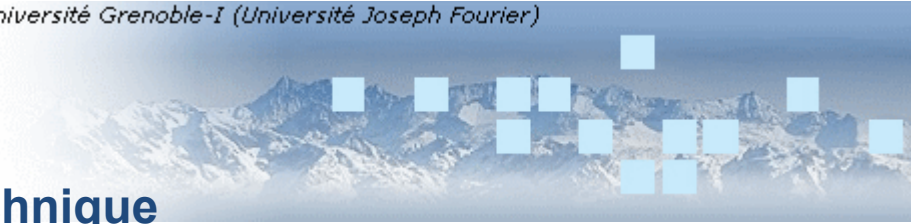




Ecole polytechnique de l'université Grenoble-I (Université Joseph Fourier)

POLYTECH
GRENOBLE
Département Géotechnique




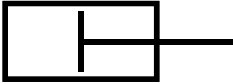
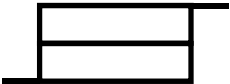

DIAPPOSITIVES ILLUSTRANT LE COURS DE
MECANIQUE DES ROCHES

MODELES RHEOLOGIQUES

D. HANTZ

2012

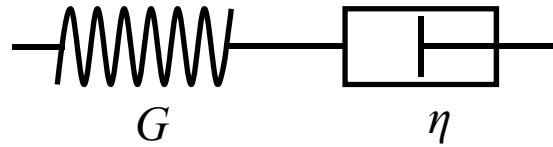
1.1. MODELES RHEOLOGIQUES 1D ELEMENTAIRES

<i>Modèle</i>	<i>Symbole</i>	<i>Réponse à l'application d'une force τ</i>	<i>Remarques</i>
élastique (Hook)		$\tau = G\gamma$	<i>Déformation instantanée, réversible (disparaît si la force disparaît)</i>
visqueux (Newton)		$\tau = \eta\dot{\gamma}$	<i>Déformation progressive, permanente (subsiste si la force disparaît)</i>
rigide-plastique (Saint-Venant)		$\tau < K \Rightarrow \gamma = 0$ $\tau > K \Rightarrow$ <i>Déséquilibre</i>	<i>Déformation instantanée, permanente (subsiste si la force disparaît), comportement identique si une nouvelle force est appliquée</i>
rigide-fragile (Griffith)		$\tau < R \Rightarrow \gamma = 0$ $\tau > R \Rightarrow$ <i>Rupture</i>	<i>Rupture instantanée, irréversible, comportement différent si une nouvelle force est appliquée ($R = 0$)</i>

τ : force γ : déformation

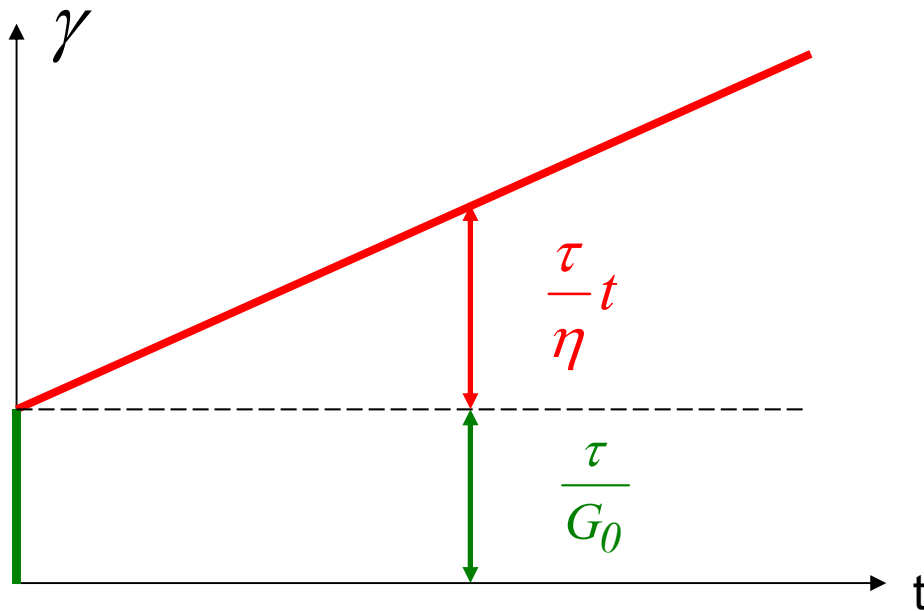
1.2. MODELES RHEOLOGIQUES 1D COMPOSES

Fluide visco-élastique de Maxwell (Hook + Newton)



$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\tau}{\eta}$$

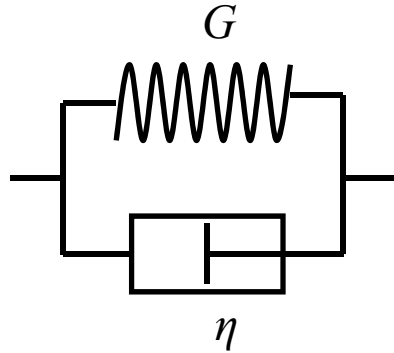
Réponse au fluage



$$\gamma(t) = \frac{\tau}{G} + \frac{\tau}{\eta}t$$

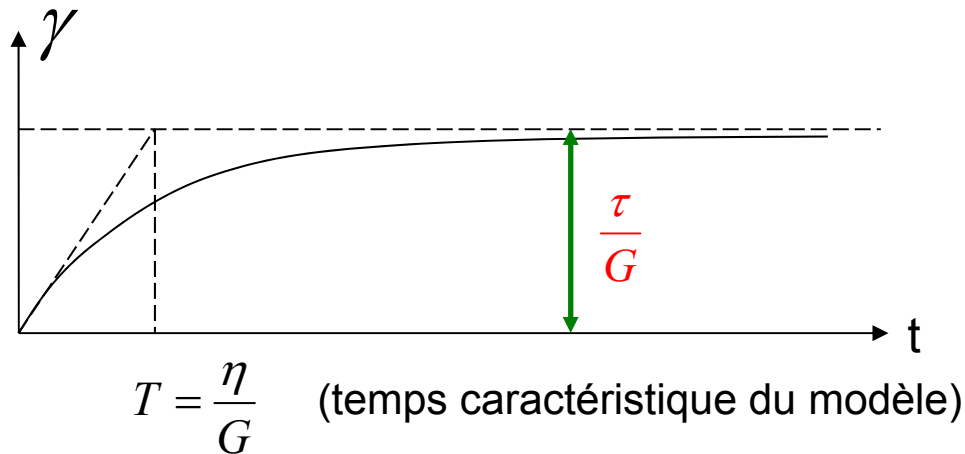
1.2. MODELES RHEOLOGIQUES 1D COMPOSES

Solide visco-élastique de Kelvin (Hook / Newton)



$$\tau = G\gamma + \eta\dot{\gamma}$$

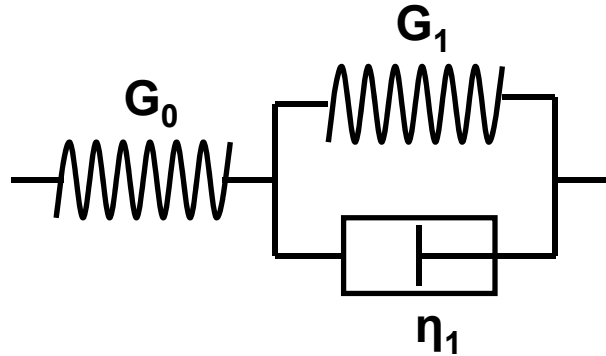
Réponse au fluage



$$\gamma(t) = \frac{\tau}{G} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \right]$$

