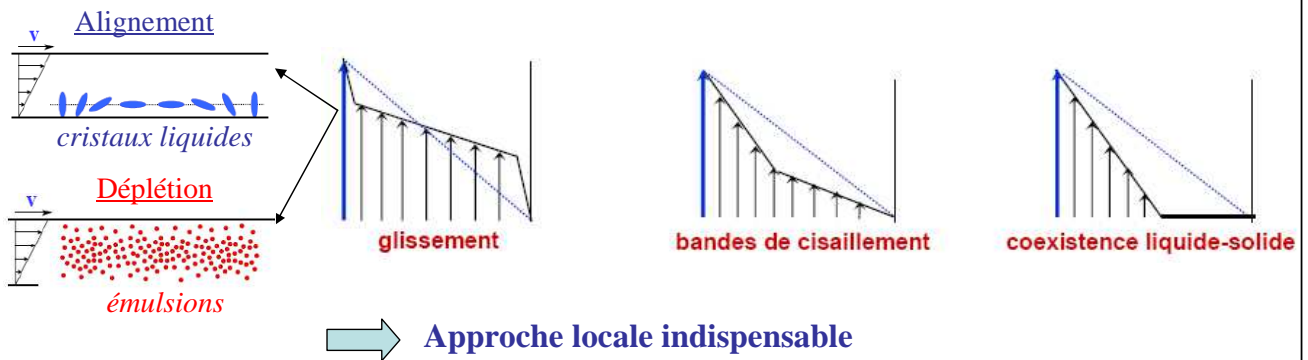


« Mooney-Couette »

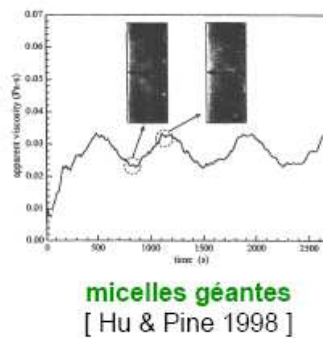
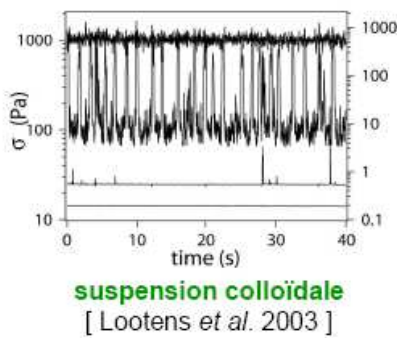


## Autres limites de la rhéologie

- Écoulements inhomogènes à  $Re \ll 1$  et  $Wi \ll 1$

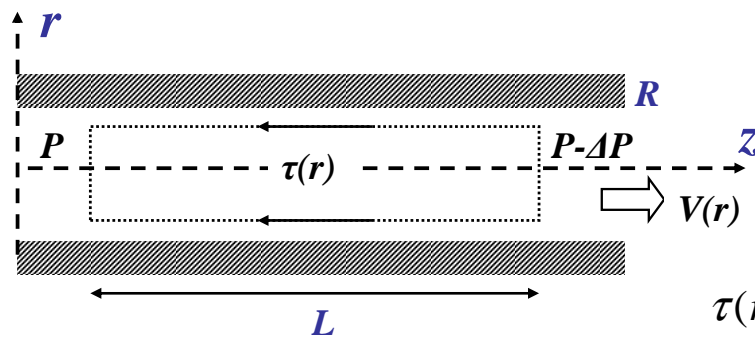


- Écoulements instationnaires



→ Approche résolue en temps indispensable

### Application : Ecoulements en conduite cylindrique de section circulaire



$$\underbrace{2\pi r L \tau}_{\text{frottement}} = \underbrace{\pi r^2 \Delta P}_{\text{pression}}$$



$$\tau(r) = \frac{r \Delta P}{2 L} \Rightarrow \frac{\tau(r)}{\tau(R)} = \frac{\tau}{\tau_p} = \frac{r}{R}$$

