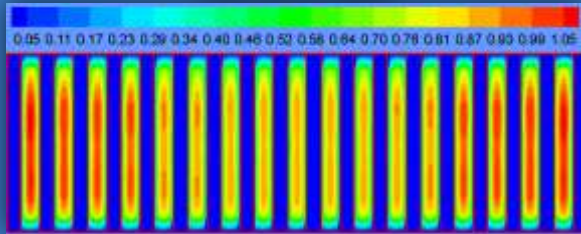
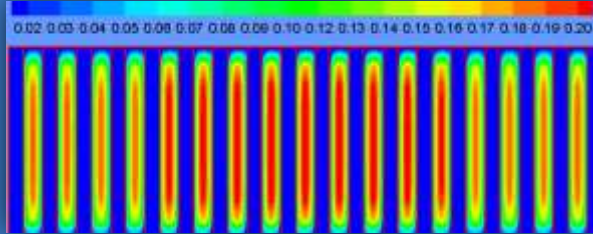


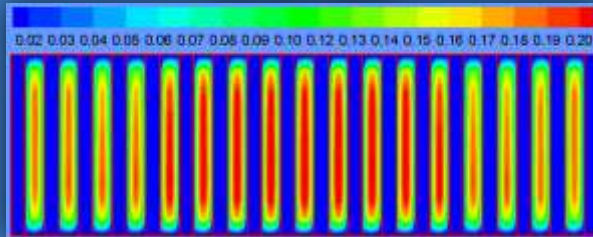
Prés de la sortie



Au milieu



Prés de l'entrée



## TRANSFERTS THERMIQUES APPROFONDIS ET PHENOMENES DE TRANSPORT

Dr. MEBRKI Ghazali

*Cours et Exercices*

## Chapitre I : Généralités sur les transferts de chaleur

### I.1 Introduction

### I.2 Définitions

### I.3 Formulation d'un problème de Transfert de chaleur :

- Bilan d'énergie
- Expression des flux d'énergie

### I.1 Introduction

Le transfert de chaleur est une science fondamentale qui traite le taux de transfert d'énergie thermique. Il est défini comme étant l'énergie transférée à cause d'une différence de température, des régions de hautes températures aux régions de basses températures. L'énergie peut être transférée entre un système et son environnement via le flux de chaleur par différents types de mécanismes appelés modes. Les modes de base de transfert de chaleur sont la conduction, rayonnement et convection.

### 1.2 Définitions

- **Transport d'énergie:** c'est le déplacement dans l'espace d'une quantité d'énergie. Par exemple, le déplacement d'une quantité d'eau chaude à partir d'une chaudière à travers un réseau de conduites pour l'amener vers un lieu à chauffer.
- **Stockage d'énergie:** c'est le déplacement dans le temps d'une quantité d'énergie. Par exemple, la quantité d'eau chaude précédente est obtenue par chauffage de nuit au moyen d'un thermoplongeur électrique et elle est utilisée de jour.
- **Transfert d'énergie :** c'est le passage d'une quantité d'énergie d'un milieu matériel (solide, liquide ou gazeux) à un autre milieu matériel. Par exemple, Notre eau chaude, par l'intermédiaire du radiateur (échangeur de chaleur), transfère son énergie à l'air environnant.
- **Conversion d'énergie :** c'est le passage d'une forme d'énergie à une autre. Par exemple, la transformation de l'énergie électrique en énergie thermique par l'intermédiaire de la résistance du thermoplongeur (l'effet Joule).
- **Température**  
La notion de température dérive des sensations de froid et de chaud. La température est une grandeur dont l'évolution produit différents phénomènes tels que des variations de longueur ou de volume. C'est une grandeur repérable et non mesurable. On repère alors la température

en mesurant l'effet produit par sa variation sur le corps étudié. C'est le principe du thermomètre : la variation de la hauteur de mercure est reliée à la variation de la température correspondante. Le thermomètre ainsi formé doit permettre de définir la température d'autres corps. Ceci est possible grâce à la notion fondamentale d'équilibre thermique.

▪ **Equilibre thermique**

Lorsque l'on place deux objets, l'un chaud, l'autre froid, dans une enceinte qui n'échange pas avec le milieu extérieur (système isolé), le corps chaud se refroidit tandis que le corps froid se réchauffe et ce jusqu'à un état d'équilibre pour lequel les températures des deux corps s'égalisent. Si l'un est un thermomètre, on a ainsi déterminé la température de l'autre corps. Les températures des deux corps n'étant pas égales, un flux de chaleur apparaît qui persiste jusqu'au moment où le système atteint l'équilibre thermique. La température se mesure en degrés Celsius (°C) ou en Kelvin (K).

Au niveau microscopique, La température d'un corps est liée à l'agitation moléculaire (mouvement incessant et désordonné qui entraîne des chocs entre les molécules) et elle est d'autant plus élevée que l'agitation moléculaire est importante.

▪ **Champ de température**

Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température :  $T = f(x,y,z,t)$ . La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. Nous distinguerons deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou transitoire.

▪ **Gradient de température**

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de la température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température :

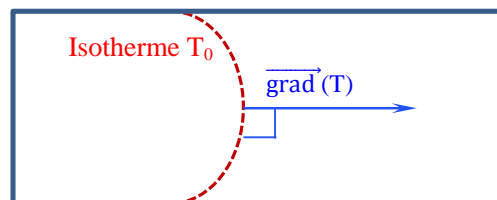


Figure I.1 : Isotherme et gradient thermique

$$\overrightarrow{\text{grad}}(T) = \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n} \tag{I.1}$$

Avec :  $\vec{n}$  vecteur unitaire de la normale.

▪ **Quantité de chaleur**

La quantité de chaleur absorbée ou cédée par un corps de masse  $m$  dont la température évolue de  $T_i$  (température initiale) à  $T_f$  (température finale) est exprimée par :

$$Q = mC (T_i - T_f) \quad [J] \quad (I.2)$$

Où:  $m$  : masse du corps, s'exprime en kg

$C$  : chaleur spécifique, définie comme étant la quantité de chaleur qu'il faut fournir à une unité de masse de 1 kg pour élever sa température de 1 K. Elle s'exprime en [J/ kg.K]

$m.C$  : capacité calorifique, s'exprime en J/K.

On peut modifier la température en maintenant le corps à volume constant ou à pression constante. Les chaleurs spécifiques correspondantes sont notées  $C_v$  (évolution isochore) et  $C_p$  (évolution isobare). Pour les solides et les liquides  $C_v \approx C_p$ .

▪ **Flux de chaleur**

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur :

$$\phi = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt} \quad \left[ \frac{W}{m^2} \right] \quad (I.3)$$

Où 'S' est l'aire de la surface en (m<sup>2</sup>).

On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise sur la surface S par unité de temps :

$$\varphi = \frac{dQ}{dt} \quad [W] \quad (I.4)$$

**I.3 Formulation d'un problème de transfert de chaleur**

▪ **Bilan d'énergie**

L'inventaire des différents flux de chaleur qui influent sur l'état d'un système fermé (S) est :

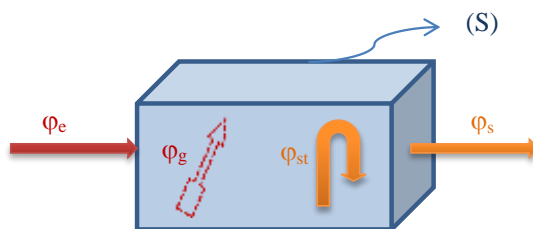


Figure I.2 : Bilan d'énergie

$\varphi_e$  : flux de chaleur entrant dans le système (S)

$\varphi_g$  : flux de chaleur généré dans le système (S)

$\varphi_{st}$  : flux de chaleur stocké dans le système (S)

$\varphi_s$  : flux de chaleur sortant du système (S)

Pour établir le bilan d'énergie du système (S), on applique le premier principe de la thermodynamique:

$$\varphi_e + \varphi_g = \varphi_s + \varphi_{st}$$

Il faut établir les expressions des différents flux d'énergie. En reportant ces expressions dans le bilan d'énergie, on obtient une équation différentielle dont la résolution permet de connaître l'évolution de la température en chaque point du système.

### ▪ Expression des différents flux d'énergie

Les échanges thermiques entre deux phases se font suivant trois types ou modes de transfert de chaleur qui sont décrits ci-dessous.

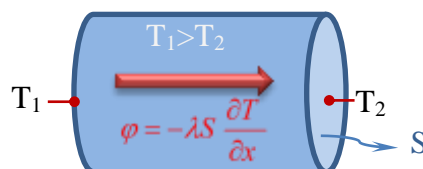
#### 1. Conduction

C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaque (solides ou fluides au repos), sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température. La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de **Fourier** (Jean Baptiste Fourier, mathématicien et physicien Français): « En tout point d'un milieu isotrope, la densité de flux thermique instantané, est proportionnelle au gradient de température»

$$\vec{\varphi} = -\lambda \overrightarrow{grad}(T) \quad (I.5)$$

Ce flux de chaleur s'écrit sous forme algébrique par :

$$\varphi = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \quad [W] \quad (I.6)$$



Avec :

$\varphi$ : Flux de chaleur transmis par conduction (W)

$\lambda$ : Conductivité thermique du milieu (W/m<sup>°K</sup>)

$x$ : Variable d'espace dans la direction du flux (m)

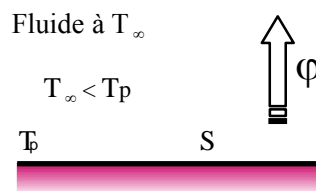
$S$ : Aire de la section de passage du flux de chaleur (m<sup>2</sup>)

**Remarque** : Le flux thermique est compté positivement dans le sens d'écoulement de la chaleur (c'est-à-dire des hautes températures vers les basses températures), par contre le gradient est un vecteur porté par le même axe mais de sens contraire au flux thermique (des petites vers les grandes valeurs) d'où le signe négatif (-) de la loi de Fourier.