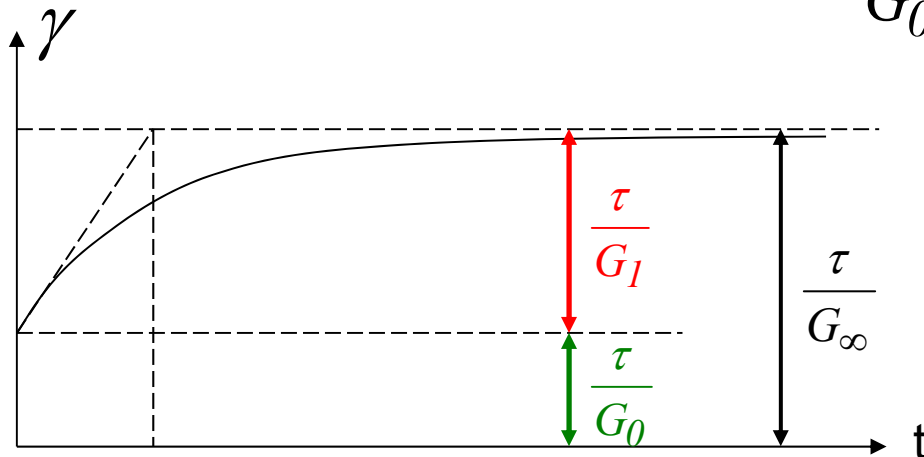
1.2. MODELES RHEOLOGIQUES 1D COMPOSES

Solide élastique avec élasticité différée (Hook + Kelvin)



Réponse au fluage (1D)

$$\gamma(t) = \frac{\tau}{G_0} + \frac{\tau}{G_1} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \right]$$

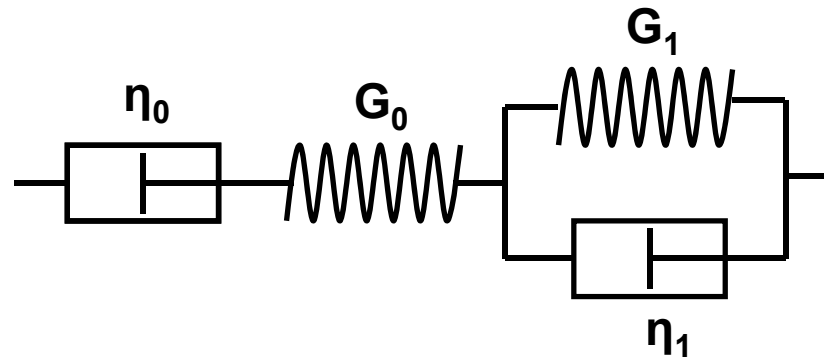


$$\frac{1}{G_\infty} = \frac{1}{G_0} + \frac{1}{G_1}$$

$$T_1 = \frac{\eta_1}{G_1} \quad (\text{temps caractéristique du modèle})$$

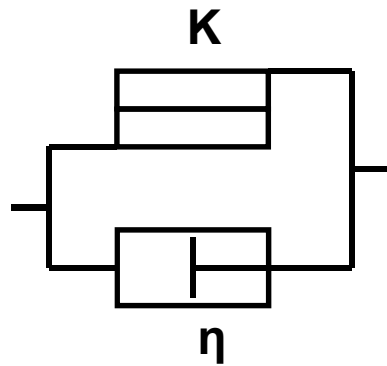
1.2. MODELES RHEOLOGIQUES 1D COMPOSES

Fluide visco-élastique de Burgers (Maxwell + Kelvin)



1.2. MODELES RHEOLOGIQUES 1D COMPOSES

Modèle visco-plastique (Bingham)



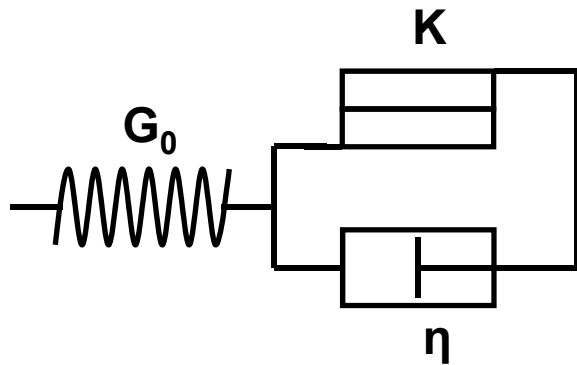
Rigide si $\tau < K$

Visqueux si $\tau > K$

avec $\tau - K = \eta \dot{\gamma}$

1.2. MODELES RHEOLOGIQUES 1D COMPOSES

Modèle élasto-visco-plastique (Hook + Bingham)



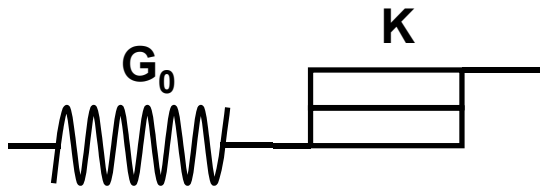
Elastique si $\tau < K$

Visco-élastique si $\tau > K$

avec $\tau - K = \eta \dot{\gamma}$

1.2. MODELES RHEOLOGIQUES 1D COMPOSES

Modèle élasto-plastique (Hook + Saint-Venant)



Elastique si $\tau < K$

Plastique si $\tau > K$

2. MODELES RHEOLOGIQUES DE MILIEUX CONTINUS

Conventions de signe

Contraintes

Compressions positives, tractions négatives (convention classique en géomécanique)

Déformations

Contractions positives, dilatations négatives

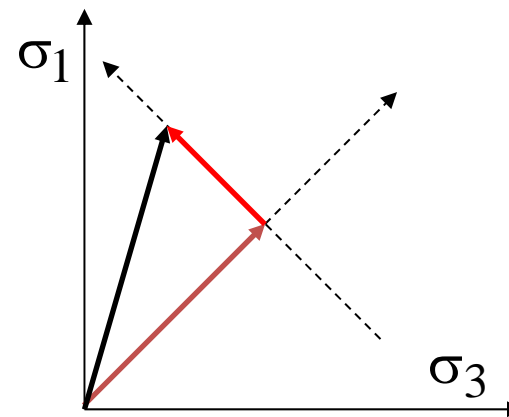
2. MODELES RHEOLOGIQUES DE MILIEUX CONTINUS

Rappel : décomposition du tenseur des contraintes en un **tenseur isotrope** et un **tenseur déviateur**

