CHAPITRE II.
COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE LINEAIRE SOUS UN CHARGEMENT STATIQUE UNIAXIAL

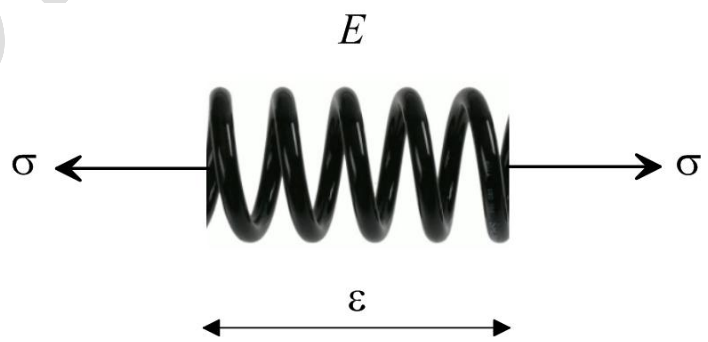
II.1. Les modèles rhéologiques

- Un certain nombre de corps sont viscoélastiques car ils présentent des propriétés visqueuses et élastiques.
- On les représente par modèles rhéologiques qui sont utilisés pour modéliser le comportement d'un matériau, c'est-à-dire pour simuler sa réponse à une sollicitation mécanique.
- Dans la viscoélasticité linéaire, des modèles analogiques empiriques ont été proposés ; ils sont composés d'une combinaison de connexions en série et/ou parallèle de ressorts (de coefficients d'élasticité E_i) et d'amortisseurs (de coefficients de viscosité η_i) élémentaires, représentant les composantes élastique et visqueuse, respectivement.
- Il existe des modèles performants pour décrire la viscoélasticité, approchant de façon satisfaisante les courbes de caractérisation mécanique, mais de complexité mathématique élevée.
- Certaines lois de comportement sont intégrées dans des logiciels de calcul par éléments finis traitant la viscoélasticité.
- Les fluides viscoélastiques peuvent aussi être représentés par des modèles analogiques électriques.

II.1.1 Ressort

Ce modèle (analogique) représente le solide hookéen : comportement mécanique purement élastique. Le modèle mathématique correspondant est la loi de Hooke :

$$\sigma = E.\varepsilon$$



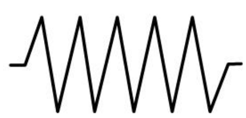
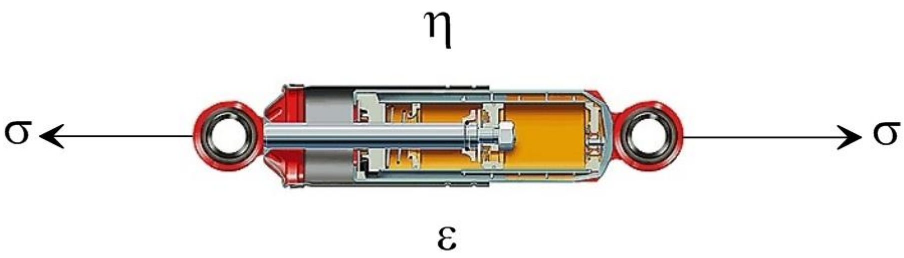


Schéma du ressort

II.1.2 Amortisseur

Ce modèle représente le fluide (liquide) newtonien : comportement visqueux. Le modèle mathématique est la loi de Newton

$$\sigma = \eta.\dot{\varepsilon}$$



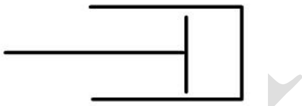
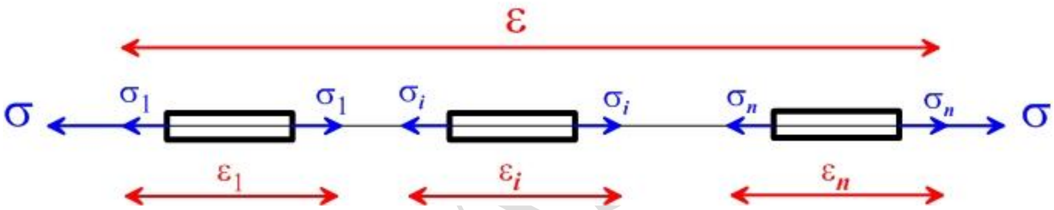