## 2. Convection

C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide (liquide ou gaz), l'énergie étant transmise par déplacement du fluide (C'est le fluide en mouvement qui transporte de la chaleur). Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de **Newton** :

$$\varphi = hS(T_p - T_\infty) \quad [W] \quad (I.7)$$



Avec :

$\varphi$ : Flux de chaleur transmis par convection (W)

$h$ : Coefficient de transfert de chaleur par convection ( $W/m^2 \cdot ^\circ C$ )

$T_p$ : Température de surface du solide ( $^\circ C$ )

$T_\infty$ : Température du fluide loin de la surface du solide ( $^\circ C$ )

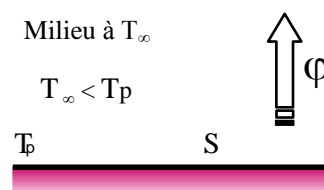
$S$  : Aire de la surface de contact solide/fluide ( $m^2$ )

**Remarque** : La valeur du coefficient de transfert de chaleur par convection  $h$  est fonction de la nature du fluide, de sa température, de sa vitesse et des caractéristiques géométriques de la surface de contact solide/fluide.

## 3. Rayonnement

C'est un transfert d'énergie électromagnétique entre deux surfaces de températures différentes sans nécessité de support matériel (même dans le vide). Ce type de transfert de chaleur est régi par la loi de **Boltzmann** :

$$\varphi = \sigma \varepsilon_p S (T_p^4 - T_\infty^4) \quad [W] \quad (I.8)$$



Avec :

$\varphi$ : Flux de chaleur transmis par rayonnement (W)

$\sigma$ : Constante de Stefan ( $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^{-4}$ )

$\varepsilon_p$ : Facteur d'émission de la surface

$T_p$ : Température de la surface (**K**)

$T_\infty$  : Température du milieu environnant la surface (**K**)

$S$  : Aire de la surface ( $\text{m}^2$ )

▪ **Flux de chaleur lié à un débit massique**

Lorsqu'un débit massique de matière  $\dot{m}$  entre dans le système à une température  $T_1$  et en ressort à la température  $T_2$ , on doit considérer dans le bilan thermique un flux de chaleur entrant correspondant:

$$\varphi = \dot{m}C(T_1 - T_2) \quad [\text{W}] \quad (\text{I.10})$$

Avec:

$\varphi$ : Flux de chaleur entrant dans le système (W)

$\dot{m}$ : Débit massique (kg/s)

$C$ : Chaleur spécifique (J/kg.K)

$T_1, T_2$ : Températures d'entrée et de sortie (K)

▪ **Flux de chaleur stocké**

Le stockage d'énergie dans un corps correspond à une augmentation de son énergie interne au cours du temps d'où (à pression constante et en l'absence de changement d'état) on a:

$$\varphi_{st} = \rho V C \frac{\partial T}{\partial t} \quad [\text{W}] \quad (\text{I.11})$$

Avec:

$\varphi_{st}$ : Flux de chaleur stocké (W)

$\rho$ : Masse volumique ( $\text{kg/m}^3$ )

$V$ : Volume ( $\text{m}^3$ )

$C$ : Chaleur spécifique (J/kg °C)

$T$ : Température (°C)

$t$ : Temps (s)

Le produit  $\rho \cdot V \cdot C$  est appelé la capacitance thermique du corps.

▪ **Flux de chaleur généré**

Ce type de flux de chaleur intervient lorsqu'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, mécanique, nucléaire) est convertie en énergie thermique. On peut l'écrire sous la forme :

$$\varphi_g = \dot{q}V \quad [\text{W}] \quad (\text{I.12})$$

Avec :

$\varphi_g$ : Flux d'énergie thermique générée (W)

$\dot{q}$ : Densité volumique d'énergie générée (W/m<sup>3</sup>)

$V$ : Volume (m<sup>3</sup>)



## Chapitre II : Transfert de chaleur par conduction en régime permanent

### II.1 Equation de la chaleur

#### II.2 Transfert unidirectionnel: mur et cylindre creux multicouches

#### II.3 Prise en compte des transferts radiatifs

#### II.4 Transfert multidirectionnel: méthode du coefficient de forme, méthodes numériques

#### II.5 Les ailettes : flux extrait par une ailette, efficacité d'une ailette, choix des ailettes

### II.1 Equation de la chaleur

Considérant la conduction de la chaleur unidimensionnelle à travers un mur plan de conductivité thermique ' $\lambda$ ', d'épaisseur ' $e$ ', de longueur ' $L$ ' très grande par rapport à son épaisseur ( $L \gg e$ ) et section d'aire ' $S$ ' normale à la direction  $Ox$ , (figure II.1).

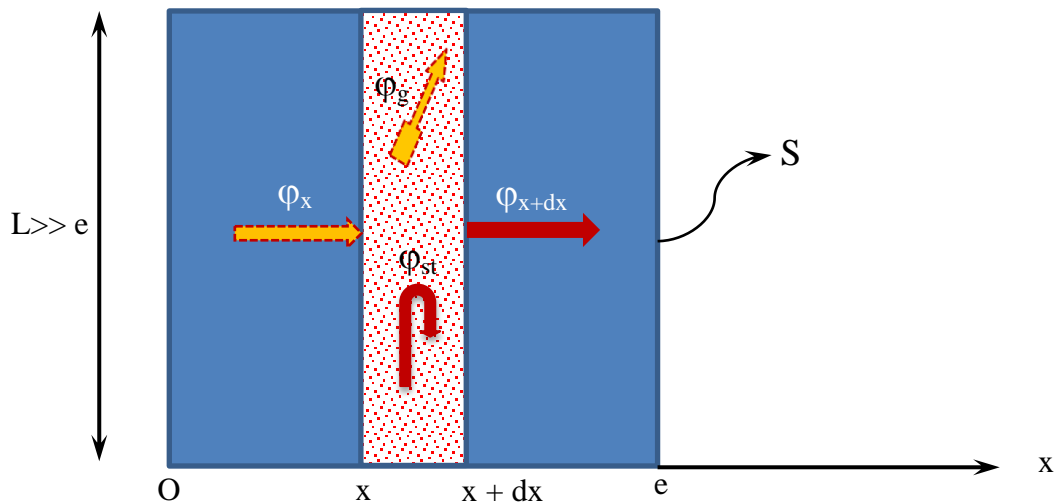


Figure II.1 : Bilan thermique sur un système élémentaire

Si on prend une portion de ce mur d'épaisseur ' $dx$ ', le bilan d'énergie s'écrit :

$$\varphi_x + \varphi_g = \varphi_{x+dx} + \varphi_{st} \quad (\text{II.1})$$

Avec (Sachant que le volume du système étudié est  $V = S \cdot dx$ ) :

$$\varphi_x = - \left( \lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right)_x$$

$$\varphi_{x+dx} = - \left( \lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx}$$

$$\varphi_{st} = \rho V C \frac{\partial T}{\partial t} = \rho (S dx) C \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\varphi_g = \dot{q} V = \dot{q} S dx$$

En remplaçant dans l'équation du bilan (II.1), on obtient :

$$-\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x + q S dx = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} + \rho (S dx) C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Après réarrangement et en divisant par 'S.dx', on obtient :

$$\frac{\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x}{dx} + q = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

D'après la définition de la dérivée d'une fonction f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{x+dx} - f_x}{dx}$$

L'équation du bilan thermique :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

C'est l'équation de la chaleur unidimensionnelle. En généralisant pour le cas de la conduction tridimensionnel, nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas le plus général :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.2})$$

Si le milieu est isotrope :  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda_x$  et l'équation de la chaleur devient, après division par  $\lambda$  :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{q}{\lambda} = \frac{\rho C}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Ou encore :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{\lambda} = \frac{\rho C}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.3})$$

Le rapport  $\alpha = \frac{\rho C}{\lambda}$  en (m<sup>2</sup>/s) est appelé la diffusivité thermique qui caractérise la vitesse de propagation d'un flux de chaleur à travers un matériau.