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_m & 0 & 0 \\ 0 & s_m & 0 \\ 0 & 0 & s_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{xy} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{xz} & s_{yz} & s_{zz} \end{pmatrix}$$

$s_m = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) / 3$ est la contrainte normale moyenne

Représentation dans le plan des contraintes principales



2. MODELES RHEOLOGIQUES DE MILIEUX CONTINUS

Rappel : décomposition du tenseur des déformations
en un **tenseur isotrope** et un **tenseur déviateur**

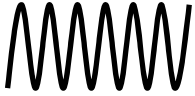

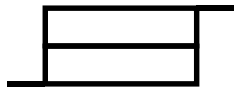

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_m & 0 & 0 \\ 0 & e_m & 0 \\ 0 & 0 & e_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_y = \dots \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \varepsilon_{xz} = \dots$$

$$e_m = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) / 3 \quad \text{est la déformation moyenne}$$

$$3e_m = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad \text{est la déformation volumique}$$

2. MODELES RHEOLOGIQUES DE MILIEUX CONTINUS

Modèle	Symbole	Loi (1D)	Loi (3D)
élastique (Hook)		$\tau = G\gamma$	$s_{ij} = 2Ge_{ij}$ $s_m = 3Ke_m$
visqueux (Newton)		$\tau = \eta\dot{\gamma}$	$s_{ij} = 2\eta\dot{e}_{ij}$ $\dot{e}_m = 0$
plastique (Saint-Venant)		$\tau < K \Rightarrow \gamma = 0$ $\tau = K \Rightarrow \gamma_{quelconque}$	$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < 0 \Rightarrow \varepsilon_{ij} = 0$ $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \Rightarrow \varepsilon_{ij} \neq 0$
fragile (Griffith)		$\tau < R \Rightarrow \gamma = 0$ $\tau = R \Rightarrow \tau = 0$	$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < 0 \Rightarrow \varepsilon_{ij} = 0$ $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \Rightarrow f_r(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$

τ : force 1D

γ : déformation 1D ou 3D

s_{ij} et e_{ij} : tenseurs déviateurs des contraintes et des déformations

s_m et e_m : contrainte et déformation moyennes

σ_i : contrainte principale

2.1.1. MODELE ELASTIQUE LINEAIRE ISOTROPE



Relations entre les tenseurs déviateurs
des contraintes et des déformations

$$s_{ij} = 2Ge_{ij}$$

$$s_m = 3Ke_m$$

s_{ij} et e_{ij} : composantes des tenseurs déviateurs des
contraintes et des déformations

s_m et e_m : contrainte et déformation moyenne

G : module de cisaillement

K : module de compressibilité

Remarque : $3e_m = \Delta V/V$ (déformation volumique)

$$K = E / 3(1-2\nu)$$

2.1.1. MODELE ELASTIQUE LINEAIRE ISOTROPE

Relations entre les tenseurs des contraintes et des déformations

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1} \{\sigma\}$$

λ et G : coefficients de Lamé $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ G : module de cisaillement $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2\varepsilon_{xy} \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \Rightarrow \tau_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}$$

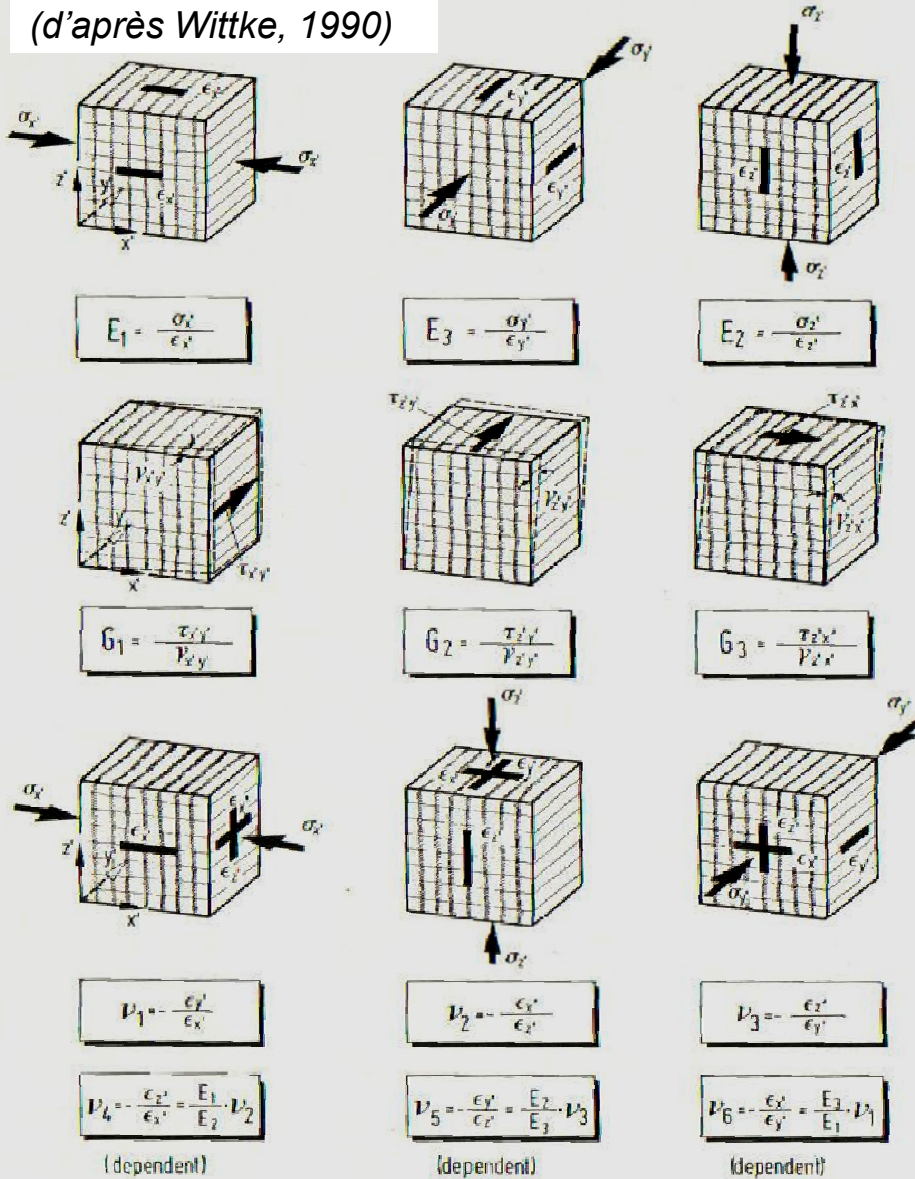
2.1.2. MODELE ELASTIQUE LINEAIRE ANISOTROPE

- Dans le cas général de l'anisotropie, il n'y a pas concordance des directions principales de contrainte et de déformation
- La matrice d'élasticité (6x6) étant symétrique, le nombre de coefficients indépendants est de 21