Schéma de l'amortisseur

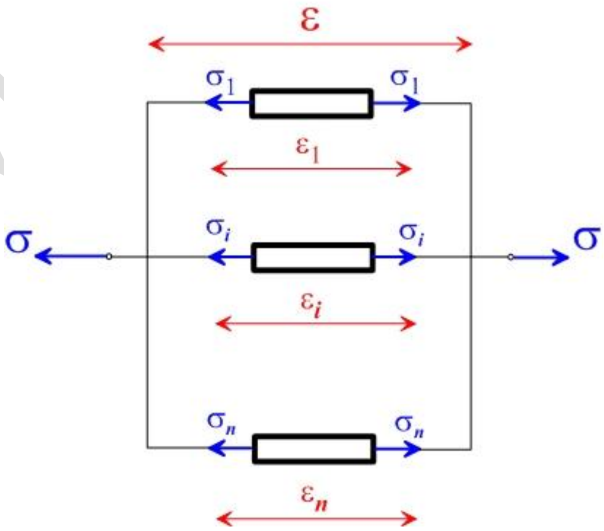
II.1.3 Association d'éléments en série

L'association est analogue est celle des circuits électriques. La contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ correspond au courant électrique et la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ correspond à la tension (différence de potentiel).



$$\boldsymbol{\sigma = \sigma_i} \quad \forall\ \boldsymbol{i = 1, n} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i}$$

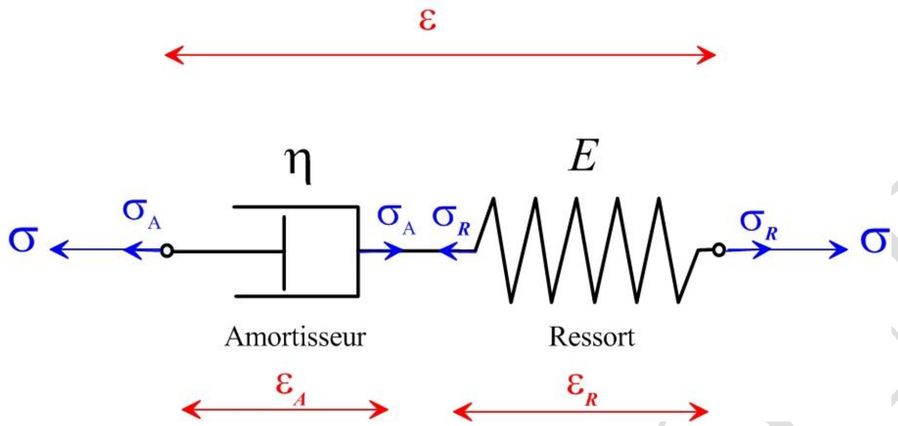
II.1.4 Association d'éléments en parallèle



$$\boldsymbol{\varepsilon = \varepsilon_i} \quad \forall\ \boldsymbol{i = 1, n} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i}$$

II.2. Modèle de Maxwell

Ce modèle décrit le comportement d'un matériau viscoélastique. Ce modèle fut proposé par James Clerk Maxwell en 1867.



Le modèle de Maxwell est représenté par un amortisseur purement visqueux et un ressort hookéen mis en série comme l'indique le schéma ci-contre. Dans cette configuration, lorsqu'une contrainte axiale est appliquée, la contrainte totale $\boldsymbol{\sigma}$ et la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont définies de la manière suivante :

$$\sigma = \sigma_A = \sigma_R \,,$$

Avec : $$\sigma_A = \eta\,.\dot{\varepsilon} \quad , \quad \sigma_R = E.\varepsilon$$

Et : $$\varepsilon = \varepsilon_A + \varepsilon_R$$

Dérivons la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ par rapport au temps :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_A}{dt} + \frac{d\varepsilon_R}{dt}$$

$$= \frac{\sigma}{\eta} + \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt}$$

En notant la dérivée temporelle par un point, l'équation précédente se réécrit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}{E}$$