En coordonnées cylindrique l'équation de la chaleur s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.4})$$

Dans le cas d'un problème à symétrie cylindrique où la température ne dépend que de 'r' et de 't', cette équation peut s'écrire sous forme simplifiée :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{q}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{q}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

En coordonnées sphériques l'équation de la chaleur s'écrit sous la forme:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{q}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.5})$$

## II.2 Transfert unidirectionnel

### ▪ Mur simple

On considère un mur simple d'épaisseur 'e', de conductivité thermique 'λ' et de grandes dimensions transversales (L >> e) dont les faces extrêmes sont à des températures T<sub>1</sub> et T<sub>2</sub>. Dans ce cas le transfert de chaleur est unidirectionnel et si en plus il n'y a pas de génération ni de stockage d'énergie, l'équation de la chaleur (II.3) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = C_1 \Rightarrow dT = C_1 dx \Rightarrow T(x) = C_1 x + C_2$$

Avec les conditions aux limites : T(x = 0) = T<sub>1</sub> et T(x = e) = T<sub>2</sub>.

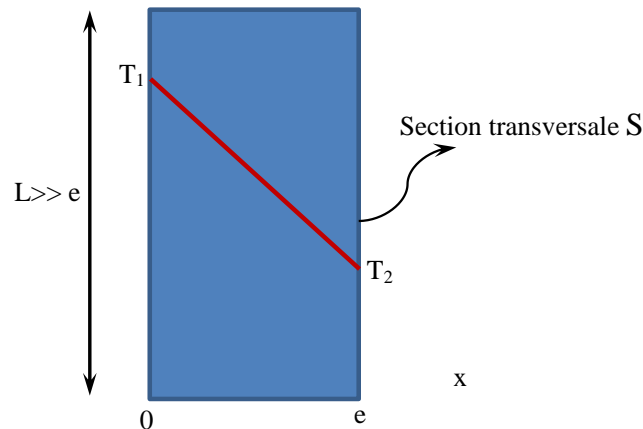


Figure II.2 : Mur simple

D'où : D'où :  $C_2 = T_1$  et  $C_1 = \frac{T_2 - T_1}{e}$

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{e} x + T_1 \quad (\text{II.6})$$

Le profil de température est linéaire.

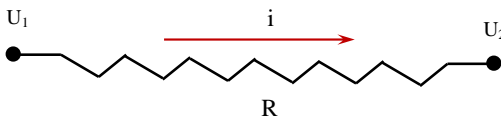
Le flux de chaleur qui traverse le mur s'écrit à partir de la relation de Fourier :

$$\varphi = -\lambda S \frac{dT}{dx} = -\lambda S \frac{T_2 - T_1}{e} = \lambda S \frac{T_1 - T_2}{e}$$

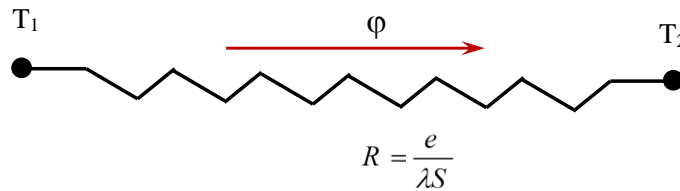
Ce flux de chaleur peut se mettre sous la forme :

$$\varphi = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{\lambda S}} \quad (\text{II.7})$$

**Analogie électrique** : La relation (II.7) peut être considérée analogue à la loi d'*Ohm* en électricité qui définit l'intensité du courant électrique comme le rapport de la différence de potentiel électrique sur la résistance électrique.

$$i = \frac{U_1 - U_2}{R}$$


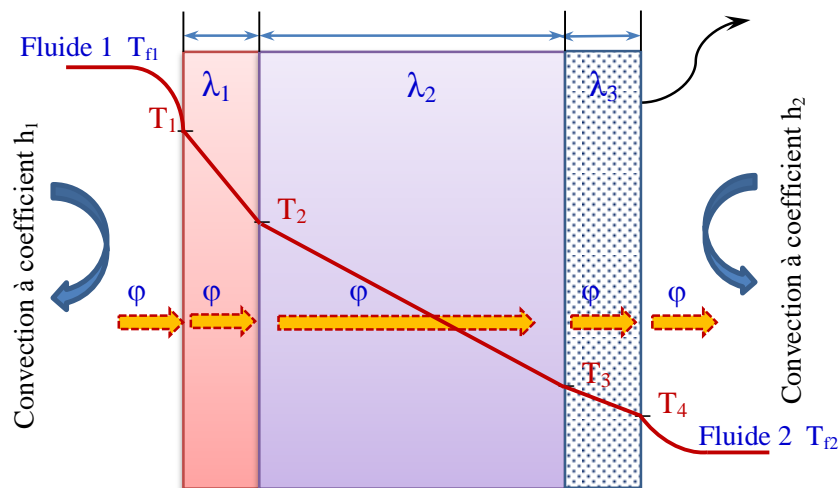
Le flux de chaleur est donc analogue au courant électrique, la température apparaît comme un potentiel thermique et le terme  $(e/\lambda S)$  apparaît comme la résistance thermique d'un mur plan d'épaisseur 'e', de conductivité thermique ' $\lambda$ ' et de surface latérale 'S'. On se ramène donc au schéma équivalent représenté sur la figure ci-dessous.



**Figure II.3** : Schéma électrique équivalent d'un mur simple

▪ **Mur multicouches**

C'est le cas des murs réels constitués de plusieurs couches de matériaux différents et où on ne connaît que les températures  $T_{f1}$  et  $T_{f2}$  des fluides en contact avec les deux faces du mur.



**Figure II.4** : Schématisation des flux et des températures dans un mur multicouches

On suppose qu'il n'y a pas de génération ni de stockage d'énergie dans ce mur. En régime permanent, le flux de chaleur se conserve lors de la traversée du mur (à partir du bilan

thermique, puisque :  $\varphi_g = \varphi_{st} = 0$ , le flux de chaleur entrant est donc égal à celui sortant :  $\varphi_e = \varphi_s = \varphi$ . Le flux de chaleur par convection se calcul à partir de la loi de Newton :

$$\varphi = h_1 S (T_{f1} - T_1) = \frac{T_{f1} - T_1}{\frac{1}{h_1 S}} \quad \text{et} \quad \varphi = h_2 S (T_4 - T_{f2}) = \frac{T_4 - T_{f2}}{\frac{1}{h_2 S}}$$

$$\varphi = \frac{T_{f1} - T_1}{\frac{1}{h_1 S}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e_1}{\lambda_1 S}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{e_2}{\lambda_2 S}} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{e_3}{\lambda_3 S}} = \frac{T_4 - T_{f2}}{\frac{1}{h_2 S}}$$

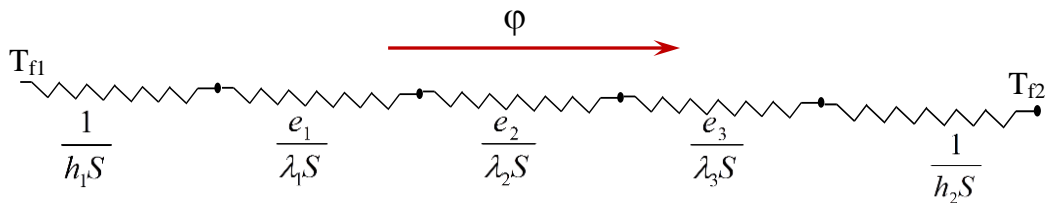
En utilisant la propriété mathématique :  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ , on obtient finalement :

$$\varphi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \frac{e_3}{\lambda_3 S} + \frac{1}{h_2 S}} \quad (\text{II.8})$$

Ce flux de chaleur est sous la forme :

$$\varphi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_{Th\_totale}} \quad \text{avec} \quad R_{Th\_totale} = \sum_1^5 R_i = \frac{1}{h_1 S} + \frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \frac{e_3}{\lambda_3 S} + \frac{1}{h_2 S} \quad (\text{II.9})$$

Le schéma électrique équivalent est représenté ci-dessous :



**Figure II.5 :** Schéma électrique équivalent d'un mur multicouches

Pour le cas d'un mur multicouches, il est souvent utile d'utiliser un coefficient d'échange de chaleur global 'U' défini par une expression similaire à celle de la loi de Newton relative au transfert de chaleur par convection  $\varphi = hS (T_p - T_\infty)$  on aura donc :

$$\varphi \equiv US (T_{f1} - T_{f2}) \equiv US \Delta T$$

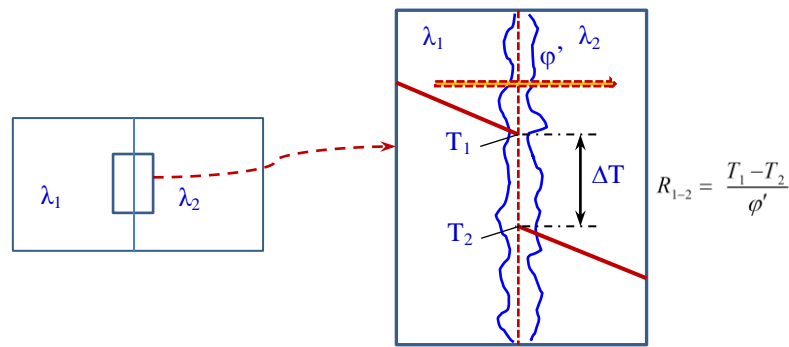
Avec ' $\Delta T$ ' la différence de température globale. Le coefficient d'échange de chaleur global est relié à la résistance thermique totale par :

$$\varphi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_{Th\_totale}} = US (T_{f1} - T_{f2}) \Rightarrow U = \frac{1}{SR_{Th\_totale}}$$

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3} + \frac{1}{h_2}} \quad (\text{II.10})$$

**Remarque :** On a considéré que les contacts entre les couches de différentes natures étaient parfaits et qu'il n'existait pas de discontinuité de température aux interfaces. En réalité, compte-tenu de la rugosité des surfaces, une microcouche d'air existe entre les creux des surfaces en regard qui contribue à la création d'une résistance thermique (l'air est un isolant) appelée résistance thermique de contact qui est souvent négligée. En prenant en compte cette résistance thermique, la formule précédente s'écrit alors :

$$\varphi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e_1}{\lambda_1 S} + R_{1-2} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + R_{2-3} + \frac{e_3}{\lambda_3 S} + \frac{1}{h_1 S}} \quad (\text{II.11})$$



**Figure II.6 :** Résistance de contact due à la discontinuité de température à l'interface

### ▪ Mur composite

C'est le cas le plus réel où les parois ne sont pas homogènes. Considérons le mur composite en série de la figure II.7. Des circuits électriques équivalents peuvent également être utilisés pour ces systèmes complexes. De telles parois peuvent impliquer un nombre de résistances thermiques en série et parallèles en raison de couches de matériaux différents.