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_x} & -\frac{\nu_{zx}}{E_x} & \frac{\eta_{x,yz}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{x,xz}}{G_{xz}} & \frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}} \\ & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_y} & \frac{\eta_{y,yz}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{y,xz}}{G_{xz}} & \frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}} \\ & & \frac{1}{E_z} & \frac{\eta_{z,yz}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{z,xz}}{G_{xz}} & \frac{\eta_{z,xy}}{G_{xy}} \\ & & & \frac{1}{G_{yz}} & \frac{\mu_{yz,xz}}{G_{xz}} & \frac{\mu_{yz,xy}}{G_{xy}} \\ & & & & \frac{1}{G_{xz}} & \frac{\mu_{xz,xy}}{G_{xy}} \\ & & & & & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

2.1.2. MODELE ELASTIQUE LINEAIRE ORTHOTROPE

(d'après Wittke, 1990)



Orthotropie

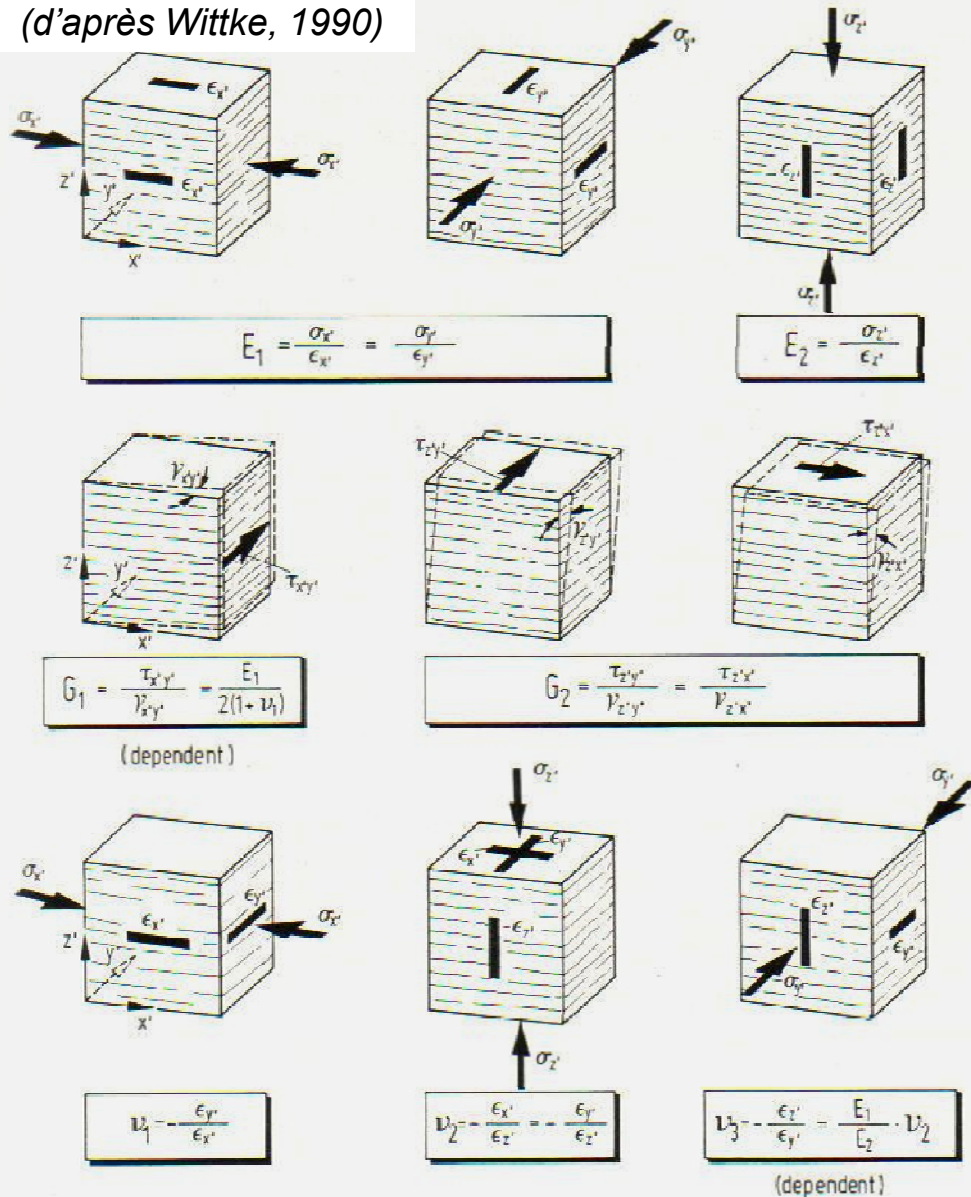
- 3 directions de symétrie perpendiculaires 2 à 2
- 9 coefficients indépendants

$$\{\epsilon\} = [D']^{-1} \{\sigma\}$$

$$[D']^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_1}{E_1} & -\frac{\nu_2}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_1}{E_1} & \frac{1}{E_3} & -\frac{\nu_3}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_2}{E_2} & -\frac{\nu_3}{E_3} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_3} \end{bmatrix}$$

2.1.2. MODELE ELASTIQUE LINEAIRE ISOTROPE TRANSVERSE

(d'après Wittke, 1990)



Isotropie transverse :

- comportement isotrope dans un plan (x', y')
- 5 coefficients indépendants

$$\{\epsilon\} = [D']^{-1} \{\sigma\}$$

$$[D']^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_1}{E_1} & -\frac{\nu_2}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_1}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_2}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_2}{E_2} & -\frac{\nu_2}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_1)}{E_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_2} \end{bmatrix}$$

2.2.1. MODELE VISQUEUX LINEAIRE



Relations entre les tenseurs déviateurs
des contraintes et des déformations

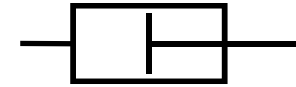
$$s_{ij} = 2\eta\dot{e}_{ij}$$
$$\dot{e}_m = 0$$

s_{ij} et e_{ij} : composantes des tenseurs déviateurs des
contraintes et des déformations

e_m : déformation moyenne

La seconde équation exprime que le fluage se produit à
volume constant.

2.2.2. MODELE VISQUEUX NON-LINEAIRE LOI DE NORTON-HOFF



Vitesse de déformation visqueuse en compression uniaxiale

$$\dot{\varepsilon} = \left(A e^{-\frac{Q}{RT}} \right) \sigma^n$$

Q est une énergie d'activation (J.mol^{-1}) ; $R=8,314$ ($\text{J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$) ;
T est la température (K) ; A est une constante ($\text{Mpa}^{-n}.\text{s}^{-1}$).