En multipliant cette équation par η,

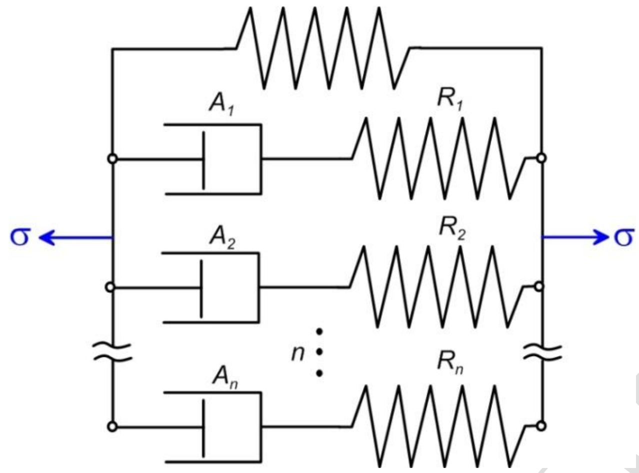
$$\eta\,.\dot{\varepsilon} = \sigma + \tau\,.\dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

on a fait apparaître le temps de relaxation de Maxwell :

$$\tau = \frac{\eta}{E}$$

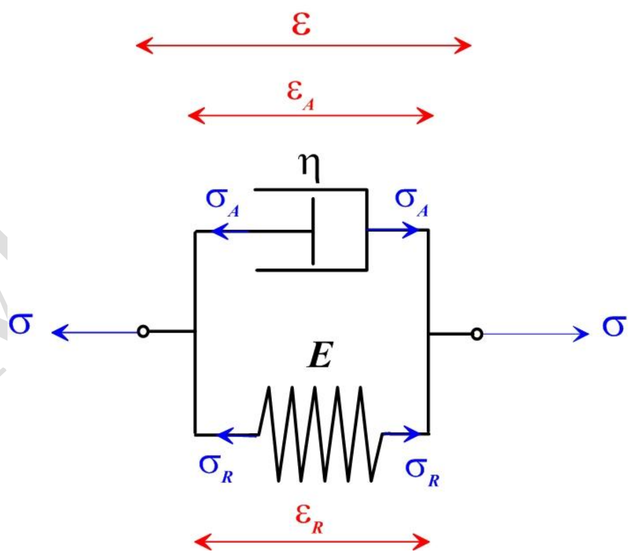
II.3. Maxwell généralisé

Composé de *n* modèles de Maxwell mis en parallèle, une branche parallèle supplémentaire est composée d'un ressort.



II.4. Modèle de Kelvin-Voigt

C'est un modèle de matériau viscoélastique, c'est-à-dire présentant à la fois des propriétés élastiques et visqueuses. Il sert notamment à décrire des solides viscoélastiques.
Le modèle de Kelvin-Voigt peut être représenté par un amortisseur purement visqueux et un ressort mis en parallèle comme l'indique le schéma ci-contre.



Dans ce modèle en parallèle, la déformation totale est la même que celle de l'amortisseur et celle du ressort:

$$\varepsilon = \varepsilon_A = \varepsilon_R$$

Par ailleurs, la contrainte totale est la somme des contraintes du ressort et de l'amortisseur :

$$\sigma = \sigma_A + \sigma_R$$

Les contraintes de l'amortisseur et du ressort sont données respectivement par :