vrai quelque soit le fluide

Par définition:  $\dot{\gamma}(r) = -\frac{dV}{dr}$

Expression du débit Q:  $Q = \int_0^R \int_0^{2\pi} V(r) r dr d\theta = \pi \int_0^R 2r V(r) dr$

$$\Rightarrow Q = \pi \underbrace{[r^2 V(r)]_0^R}_{=0} - \pi \int_0^R r^2 \frac{dV}{dr} dr = -\pi \int_0^R r^2 dV$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\tau}{\tau_p} = \frac{r}{R} \\ \dot{\gamma} = -dV / dr \end{array} \right\} \Rightarrow Q = \int_0^{\tau_p} \left( \frac{\tau}{\tau_p} R \right)^2 \dot{\gamma} \left( \frac{R}{\tau_p} d\tau \right)$$

**Application : Ecoulements *laminaires* en conduite cylindrique de section circulaire**

**Formule de Rabinovitch-Mooney:**

$$Q = \frac{\pi R^3}{\tau_P^3} \int_0^{\tau_P} \tau^2 \dot{\gamma}(\tau) d\tau$$

loi de comportement

Pour un fluide newtonien:  $\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\mu} \Rightarrow Q = \frac{\pi R^3}{\mu \tau_P^3} \int_0^{\tau_P} \tau^3 d\tau = \frac{\pi R^3}{4\mu} \tau_P = \frac{\pi R^3}{4\mu} \frac{R \Delta P}{2 L}$

$$\Rightarrow Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\Delta P}{L} = \frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{\Delta P}{L}$$

**Loi de Poiseuille**

**Loi d'Ohm**

$$V_m = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{R^2 \Delta P}{8\mu L}$$

débit volumique

$$\tau_P = \frac{R \Delta P}{2 L} = \mu \left( \frac{8V_m}{D} \right)$$

$$\Rightarrow C_f = \frac{\tau_P}{\frac{1}{2} \rho V_m^2} = \frac{8}{\rho \frac{R V_m}{\mu}} \Rightarrow C_f = \frac{16}{Re_D}$$

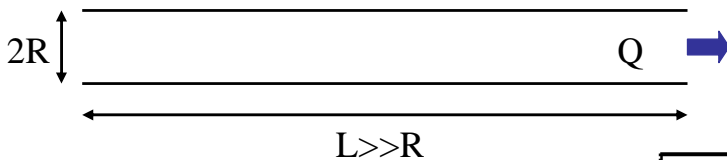
coefficient de frottement

$$\tau = \frac{r \Delta P}{2 L} = -\mu \frac{dV}{dr}$$

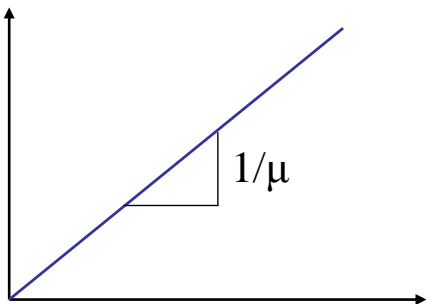
$$\Rightarrow V(r) = \frac{\Delta P}{4\mu L} R^2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] = 2V_m \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