Glace :

*sous faible contrainte, à une température comprise entre -40°C et -3°C ,
 $n = 3$, $Q/R = 7300$ K et $A = 8,8.10^5$ $\text{Mpa}^{-3}.\text{s}^{-1}$*

Roches salines :

*sous une contrainte comprise entre 5 et 15 Mpa, à une température
comprise entre 300 et 400 K, n varie entre 3 et 6, Q/R entre 5000 et
10000 K, et A entre 1 et 10^5 $\text{Mpa}^{-n}.\text{an}^{-1}$*

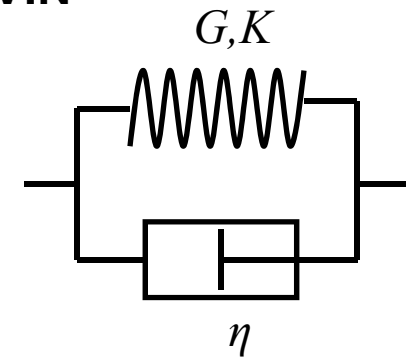
2.3. MODELE VISCO-ELASTIQUE DE KELVIN

$$s_{ij} = 2Ge_{ij} + 2\eta\dot{e}_{ij}$$

$$s_m = 3Ke_m$$

s_m et e_m : contrainte et déformation moyennes

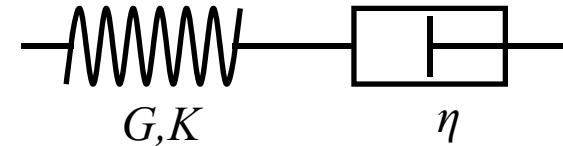
$K = E / 3(1-2\nu)$: module de compressibilité



2.4. MODELE VISCO-ELASTIQUE DE MAXWELL

$$\dot{e}_{ij} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} + \frac{s_{ij}}{2\eta}$$

$$s_m = 3Ke_m$$



s_m et e_m : contrainte et déformation moyennes

$K = E / 3(1-2\nu)$: module de compressibilité

La déformation visqueuse, qui se superpose à la déformation élastique, se produit à volume constant.

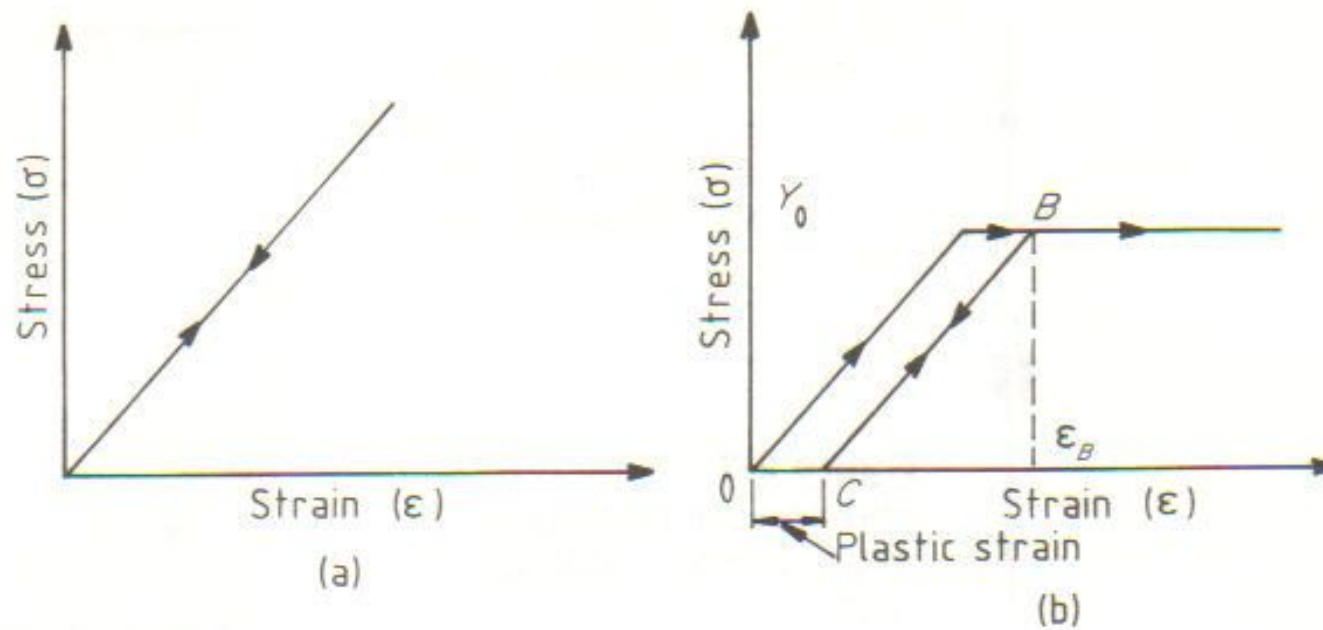
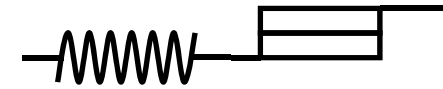


Figure 2.1
Idealized stress–strain response. (a) Elastic; (b) elastic/ideally plastic

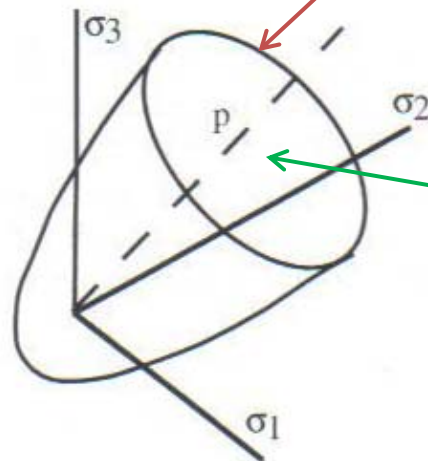
2.5. MODELE ELASTO-PLASTIQUE



Critère de plasticité dans l'espace des contraintes principales

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \Rightarrow \varepsilon_{ij} \neq 0$$

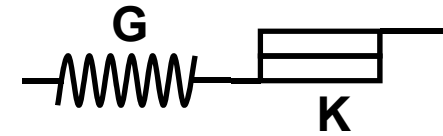
Surface d'écoulement
plastique



$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < 0 \Rightarrow \varepsilon_{ij} = 0$$

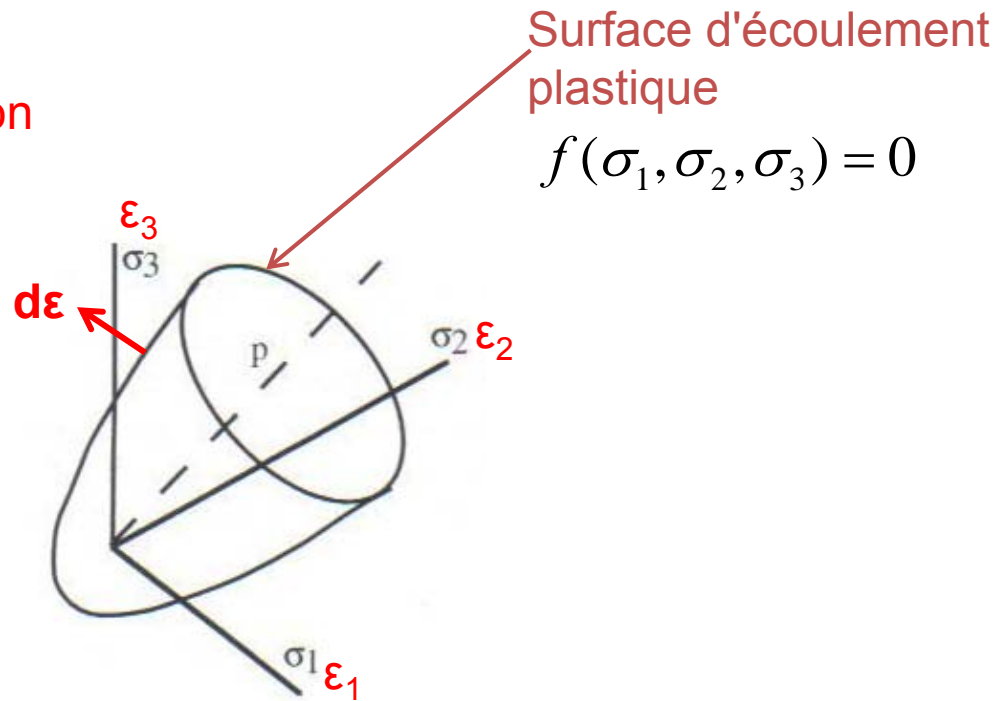
Domaine élastique

2.5. MODELE ELASTO-PLASTIQUE



Loi d'écoulement plastique associée (ou standard)