$$\sigma_A = \eta . \dot{\varepsilon}$$

$$\sigma_R = E . \varepsilon$$

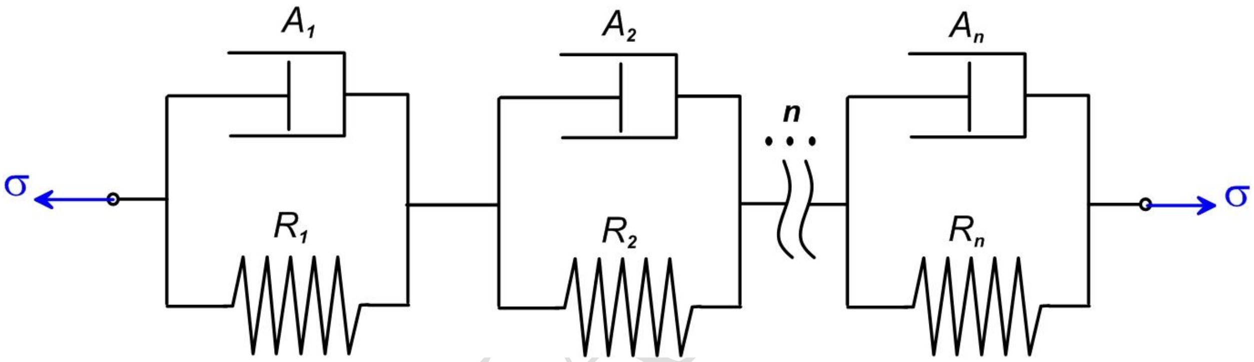
E : module élastique associé au ressort
η : Coefficient de viscosité associé à l'amortisseur représentant un fluide newtonien.

Application 1

Suivre la même démarche du modèle de Maxwell pour déduire la relation contrainte-déformation de celui de Kelvin-Voigt.

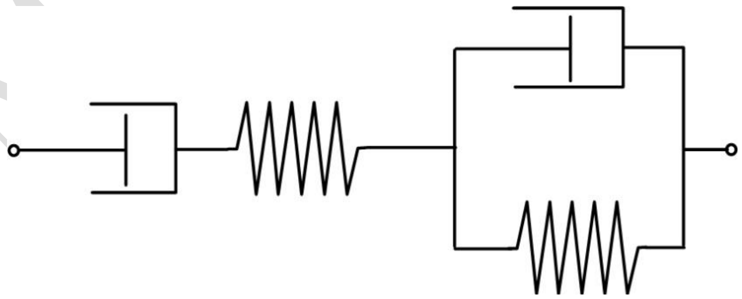
II.5. Modèle de Kelvin-Voigt généralisé

Constitué d'un assemblage en série de *n* modèles de Kelvin-Voigt.

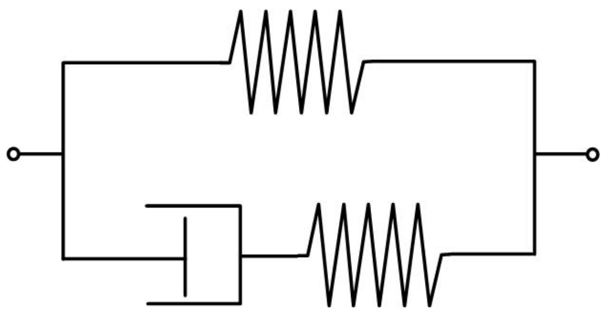


II.6. Autres modèles

D'autres modèles peuvent être obtenus en combinant les modèles précédents ou en leur rajoutant des éléments de ressorts et/ou d'amortisseurs. On cite, entre autres, le modèle combiné Maxwell-Kelvin-Voigt et le modèle de Zener.