Le flux de chaleur traversant le mur composite s'écrit :

$$\varphi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_{\text{équivalente}}}$$

En utilisant les lois d'association des résistances en série et en parallèle, on obtient la relation:

$$R_{\text{équivalente}} = R_1 + R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} + R_6 + R_7 \quad (\text{II.12})$$

Avec :

$$R_1 = \frac{1}{h_1 S} = \frac{1}{h_1 (l \cdot L)} ; R_2 = \frac{e_1}{\lambda_A S} = \frac{e_1}{\lambda_A (l \cdot L)}$$

$$R_3 = \frac{e_2}{\lambda_1 S_1} = \frac{e_2}{\lambda_1 (l_1 \cdot L)} ; R_4 = \frac{e_2}{\lambda_2 S_2} = \frac{e_2}{\lambda_2 (l_2 \cdot L)} ; R_5 = \frac{e_2}{\lambda_3 S_3} = \frac{e_2}{\lambda_3 (l_3 \cdot L)}$$

$$R_6 = \frac{e_3}{\lambda_B S} = \frac{e_3}{\lambda_B (L.L)} ; R_7 = \frac{1}{h_2 S} = \frac{1}{h_2 (L.L)}$$

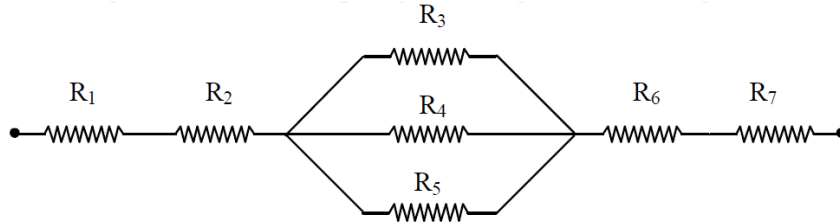
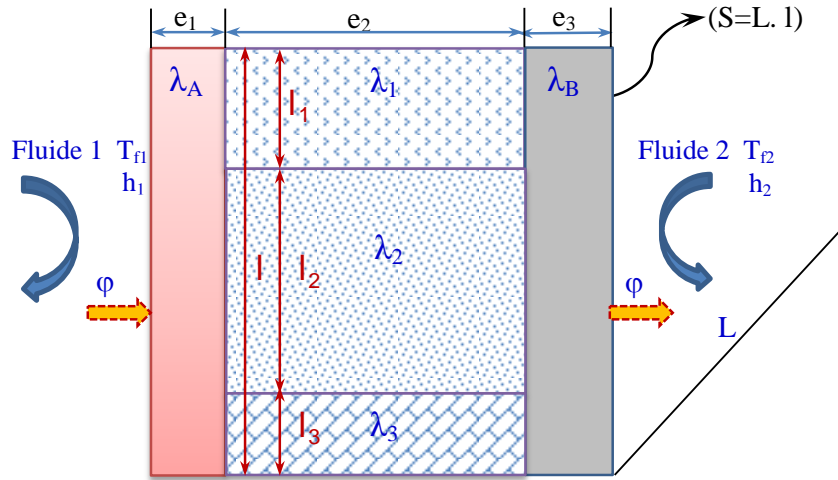


Figure II.7 : Mur composite et circuit électrique équivalent

▪ **Cylindre creux long (tube)**

On considère un cylindre creux de conductivité thermique ‘ $\lambda$ ’, de rayon intérieur ‘ $r_1$ ’, de rayon extérieur ‘ $r_2$ ’, de longueur ‘ $L$ ’, les températures des faces internes et externes étant respectivement  $T_1$  et  $T_2$  (figure II.8). On suppose que le gradient longitudinal de température est négligeable devant le gradient radial et qu’il n’y a pas de génération ni de stockage d’énergie dans ce cylindre. La forme simplifiée de l’équation de la chaleur (II.4) est la suivante :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 ; \frac{\partial}{\partial z} = 0 ; \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \tag{II.13}$$

Pour déterminer la distribution de la température dans le cylindre il faut résoudre l’équation (II.13) avec les conditions aux limites appropriées. Cette équation sera intégrée deux fois pour obtenir la solution générale:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT(r)}{dr} \right) = 0 \Rightarrow \left( r \frac{dT(r)}{dr} \right) = C_1 \Rightarrow \frac{dT(r)}{dr} = \frac{C_1}{r} \Rightarrow dT(r) = \frac{C_1}{r} dr$$

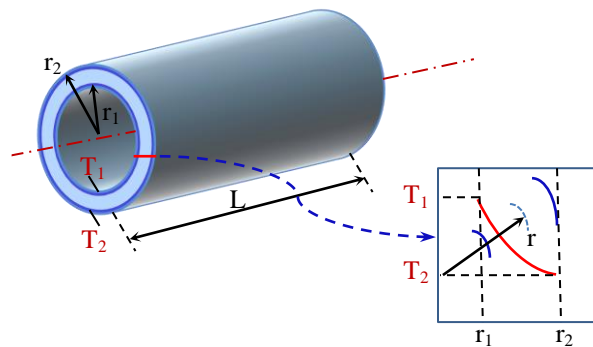
$$T(r) = \int \frac{C_1}{r} dr, \text{ après intégration on trouve la solution générale : } T(r) = C_1 \ln r + C_2$$

Les constantes d'intégration sont déterminées à partir des conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} T(r_1) &= T_1 \quad \text{et} \quad T(r_2) = T_2 \\ T_1 &= C_1 \ln r_1 + C_2 \quad \text{et} \quad T_2 = C_1 \ln r_2 + C_2 \\ C_1 &= \frac{T_1 - T_2}{\ln \left( \frac{r_1}{r_2} \right)} \quad \text{et} \quad C_2 = T_2 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \left( \frac{r_1}{r_2} \right)} \ln r_2 \end{aligned}$$

En substituant les valeurs des constantes  $C_1$  et  $C_2$  dans la solution générale on trouve :

$$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{\ln \left( \frac{r_1}{r_2} \right)} \ln \left( \frac{r}{r_2} \right) + T_2 \quad (\text{II.14})$$



**Figure II.8 :** *Cylindre creux*

Il faut noter la distribution de température à travers la paroi du cylindre creux est logarithmique et non pas linéaire comme le cas de la paroi plane ayant les mêmes conditions.

Le flux de chaleur traversant la paroi du tube s'exprime par la loi de Fourier :

$$\varphi = -\lambda S \frac{dT}{dr} \quad \text{avec} \quad S = 2\pi rL \Rightarrow \varphi = -\lambda(2\pi rL) \frac{dT}{dr} \quad \text{avec} \quad \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r}$$

$$\varphi = -\lambda(2\pi L) \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \left( \frac{r_1}{r_2} \right)} = \frac{2\pi L \lambda (T_1 - T_2)}{\ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)}$$

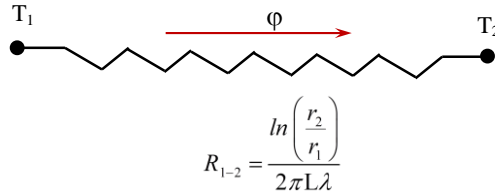
$$\varphi = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)}{2\pi L \lambda}} \quad (\text{II.15})$$

A partir de l'équation (II.13), il est évident que, la résistance thermique est de la forme :



$$\varphi = \frac{T_1 - T_2}{R_{1-2}} \quad \text{avec} \quad R_{1-2} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi L \lambda}$$