L'incrément de déformation plastique $d\boldsymbol{\varepsilon}$ est normal à la surface d'écoulement :



2.5. MODELE ELASTO-PLASTIQUE

Loi d'écoulement plastique non associée

L'incrément de déformation
plastique $d\boldsymbol{\varepsilon}$ est normal
aux équipotentielles
plastiques :

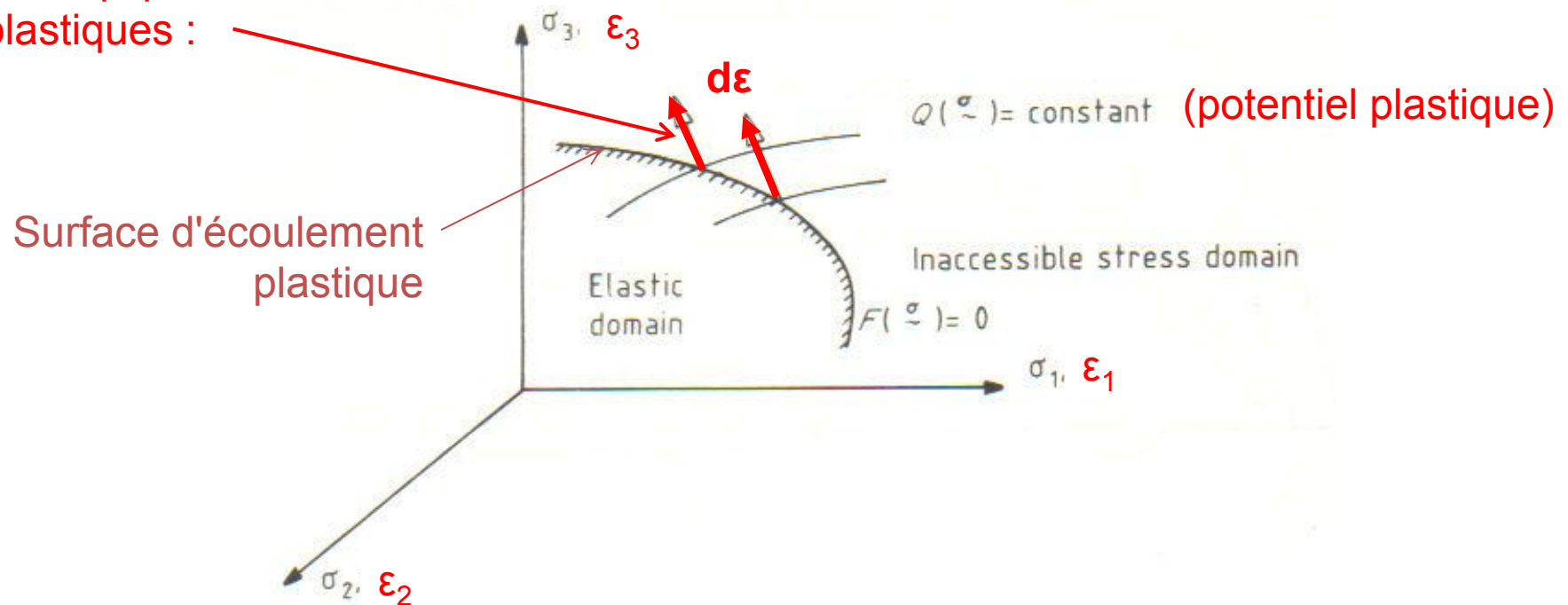


Figure 2.5

Yield and plastic potential surfaces in principal stress space

2.5. MODELE ELASTO-PLASTIQUE

Critère de cisaillement octaédral maximal (Von Mises)

Le **cisaillement octaédral** est la contrainte tangentielle qui s'exerce sur une **facette octaédrale** (normale à la trissectrice du repère principal)

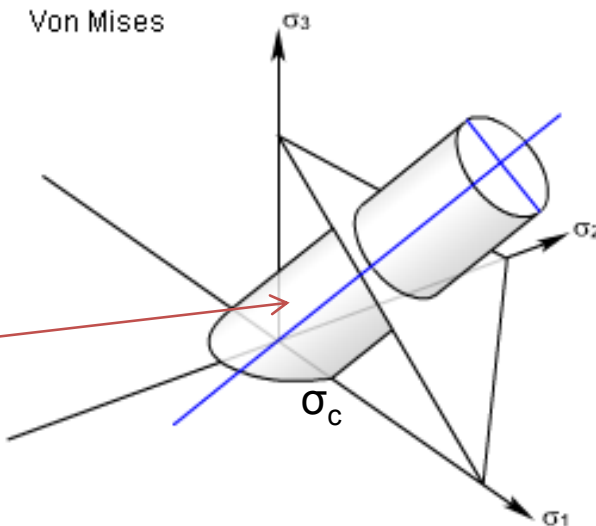
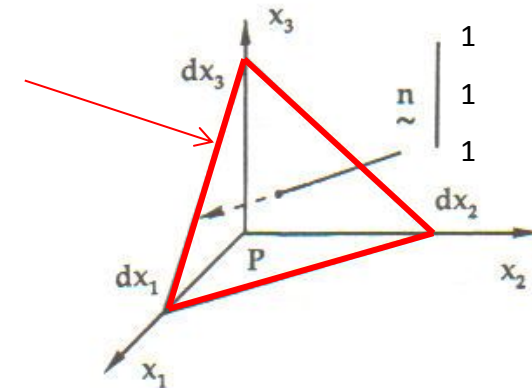
$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Le critère s'écrit : $\tau_{oct} = \tau_{LIM}$

Pour $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_c = 3\tau_{LIM} / \sqrt{2}$

donc : $\tau_{LIM} = \sigma_c \sqrt{2} / 3$

La **surface d'écoulement** est un cylindre de révolution ayant pour axe la trissectrice, de rayon $\sigma_c (2/3)^{0,5}$.