Modèle de Maxwell-Kelvin-Voigt combiné



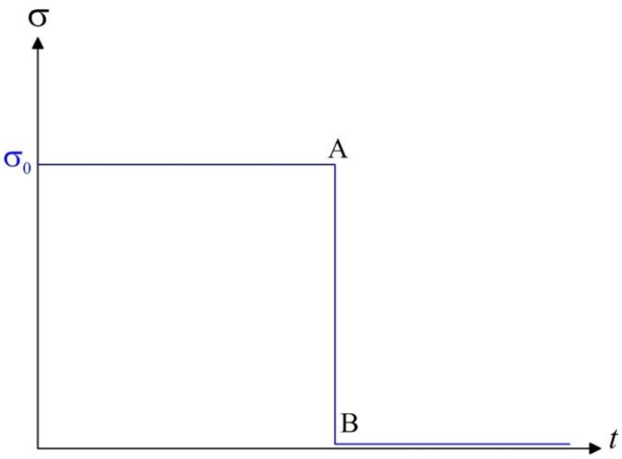
Modèle de Zener

II.7. Réponse des modèles rhéologiques aux essais de fluage et de relaxation

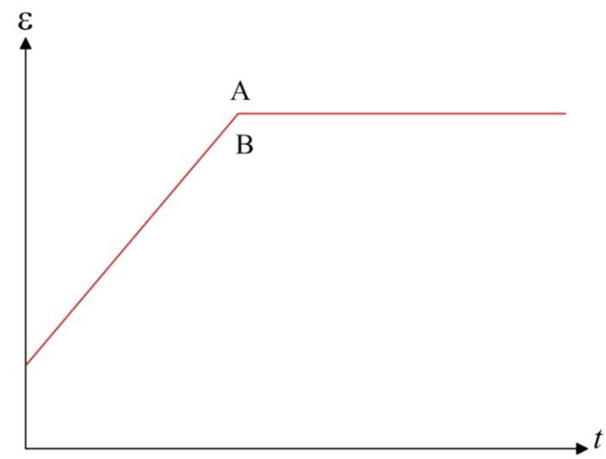
II.7.1. Modèle de Maxwell

- **Réponse à un essai de fluage**

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0 & si \quad 0 \le t \le T \\ 0 & si \quad t > T \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{E}\left(1 + \frac{t}{\tau}\right) & si \quad 0 \le t \le T \\ \varepsilon(T) & si \quad t > T \end{cases}$$



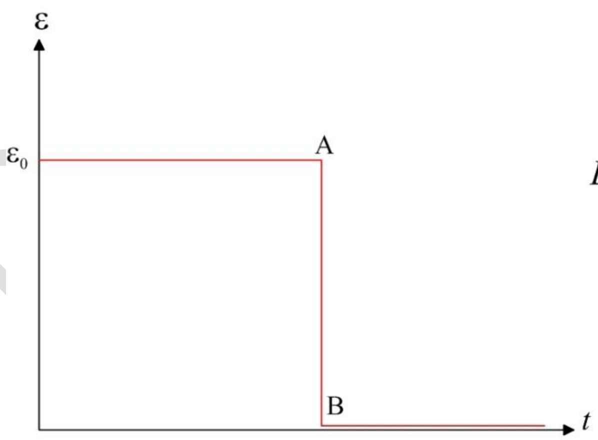
Sollicitation



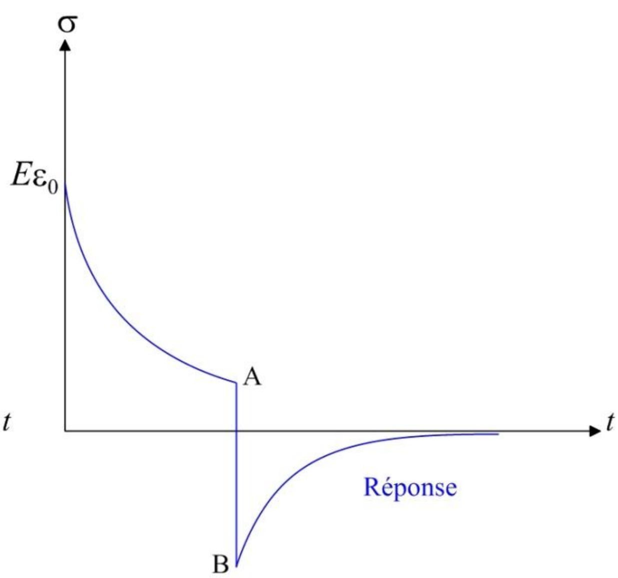
Réponse

- **Réponse à un essai de relaxation**

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon_0 & si \quad 0 \le t \le T \\ 0 & si \quad t > T \end{cases} \Rightarrow \quad \sigma(t) = \begin{cases} E\varepsilon_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) & si \quad 0 \le t \le T \\ E\varepsilon_0 \left[\exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) - 1\right]\exp\left(-\frac{t-T}{\tau}\right) & si \quad t > T \end{cases}$$