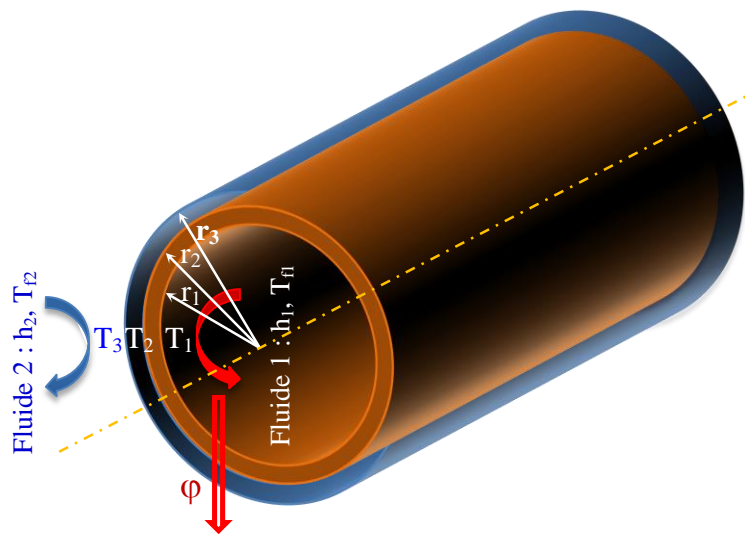
Le schéma électrique équivalent est le suivant :



**Figure II.9 :** Schéma électrique équivalent d'un cylindre creux

▪ **Cylindre creux multicouches**

Considérons maintenant le cas d'un tube creux recouvert d'une ou plusieurs couches de matériaux différents et où l'on ne connaît que les températures  $T_{f1}$  et  $T_{f2}$  des fluides en contact avec les faces interne et externe du cylindre. A l'intérieur et à l'extérieur du tube règne un transfert de chaleur par convection avec les coefficients de transfert de chaleur convectifs  $h_1$  et  $h_2$  respectivement. On suppose qu'il n'y a pas de génération ni de stockage d'énergie dans ce cylindre et que les résistances de contact sont négligeables.



**Figure II.10 :** Cylindre creux multicouches

En régime permanent, le flux de chaleur est conservé lors de la traversée des différentes couches et s'écrit :

$$\varphi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1(2\pi r_1 L)} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi L \lambda_1} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi L \lambda_2} + \frac{1}{h_2(2\pi r_3 L)}} \quad (\text{II.16})$$

Ce flux de chaleur peut être représenté par le schéma électrique équivalent suivant :

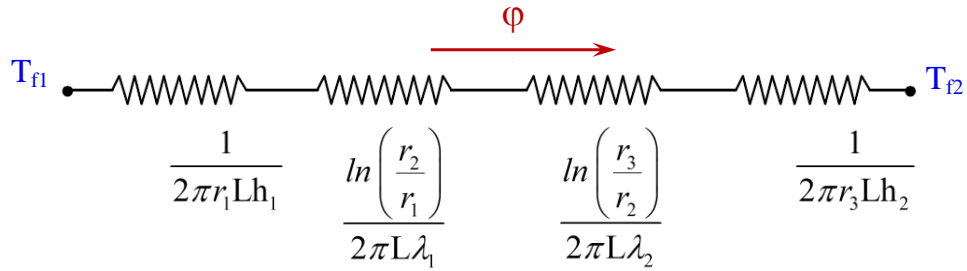


Figure II.11 : Schéma électrique équivalent d'un cylindre creux multicouches

### II.3 Prise en compte des transferts radiatifs

Dans les exemples traités précédemment, le transfert de chaleur entre une surface à une température donnée et le milieu environnant a été considéré comme purement convectif. Dans le cas où le fluide en contact avec la surface est un gaz et où la convection est naturelle, le transfert de chaleur par rayonnement avec les parois (à la température moyenne 'Tr') entourant la surface peut devenir du même ordre de grandeur que le transfert de chaleur par convection avec le gaz (à la température Tf) au contact de la surface et ne peut plus être négligé. Le transfert de chaleur par rayonnement s'écrit :

$$\varphi_r = \sigma \varepsilon S (T_2^4 - T_r^4)$$

Avec  $\varepsilon$  est l'émissivité de la paroi solide et  $s$  est le coefficient de Boltzmann. Ce flux radiatif peut se mettre sous la forme :

$$\varphi_r = \sigma \varepsilon S (T_2^4 - T_r^4) = \sigma \varepsilon S (T_2^2 + T_r^2)(T_2 + T_r)(T_2 - T_r)$$

$$\varphi_r = h_r S (T_2 - T_r) \quad \text{avec} \quad h_r = \sigma \varepsilon (T_2^2 + T_r^2)(T_2 + T_r)$$

$h_r$  est appelé le coefficient de transfert radiatif.

A l'interface entre la paroi et l'environnement on égalité des flux :

$$\varphi_{cond} = \varphi_{conv} + \varphi_{rad}$$

Les deux transferts de chaleur par convection et par rayonnement s'effectuent en parallèle et le schéma électrique correspondant est représenté sur la figure ci-dessous :

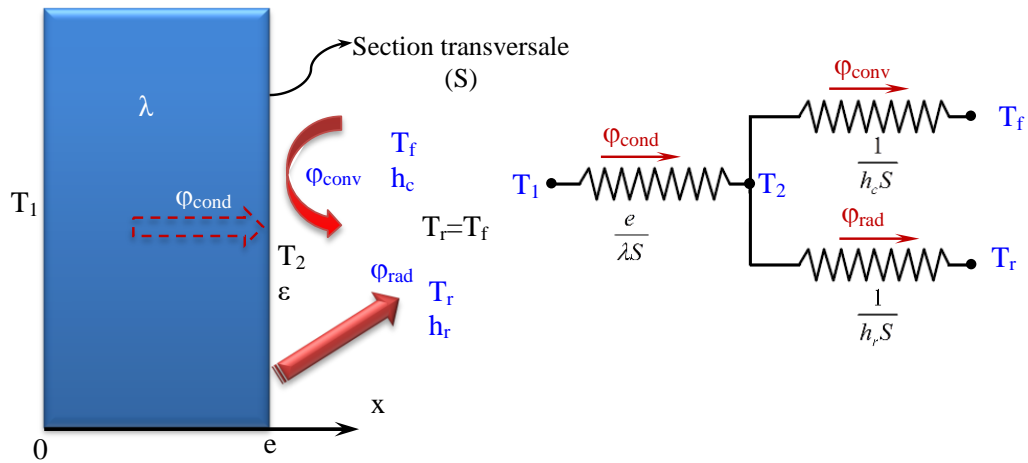


Figure II.12 : Prise en charge des transferts radiatif et convectif simultanés

Le flux de chaleur traversant le mur se calcul par :

$$\varphi = \frac{T_1 - T_f}{R_{\text{équivalente}}} = \frac{T_1 - T_r}{R_{\text{équivalente}}}$$

La résistance thermique s'écrit dans ce cas :

$$R_{\text{équivalent } e} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2}} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{\frac{1}{h_c S} + \frac{1}{h_r S}} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{h_c S + h_r S}$$

$$\varphi = \frac{T_1 - T_{f(r)}}{\frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{(h_c + h_r)S}} \quad [\text{W}] \quad (\text{II.17})$$

#### II.4 Transfert multidirectionnel

Dans le cas réel le transfert de chaleur n'est plus monodirectionnel mais s'effectue dans toutes les directions. La diffusion de la chaleur est donc multidirectionnelle. Pour déterminer la variation de température et le flux de chaleur, plusieurs méthodes peuvent être utilisées, elles comprennent l'utilisation d'approches analytiques (exactes), graphiques (approchées) et numériques (approchées).

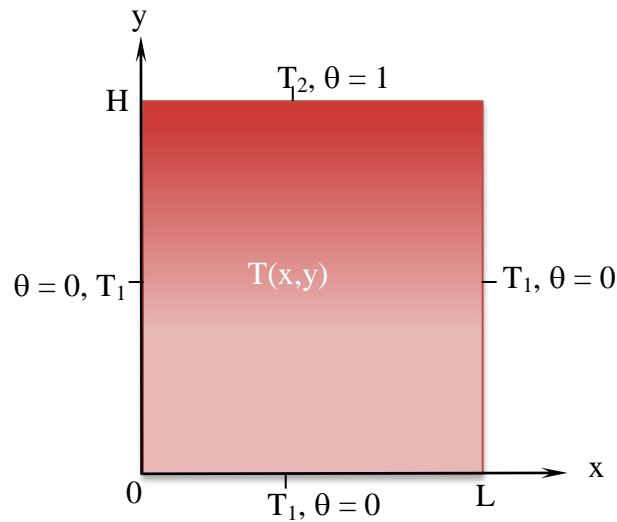
- **Méthode analytique (méthode de séparation des variables)**

Considérons l'exemple de la conduction thermique bidimensionnelle dans une plaque plane rectangulaire mince dont trois côtés sont maintenus à une température constante  $T_1$ , tandis que le quatrième côté est maintenu à une température constante  $T_2 \neq T_1$  (figure II.13). Il faut d'abord déterminer la distribution de température  $T(x, y)$  dans le milieu en résolvant l'équation

de la chaleur bidimensionnelle stationnaire sans génération de chaleur et à conductivité thermique constante. En simplifiant l'équation (II.3), on obtient:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\rho C}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\rho C}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{II.18})$$

Après résolution de cette équation et détermination de la répartition de la température  $T(x, y)$  dans la plaque, on peut alors déterminer les composantes du flux thermique  $\phi_x$  et  $\phi_y$ .