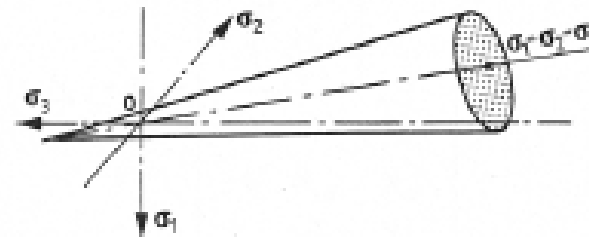
2.5. MODELE ELASTO-PLASTIQUE

Critère de Drücker-Prager

Pour certains matériaux (dont les roches), l'expérience montre que le cisaillement octaédral limite augmente avec la contrainte normale moyenne σ_m . Le critère de Drücker-Prager suppose que cette augmentation est linéaire :

$$\tau_{oct} = a\sigma_m + b$$

C'est l'équation d'un cône ayant pour axe la trissectrice du repère principal



2.5. MODELE ELASTO-PLASTIQUE

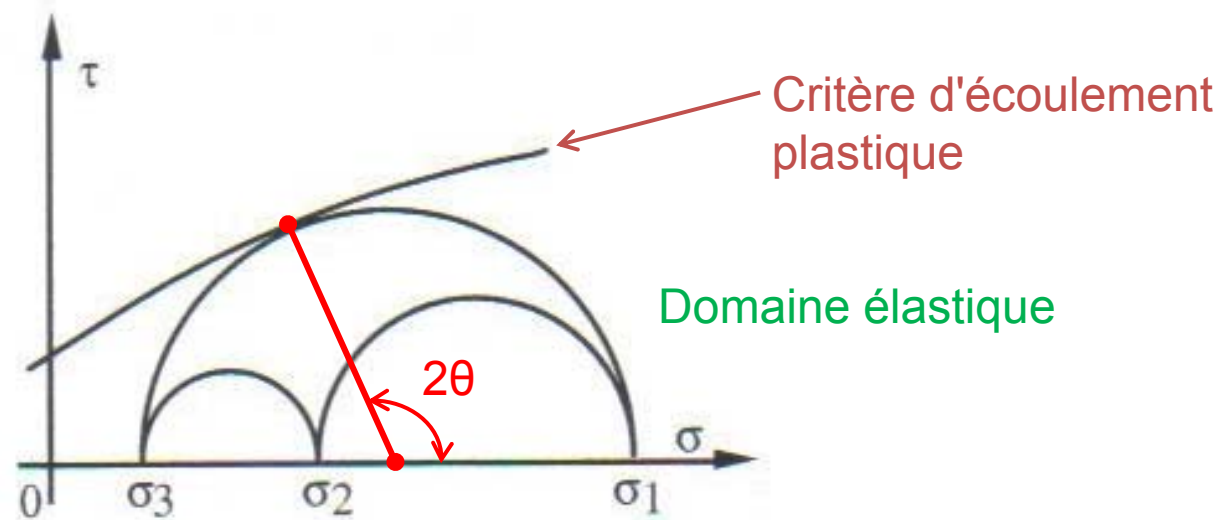
Critères de plasticité définis dans le plan de Mohr

Hypothèse de Mohr

Les contraintes normale (σ) et tangentielle (τ) au plan de rupture sont reliées par une fonction caractéristique du matériau, définie dans le plan de

$$\text{Mohr : } |\tau| = f(\sigma)$$

Si ce critère est atteint sur une facette, il y a rupture.



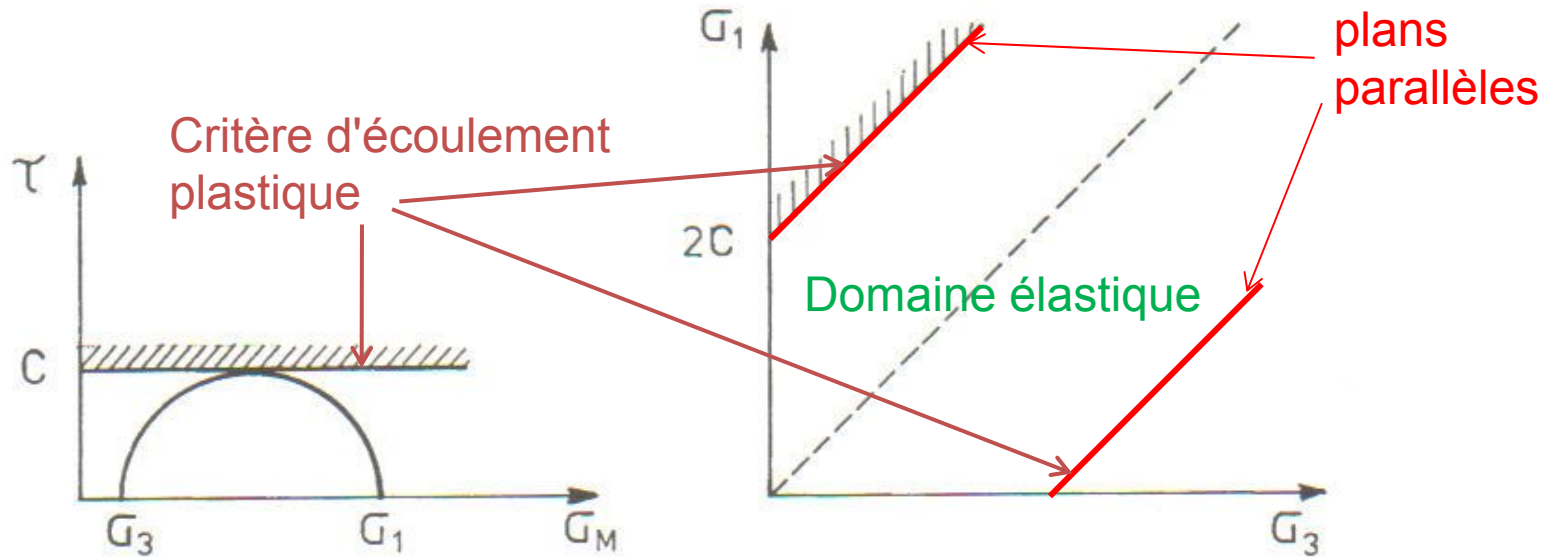
Le critère est indépendant de la contrainte principale intermédiaire. Dans l'espace des contraintes principales, les surfaces limites sont donc parallèles à la direction principale intermédiaire.