Sollicitation

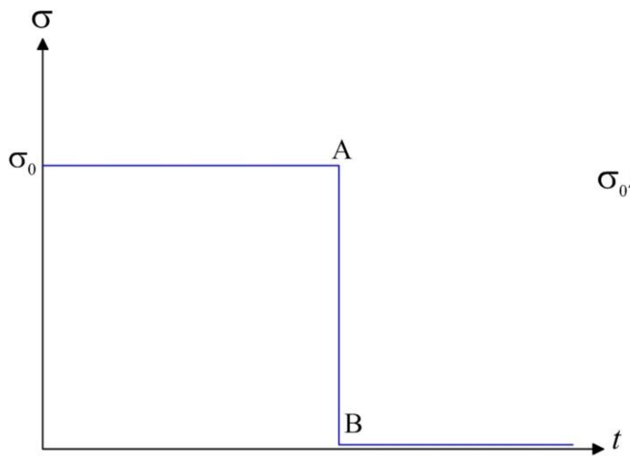


Réponse

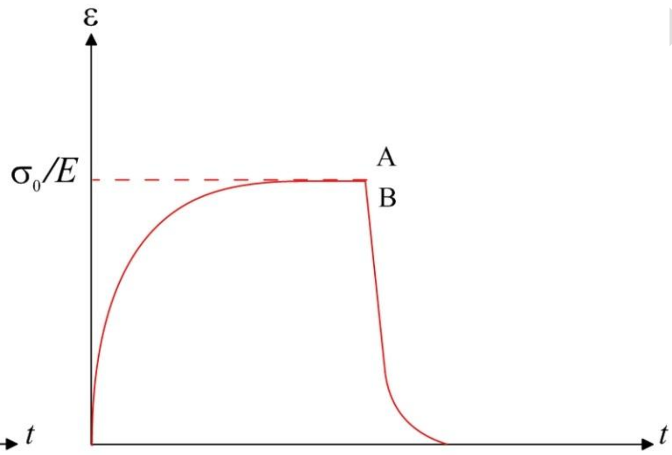
II.7.2. Modèle de Kelvin-Voigt

- **Réponse à un essai de fluage**

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0 & si \;\; 0 \le t \le T \\ 0 & si \qquad t > T \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{E}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] & si \;\; 0 \le t \le T \\ \varepsilon(T)\exp\left(-\frac{t-T}{\tau}\right) & si \;\; t > T \end{cases}$$



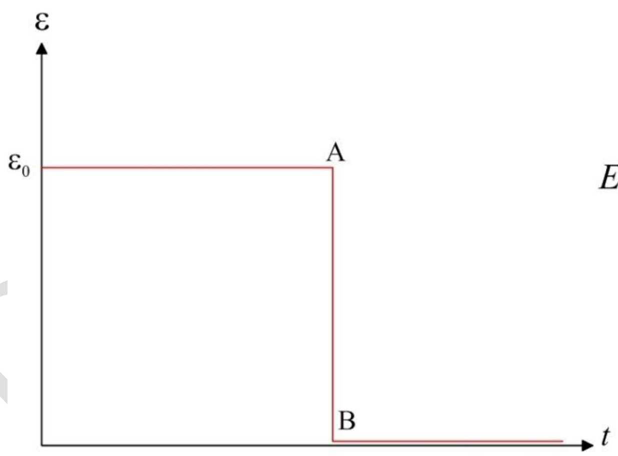
Sollicitation



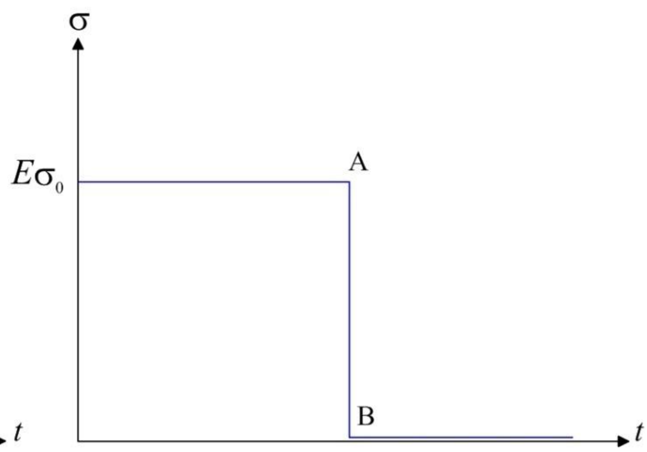
Réponse

- **Réponse à un essai de relaxation**

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon_0 & si \quad 0 \le t \le T \\ 0 & si \quad t > T \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0 & si \;\; 0 \le t \le T \\ 0 & si \qquad t > T \end{cases}$$



Sollicitation



Réponse