**Figure II.13 :** Conduction bidimensionnelle dans une plaque plane rectangulaire mince.

Pour simplifier la solution ainsi que pour avoir des conditions aux limites plus homogènes, on introduit le changement de variables suivant:

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$

En substituant la valeur de ' $\theta$ ' dans l'équation (II.18) on obtient:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{II.19})$$

Avec les conditions aux limites suivantes:

$$T(0,y) = T_1 \Rightarrow \theta(0,y) = 0$$

$$T(L,y) = T_1 \Rightarrow \theta(L,y) = 0$$

$$T(x,0) = T_1 \Rightarrow \theta(x,0) = 0$$

$$T(x,H) = T_2 \Rightarrow \theta(x,H) = 1$$

Nous appliquons maintenant la méthode de séparation des variables en supposant que la solution souhaitée peut être exprimée comme étant le produit de deux fonctions, dont l'une ne dépend que de  $x$  tandis que l'autre ne dépend que de  $y$ . Autrement dit, nous supposons l'existence d'une solution sous la forme suivantes:

$$\theta(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (\text{II.20})$$

En remplaçant dans l'équation (II.19):

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

En divisant par  $XY$ , on obtient :

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \quad (\text{II.21})$$

En effet, cette équation différentielle est séparable. Autrement dit, le côté gauche de l'équation ne dépend que de  $x$  et le côté droit ne dépend que de  $y$ . Par conséquent, l'égalité ne peut s'appliquer pour tout  $x$  ou  $y$  que si les deux côtés soient égaux à la même constante (dite constante de séparation et notée  $\omega^2$ , elle doit être strictement positive afin d'obtenir une solution satisfaisant aux conditions aux limites prescrites), nous avons alors :

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \omega^2$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + \omega^2 X = 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} - \omega^2 Y = 0 \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

Ainsi l'équation différentielle partielle (II.19) a été transformée en deux équations différentielles ordinaires (II.22) dont les solutions générales sont respectivement :

$$X = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$$

$$Y = C_3 e^{-\omega y} + C_4 e^{\omega y}$$

En remplaçant dans l'équation (II.20), la solution générale est donc de la forme :

$$\theta(x, y) = (C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x) (C_3 e^{-\omega y} + C_4 e^{\omega y}) \quad (\text{II.23})$$

En appliquant les conditions aux limites, on obtient :

$$\theta(0, y) = (C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0)(C_3 e^{-\omega y} + C_4 e^{\omega y}) = 0 \Rightarrow C_1(C_3 e^{-\omega y} + C_4 e^{\omega y}) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\theta(x, 0) = C_2 \sin \omega x (C_3 e^{-\omega 0} + C_4 e^{\omega 0}) = 0 \Rightarrow C_2 \sin \omega x (C_3 + C_4) = 0$$

Cette dernière condition ne peut être satisfaite que si  $C_3 + C_4 = 0$ , puisque si on prend  $C_2 = 0$  on aura la solution  $\theta(x, y) = 0$ , ce qui ne satisfait pas la condition aux limites  $\theta(x, H) = 1$ . L'équation (II.23) devient, en posant  $C_3 = -C_4$ :

$$\theta(x, y) = C_4 C_2 \sin \omega x (e^{\omega y} - e^{-\omega y})$$

La condition  $\theta(L, y) = 0$  donne :  $\theta(L, y) = C_4 C_2 \sin \omega L (e^{\omega y} - e^{-\omega y}) = 0$

Pour que cette condition soit satisfaite tout en évitant nulle, il faut donner à  $\omega$  des valeurs discrètes pour lesquelles  $\sin(\omega L) = 0$ . Ces valeurs doivent alors être de la forme :

$$\omega = \frac{n\pi}{L} \text{ avec } n = 1, 2, 3, \dots$$

La solution souhaitée peut maintenant être exprimée par :

$$\theta(x, y) = C_4 C_2 \sin \frac{n\pi x}{L} \left( e^{\frac{n\pi y}{L}} - e^{-\frac{n\pi y}{L}} \right) \quad (\text{II.24})$$

En combinant les constantes  $C_4$  et  $C_2$  pour avoir une nouvelle constante  $C_n = C_4 C_2$  qui dépend de  $n$ , et sachant que  $(e^{\frac{n\pi y}{L}} - e^{-\frac{n\pi y}{L}}) = 2 \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$ , la solution s'écrit alors sous la forme:

$$\theta(x, y) = C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \left( e^{\frac{n\pi y}{L}} - e^{-\frac{n\pi y}{L}} \right)$$

On obtient ainsi un nombre infini de solutions qui peuvent satisfaire l'équation différentielle (II.19) avec ces conditions aux limites. Cependant, comme le problème est linéaire, une solution plus générale peut être obtenue à partir d'une superposition de la forme :

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi y}{L} \quad (\text{II.25})$$

Pour déterminer la constante  $C_n$ , on applique la dernière condition aux limites restante :

$$\theta(x, H) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi H}{L} = 1$$

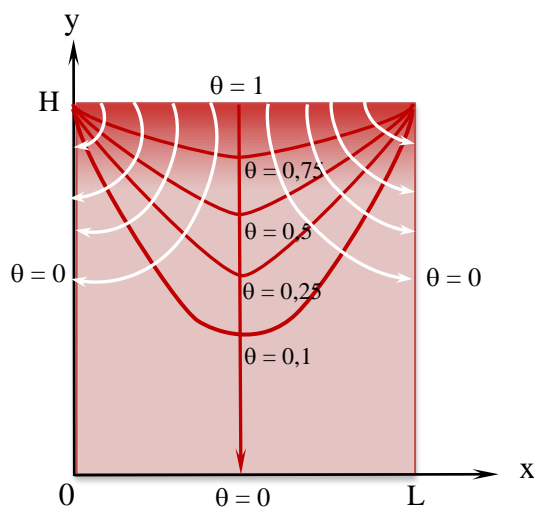
Pour évaluer  $C_n$ , on utilise la méthode de *série de Fourier* qui donne :

$$C_n = \frac{2 \left[ (-1)^{n+1} + 1 \right]}{n\pi \sinh \left( \frac{n\pi H}{L} \right)} \text{ avec } n = 1, 2, 3, \dots$$

En substituant la valeur de  $C_n$  dans l'équation (II.25), on obtient la solution finale suivante:

$$\theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n \pi x}{L} \frac{\sinh \frac{n \pi y}{L}}{\sinh \left( \frac{n \pi H}{L} \right)} \quad (\text{II.26})$$

Cette dernière équation est une série convergente, à partir de laquelle la valeur de  $\theta(x, y)$  et par conséquent celle de  $T(x, y)$  peut être calculée pour tout  $x$  et  $y$ . Les résultats sont représentés sous forme d'isothermes sur la plaque rectangulaire dans la figure II.14. Notons que le flux de chaleur est, par définition, toujours perpendiculaire aux isothermes et que la distribution de température est symétrique par rapport à  $x = L/2$  avec un flux adiabatique en cette position.



**Figure II.14 :** Distribution de températures (isothermes) et lignes de flux de chaleur pour la conduction bidimensionnelle dans une plaque rectangulaire.

▪ **Méthode numérique (méthode des différences finies)**

La solution analytique n'est pas accessible pour les problèmes impliquant des géométries et/ou des conditions aux limites complexes. Dans ces cas, la meilleure alternative est souvent celle utilisant les méthodes numériques telles que la méthode des différences finies, des éléments finis ou des volumes finis. A cause de sa facilité d'application, la méthode des différences finies est bien adaptée pour un traitement d'introduction des techniques numériques.

Contrairement à la solution analytique, qui permet de déterminer la température en tout point d'un domaine physique, la solution numérique permet de déterminer la température en des points discrets uniquement de ce domaine. La première étape d'une résolution numérique doit donc être la sélection de ces points discrets. Cela peut être fait en subdivisant le domaine physique réel en un certain nombre de petites régions et en attribuant à chacune un point de référence appelé nœud (cette opération est appelée discrétisation ou maillage).