2.5. MODELE ELASTO-PLASTIQUE

Critère de cisaillement maximal (Tresca)

Lorsque σ_2 est la contrainte principale intermédiaire, le critère d'élasticité est :

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} < c \quad \text{ou} \quad |\sigma_1 - \sigma_3| < \sigma_c = 2c$$



Dans le cas général, il devient :

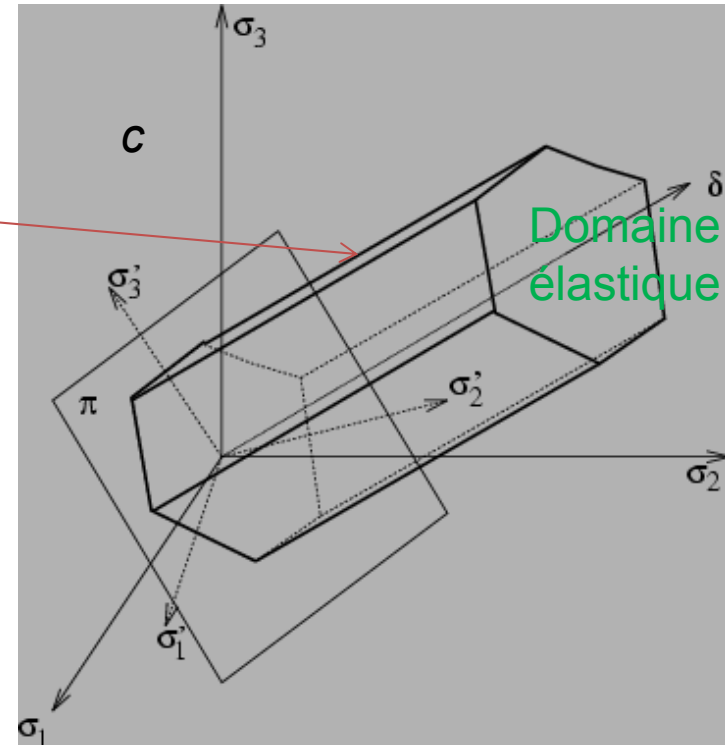
$$|\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_c \text{ et } |\sigma_2 - \sigma_3| < \sigma_c \text{ et } |\sigma_3 - \sigma_1| < \sigma_c$$

2.5. MODELE ELASTO-PLASTIQUE

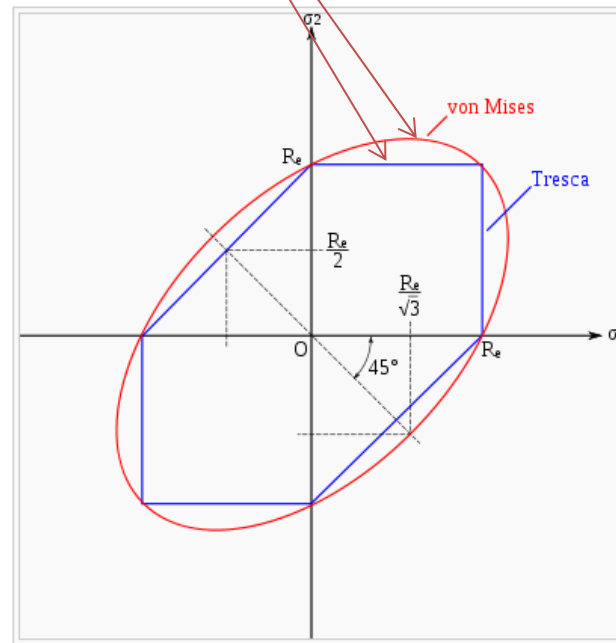
Critère de cisaillement maximal (Tresca)

Dans l'espace des contraintes principales

Surface d'écoulement
plastique



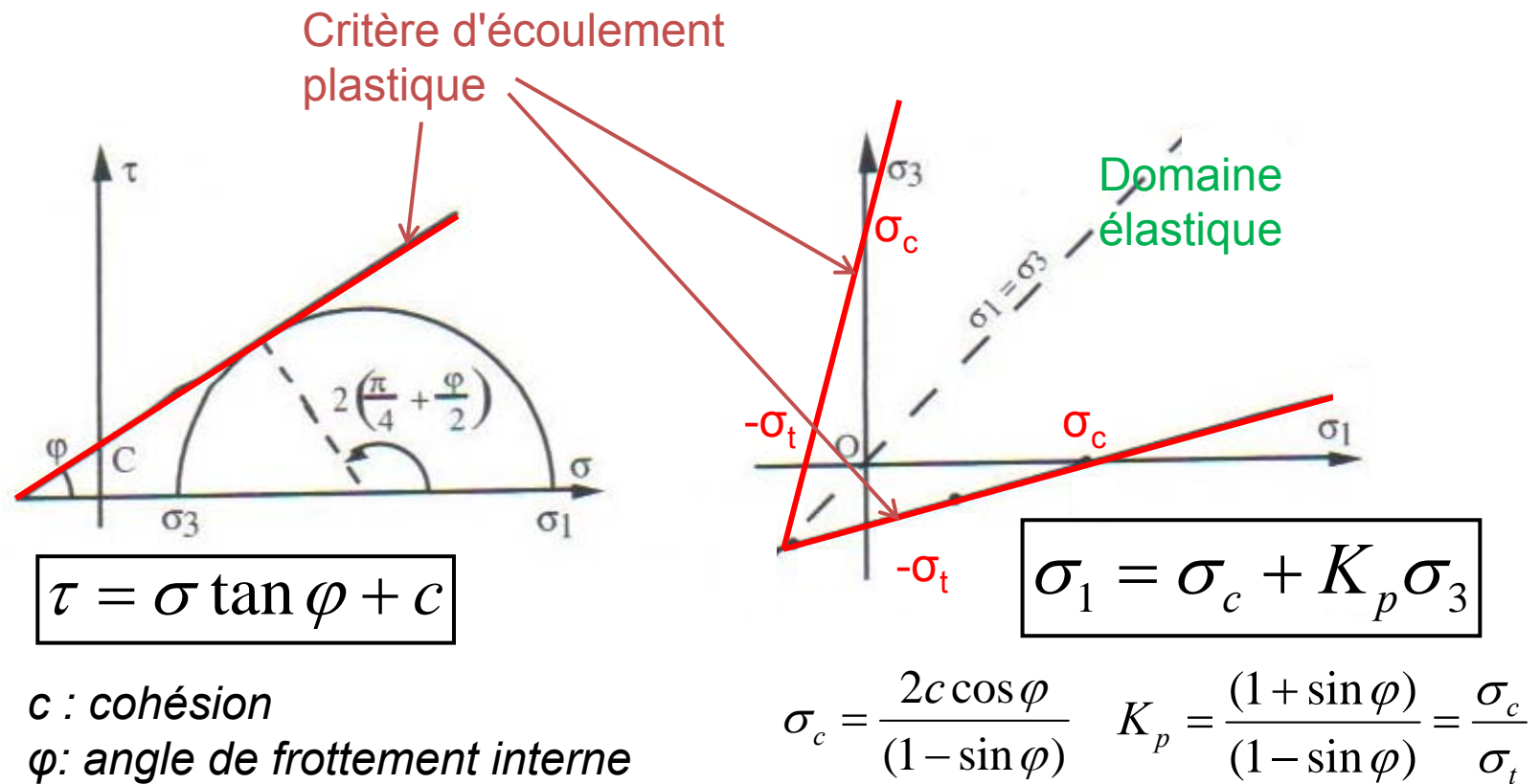
Dans le plan (σ_1, σ_2)



2.5. MODELE ELASTO-PLASTIQUE

Critère de Mohr-Coulomb

Pour certains matériaux (dont les roches), l'expérience montre que le cisaillement maximal limite augmente avec la contrainte normale. Le **critère de Mohr-Coulomb** suppose que cette augmentation est linéaire :



2.5. MODELE ELASTO-PLASTIQUE

Critère de Mohr-Coulomb

Dans l'espace des contraintes principales