profil parabolique de vitesse

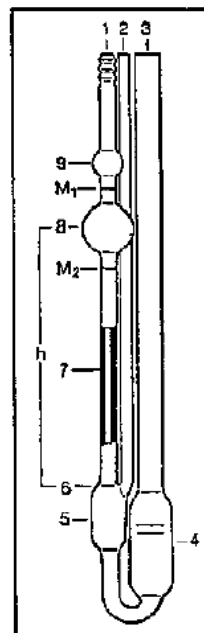
**Application : Rhéomètre capillaire**



$$\frac{1}{4} \left( \frac{8V_m}{D} \right) = \frac{Q}{\pi R^3}$$



$$\tau_P / 4 = \frac{\mu}{4} \left( \frac{8V_m}{D} \right)$$



Viscosimètre selon Ubbelohde

Le viscosimètre est constitué principalement par les trois parties tubulaires (1, 2 et 3), le tube capillaire (7) avec la sphère de mesure (8), la sphère des avant-courants (9) (pour les viscosimètres selon Ubbelohde) et le vase à niveau (5). Au-dessus et au-dessous de la sphère de mesure (8), les marques annulaires M<sub>1</sub> et M<sub>2</sub> sont imprimées sur le tube (1). Ces marques définissent non seulement le débit de l'échantillon, mais aussi la pression hydrostatique moyenne h. Le tube capillaire (7) se termine dans la partie supérieure, réalisée comme calotta sphérique (6), du vase à niveau (5). Par la surface intérieure de cette calotta sphérique (6), l'échantillon s'écoule du tube capillaire (7) sous forme d'un film mince (niveau sphérique suspendu).

Aux viscosimètres selon Ubbelohde par SCHOTT-GERÄTE s'appliquent, en cas de diamètres identiques des tubes capillaires, les mêmes secondes de correction (la soi-disant correction Hagenbach). Une redétermination de la correction Hagenbach n'est pas nécessaire si des viscosimètres SCHOTT-GERÄTE de même diamètre de tube capillaire sont échangés.

## Application : Ecoulements en conduite cylindrique de section circulaire

Pour des fluides rhéofluidifiants / rhéoépaississants:  $\tau = K\dot{\gamma}^n$  loi de puissance

$$\Rightarrow \dot{\gamma} = \left(\frac{\tau}{K}\right)^{1/n}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\pi R^3}{\tau_p^3} \int_0^{\tau_p} \tau^2 \left(\frac{\tau}{K}\right)^{1/n} d\tau = \frac{\pi R^3}{\tau_p^3 K^{-1/n}} \int_0^{\tau_p} \tau^{\frac{2n+1}{n}} d\tau$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\pi R^3}{K^{-1/n} \tau_p^3} \frac{n}{3n+1} (\tau_p)^{\frac{3n+1}{n}} = \frac{n}{3n+1} \pi R^3 \left(\frac{\tau_p}{K}\right)^{1/n}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{n}{3n+1} \pi R^3 \left(\frac{R \Delta P}{2LK}\right)^{1/n} \quad \text{débit volumique}$$

- $n < 1$  (rhéofluidifiant)  $\rightarrow \Delta P/L$  croît moins vite que  $Q$ .
- $n > 1$  (rhéoépaississant)  $\rightarrow \Delta P/L$  croît plus vite que  $Q$ .
- $n = 1$  (newtonien)  $\rightarrow$  on retrouve la loi de Poiseuille.

## Application : Ecoulements en conduite cylindrique de section circulaire

$$\left. \begin{aligned} V_m &= \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{n}{3n+1} R \left(\frac{R \Delta P}{2LK}\right)^{1/n} \\ \tau_p &= \frac{R \Delta P}{2L} \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho V_m^2} = \frac{\frac{R \Delta P}{2L}}{\frac{1}{2} \rho V_m^n V_m^{2-n}} \Rightarrow C_f = \frac{16}{8^{1-n} \rho \left(\frac{4n}{3n+1}\right)^n \frac{D^n}{K} V_m^{2-n}}$$

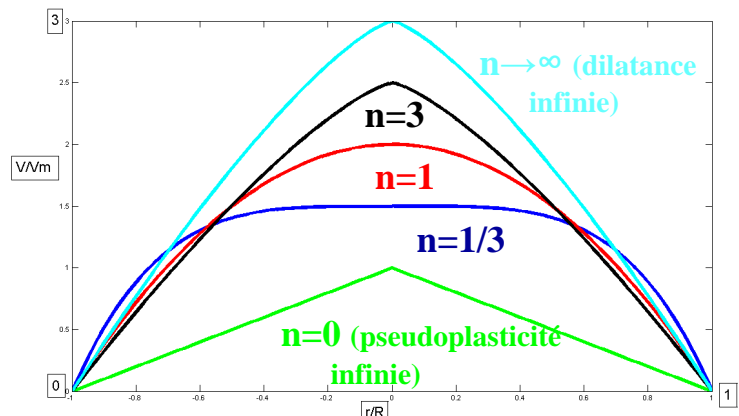
Nombre de Reynolds pour un fluide ostwaldien