Reprenons l'exemple de figure II.13 et essayons de résoudre l'équation de Laplace (II.18) numériquement par la méthode des différences finies. Cette équation doit être écrite pour chacun des points nodaux. L'ensemble d'équations résultant peut ensuite être résolu simultanément pour la température à chaque nœud. Les dérivées partielles de la température T peuvent s'exprimer selon les formules suivantes :

$$\frac{\partial T}{\partial x} \left( i + \frac{1}{2}, j \right) \approx \frac{T(i+1, j) - T(i, j)}{\Delta x} \quad \frac{\partial T}{\partial x} \left( i - \frac{1}{2}, j \right) \approx \frac{T(i, j) - T(i-1, j)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \left( i, j + \frac{1}{2} \right) \approx \frac{T(i, j+1) - T(i, j)}{\Delta y} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \left( i, j - \frac{1}{2} \right) \approx \frac{T(i, j) - T(i, j-1)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(i, j) \approx \frac{\frac{\partial T}{\partial x} \left( i + \frac{1}{2}, j \right) - \frac{\partial T}{\partial x} \left( i - \frac{1}{2}, j \right)}{\Delta x} = \frac{T(i+1, j) - 2T(i, j) + T(i-1, j)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(i, j) \approx \frac{\frac{\partial T}{\partial y} \left( i, j + \frac{1}{2} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} \left( i, j - \frac{1}{2} \right)}{\Delta y} = \frac{T(i, j+1) - 2T(i, j) + T(i, j-1)}{\Delta y^2}$$

L'équation de Laplace (II.18) devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T(i+1, j) - 2T(i, j) + T(i-1, j)}{\Delta x^2} + \frac{T(i, j+1) - 2T(i, j) + T(i, j-1)}{\Delta y^2} = 0$$

En utilisant un maillage avec  $\Delta x = \Delta y$  et après simplification on obtient :

$$\frac{T(i+1, j) - 2T(i, j) + T(i-1, j)}{\Delta x^2} + \frac{T(i, j+1) - 2T(i, j) + T(i, j-1)}{\Delta x^2} = 0$$

$$T(i+1, j) + T(i-1, j) + T(i, j+1) + T(i, j-1) - 4T(i, j) = 0 \quad (\text{II.27})$$

Avec  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  et  $j = 1, 2, 3, \dots, M$

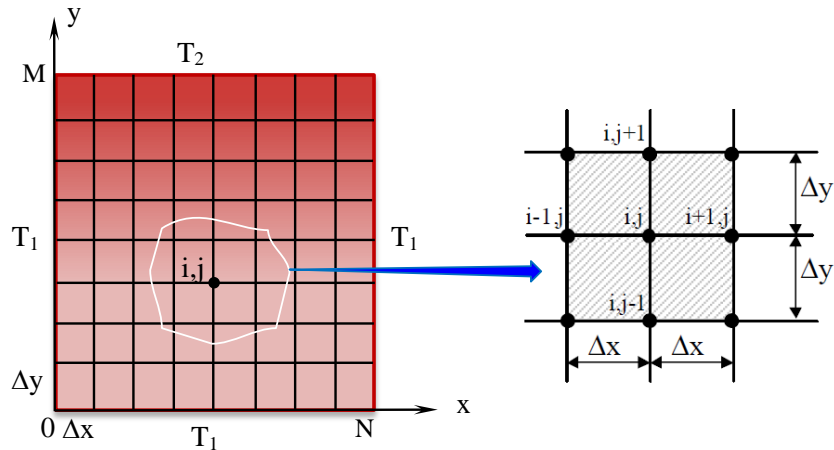


Figure II.15 : Discretisation du domaine d'étude par la méthode des différences finies.



Pour chaque nœud (i,j) du maillage, l'équation de la chaleur, qui est une équation différentielle exacte, est réduite à une équation algébrique approximative. Cette forme approximative de différence finie de l'équation de la chaleur peut être appliquée à tout nœud intérieur équidistant de ses quatre nœuds voisins. Elle nécessite simplement que la température d'un nœud intérieur soit égale à la moyenne des températures des quatre nœuds voisins. On obtient ainsi un système d'équations algébriques qui, après intégration des conditions aux limites, sera résolu par une méthode directe telle que la méthode de Gauss ou indirecte (itérative) telle que celle de Jacobi ou Gauss-Seidel. Cette résolution donne la répartition de la température dans la plaque.

▪ **Méthode du coefficient de forme**

Dans la plupart des cas, la solution analytiques de l'équation de diffusion de la chaleur multidimensionnelle est très lente voire impossible. De même, la solution numérique peut être compliquée et consommatrice du temps. C'est pourquoi, la méthode du coefficient de forme est souvent adoptée. Dans cette méthode, les problèmes de conduction bidimensionnelle ou tridimensionnelle peuvent être rapidement résolus en utilisant des solutions existantes de l'équation de diffusion de la chaleur. Ces solutions sont rapportées en termes de facteur de forme 'F' qui est défini par :

$$\varphi = F \lambda \Delta T_{1-2} \quad \text{avec} \quad \Delta T_{1-2} = T_1 - T_2 \quad (\text{II.28})$$

Avec :

$F$  : Coefficient de forme (m)

$T_1$ : Température de la surface  $S_1$  (°C)

$T_2$ : Température de la surface  $S_2$  (°C)

$\lambda$  : Conductivité thermique du milieu séparant les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  (W/ m °C1)

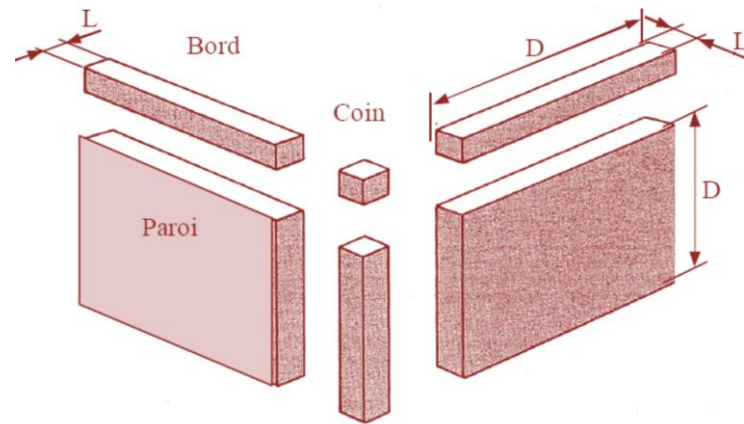
Le coefficient de forme 'F' ne dépend que de la forme, des dimensions et de la position relative des deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$ . Les valeurs de 'F' obtenues analytiquement pour les configurations 2-D et 3-D les plus courantes sont présentées dans le tableau II.1.

Pour l'exemple d'un mur plan, le flux de chaleur est donné par la relation :

$$\varphi = \lambda S \frac{T_1 - T_2}{e} = \lambda \frac{S}{e} (T_1 - T_2) = F \lambda (T_1 - T_2)$$

D'où le coefficient de forme :  $F = \frac{S}{e}$ , avec 'S' la surface du mur et 'e' son épaisseur.

Prenons l'exemple d'une enceinte tridimensionnelle (four, chambre froide, pièce climatisée,...). On découpe l'enceinte en différents éléments et on calcule le flux traversant chacun d'eux selon la représentation de la figure II.16.



**Figure II.16 :** Méthode du coefficient de forme pour enceinte tridimensionnelle [\*]

Si les dimensions longitudinales sont grandes devant l'épaisseur  $e$  des parois (supposée constante), les coefficients de forme des différents éléments ont pour valeur :

$$F_{\text{paroi}_i} = S_i/L_i$$

$$F_{\text{bord}_i} = 0,54 D_i$$

$$F_{\text{coin}_i} = 0,15 L_i$$

$S_i$  : Aire de la paroi  $i$

$D_i$  : Longueur de la paroi ou du bord  $i$

$L_i$  : Epaisseur des parois

Dans cette enceinte nous avons : 6 parois, 8 coins et 12 bords. Le flux de chaleur traversant l'enceinte s'écrit alors :

$$\varphi = \sum_{i=1}^6 \lambda_i F_{\text{paroi}_i} \Delta T_i + \sum_{i=1}^8 \lambda_i F_{\text{coin}_i} \Delta T_i + \sum_{i=1}^{12} \lambda_i F_{\text{bord}_i} \Delta T_i \quad (\text{II.29})$$

$\lambda_i$ : Conductivité thermique (équivalente pour une paroi multicouche) de la paroi  $i$  (W/m °C)

$\Delta T_i$ : Différence de température entre les faces intérieure et extérieure de la paroi  $i$  (°C).

**Tableau II.1** : Valeurs du coefficient de forme pour différentes configurations

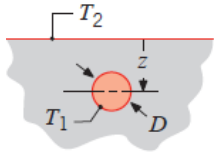
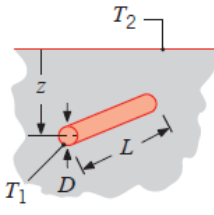
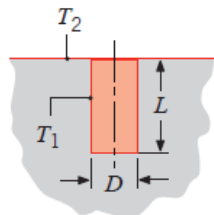
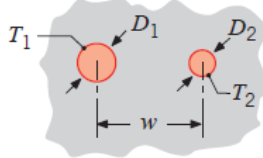
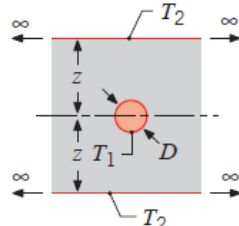
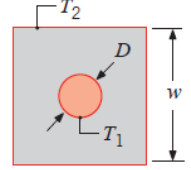
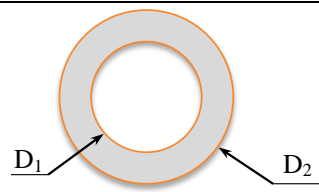
Systeme	Schéma	Limitations	Coefficient de forme
Sphère isotherme de diamètre D enterrée dans un milieu semi-infini		$z > \frac{D}{2}$	$\frac{2\pi D}{1 - \frac{D}{4z}}$
Cylindre horizontal isotherme de diamètre D enterré dans un milieu semi-infini		$L \square D$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{2z}{D}\right)}$
		$L \square D$ $z > \frac{3D}{2}$	$\frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{4z}{D}\right)}$
Cylindre vertical isotherme de diamètre D placé dans un milieu semi-infini à		$L \square D$	$\frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{4L}{D}\right)}$
Conduction entre deux cylindres de longueur L placés dans un milieu infini		$L \square D_1, D_2$ $L \square w$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{4w^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1D_2}\right)}$
Cylindre horizontal de longueur L à mi-chemin entre deux plans parallèles ayant la même longueur et de largeur infinie		$z \square \frac{D}{2}$ $L \square z$	$\frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{8z}{\pi D}\right)}$
Cylindre de longueur L centré dans un solide carré ayant la même longueur		$w \square D$ $L \square w$	$\frac{2\pi L}{\ln\left(1,08 \frac{w}{D}\right)}$
Sphère creuse		Aucune limitation	$\frac{\pi D_1 D_2}{D_1 - D_2}$