$$\left. \begin{aligned} \tau_p &= \frac{D \Delta P}{4L} = K \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n \left(\frac{8V_m}{D}\right)^n \\ \mu' &= \frac{\tau_p}{\left(\frac{8V_m}{D}\right)} = K \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n \left(\frac{8V_m}{D}\right)^{n-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow Re' = \frac{\rho D V_m}{\mu'} = 8^{1-n} \rho \left(\frac{4n}{3n+1}\right)^n \frac{D^n}{K} (V_m)^{2-n}$$

$$\tau = \frac{r \Delta P}{2L} = K \left(-\frac{dV}{dr}\right)^n$$

$\Downarrow$

$$V(r) = \frac{3n+1}{n+1} V_m \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right)$$



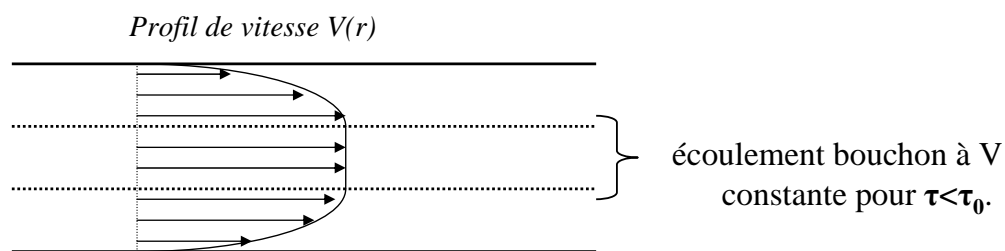


## Application : Ecoulements en conduite cylindrique de section circulaire

Pour des fluides à seuil de type Bingham:  $\tau = \tau_0 + \mu \dot{\gamma} \Rightarrow \dot{\gamma} = \frac{\tau - \tau_0}{\mu}$

Formule de Rabinovitch-Mooney:  $\Rightarrow Q = \frac{\pi R^3}{\tau_p^3} \int_{\tau_0}^{\tau_p} \frac{\tau^2 (\tau - \tau_0)}{\mu} d\tau = \frac{\pi R^3}{\mu \tau_p^3} \int_{\tau_0}^{\tau_p} (\tau^3 - \tau^2 \tau_0) d\tau$

$$\Rightarrow Q = \frac{\pi R^3}{4\mu} \tau_p \left[ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{\tau_0}{\tau_p} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{\tau_0}{\tau_p} \right)^4 \right] \quad \tau_p = \frac{D}{4} \frac{\Delta P}{L}$$



## Bibliographie

H.A. Barnes, J.F. Hutton & K. Walters, An introduction to Rheology, Elsevier, 1989.

D.V. Boger & K. Walters, Rheological phenomena in focus, Elsevier, 1993.

**R.P. Chhabra & J.F. Richardson, Non-newtonian flow and applied rheology, Elsevier, IChemE 2<sup>nd</sup> Edition, 2008.**

**G. Couarraze et J.L. Grossiord, Initiation à la rhéologie, Tex & Doc Lavoisier, 2000.**

**P. Coussot et J.L. Grossiord, Comprendre la rhéologie, EDP Sciences, 2001.**

M. Fermigier, Hydrodynamique physique; Problèmes résolus avec rappels de cours, Dunod, 1999.

**E. Guyon, J.P. Hulin et L. Petit, Hydrodynamique physique, EDP Sciences, 1991.**

E. Guyon, J.P. Hulin et L. Petit, Ce que disent les fluides, Belin, 2005.

R.G. Larson, The structure and rheology of complex fluids, Oxford University Press, 1999.

P. Oswald, Rhéophysique, Belin, 2005.

**D. Pnueli, C. Gutfinger, Fluid Mechanics, Cambridge University Press, 1992.**

M. Van Dyke, An album of fluid motion, Parabolic Press, 1997.