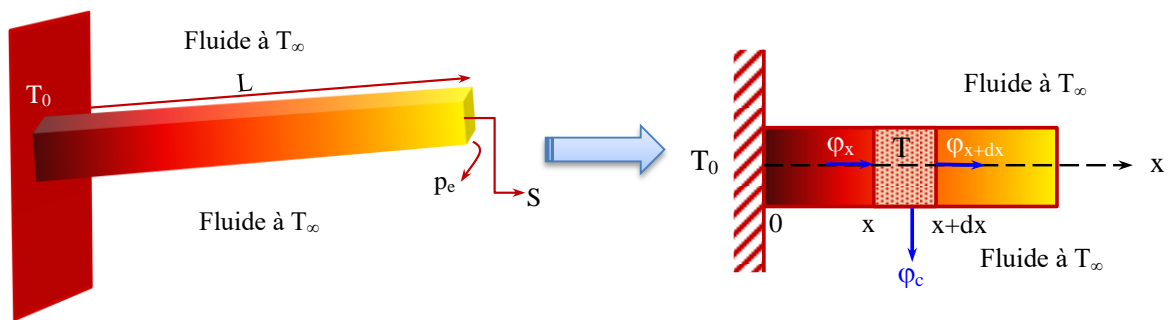
Tableau II.1 (Suite)

Systeme	Schéma	Limitations	Coefficient de forme
Cylindre excentrique de longueur L dans un cylindre de même longueur		$D > d$ $L \square D$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D^2 + d^2 - 4z^2}{2Dd}\right)}$
Conduction à travers le bord de murs mitoyens		$D > 5L$	0,54D
Conduction à travers le coin de trois murs avec une différence température ΔT à travers les murs		$L \square$ longueur et largeur du mur	0,15L
Disque de diamètre D et de température T1 sur un milieu semi-infini de température T2		Aucune limitation	2D
Canal carré de longueur L		$\frac{W}{w} < 1,4$ $L \square W$	$\frac{2\pi L}{0,785 \ln\left(\frac{W}{w}\right)}$
		$\frac{W}{w} > 1,4$ $L \square W$	$\frac{2\pi L}{0,930 \ln\left(\frac{W}{w}\right) - 0,050}$
Parallélépipède rectangle isotherme dans un milieu semi-infini à surface isotherme		Aucune limitation	$1,685L \left[ \log\left(1 + \frac{b}{a}\right) \right]^{-0,59} \left(\frac{b}{c}\right)^{-0,078}$
Cylindre situé au centre d'un parallélépipède de section carrée		$L \square W$	$\frac{2\pi L}{\ln\left(0,54 \frac{h}{r}\right)}$
Plaque rectangulaire mince enterrée dans milieu semi-infini à surface isotherme		$z = 0$	2D
		$z \square D$	4D

## II.5 Les ailettes

Les ailettes sont des surfaces étendues utilisées afin d'augmenter le transfert de chaleur entre une proie solide et le milieu environnant. Une ailette est un milieu bon conducteur de la chaleur dont une dimension est grande devant les autres, exemple : barre d'épaisseur 'e' et de longueur 'L', avec 'e << L'. Elles sont utilisées à chaque fois que des densités de flux élevées doivent être extraites d'un encombrement réduit : refroidissement de composants électroniques, refroidissement d'un moteur par air,...

Prenons l'exemple d'une ailette rectangulaire longue de section constante suffisamment faible pour qu'il n'y ait pas de variation de température dans une même section droite (figure II.17).



**Figure I.16 :** Représentation des flux élémentaires sur une ailette longue de section constante

En régime permanent et en négligeant le rayonnement, le bilan d'énergie sur le système constitué par la portion de barre comprise entre les abscisses 'x' et 'x + dx' s'écrit:

$$\varphi_x = \varphi_{x+dx} + \varphi_c$$

Avec :

$$\varphi_x : \text{Flux de chaleur transmis par conduction à l'abscisse 'x' : } \varphi_x = \left( -\lambda S \frac{dT}{dx} \right)_x$$

$$\varphi_{x+dx} : \text{Flux de chaleur transmis par conduction à l'abscisse 'x+dx' : } \varphi_{x+dx} = \left( -\lambda S \frac{dT}{dx} \right)_{x+dx}$$

$\varphi_{conv}$  : Flux de chaleur transmis par convection à la périphérie de la barre entre 'x' et 'x+dx' :

$$\varphi_{conv} = hS (T - T_\infty)$$

avec ' $S = p_e \cdot dx$ ' ( $p_e$  : est le périmètre de la section transversale de la barre)

Le bilan d'énergie s'écrit donc:

$$\left( -\lambda S \frac{dT}{dx} \right)_x = \left( -\lambda S \frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} + h p_e dx (T - T_\infty)$$

Si  $\lambda$  et  $S$  sont indépendantes de l'abscisse  $x$ , nous obtenons :

$$\lambda S \frac{\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} - \left(\frac{dT}{dx}\right)_x}{dx} = hp_e (T - T_\infty) \Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{hp_e}{\lambda S} (T - T_\infty) = 0 \quad (\text{II.30})$$

Cette équation différentielle est appelée équation de la barre, sa solution donne la variation de la température dans l'ailette.

▪ **Flux de chaleur extrait par une ailette**

Pour déterminer le flux de chaleur extrait par une ailette, il faut résoudre l'équation différentielle (II.30) qui représente la température  $T(x)$  d'une ailette encastrée dans un mur à la température  $T_0$  et baignant dans un fluide à la température  $T_\infty$ . Cette équation devient en posant

$$\theta = T - T_\infty \text{ et } \omega^2 = \frac{hp_e}{\lambda S} : \quad \frac{d^2 \theta}{dx^2} - \omega^2 \theta = 0$$

C'est une équation différentielle du 2<sup>nd</sup> ordre à coefficients constants dont la solution générale est de la forme :

$$\theta = A e^{\omega x} + B e^{-\omega x} \quad \text{ou} \quad \theta = A \operatorname{ch}(\omega x) + B \operatorname{sh}(\omega x)$$

La détermination des constantes  $A$  et  $B$  dépend des conditions aux limites à savoir :

$$T(x=0) = T_0,$$

$$T(x=L) = T_\infty,$$

Les conditions aux limites s'écrivent alors pour la variable  $\theta$ :

$$\text{En } x=0 : \quad \theta(x=0) = T_0 - T_\infty$$

$$\Rightarrow \theta(x=0) = A e^0 + B e^0 = A + B = T_0 - T_\infty$$

$$\text{En } x=L : \quad \theta(x=L) = T_\infty - T_\infty = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta(x=L) = A e^{\omega L} + B e^{-\omega L}$$

$L$  est très grande (ailette longue), alors on a pour la deuxième condition :

$$\theta(L) = A e^{\omega L} + B e^{-\omega L} \approx 0$$

Pour que la valeur de ' $\theta$ ' soit fini, faut donc que  $A$  soit égal à zéro :  $A = 0$

De la première condition, on obtient :  $B = T_0 - T_\infty$

D'où la solution de l'équation différentielle est :  $\theta = (T_0 - T_\infty) e^{-\omega x}$

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\omega x} \quad (\text{II.31})$$

Ou encore :

$$T(x) = (T_0 - T_\infty) e^{-\omega x} + T_\infty \quad (\text{II.32})$$

Le flux dissipé sur toute la surface de l'ailette est celui transmis par conduction à sa base soit :

$$\varphi_{\text{extrait}} = \varphi_{\text{conduction}}(x=0)$$

$$\varphi_{conduction} = \left( -\lambda S \frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = -\lambda S (T_0 - T_\infty) (-\omega) e^{-\omega x} \Big|_{x=0} \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{hp_e}{\lambda S}}$$

$$\varphi_{extrait} = \sqrt{\lambda S hp_e} (T_0 - T_\infty) \quad (\text{II.33})$$

▪ **Efficacité d'une ailette**

L'efficacité définit les performances d'une ailette en comparant le flux dissipé à celui qui serait dissipé dans une ailette de mêmes dimensions mais dont la température serait uniforme et égale à celle de la base (conductivité thermique  $\lambda$  tend vers  $\infty$ , pas de résistance thermique de conduction donc pas de chute de température dans l'aillette).

Le flux échangé par cette ailette idéale serait pour une ailette rectangulaire de périmètre ' $p_e$ ' et de longueur ' $L$ '.

$$\varphi_{max} = hp_e L (T_0 - T_\infty)$$

L'efficacité de l'aillette s'écrit donc :

$$\eta = \frac{\varphi_{extrait}}{\varphi_{max}} = \frac{\sqrt{\lambda S hp_e} (T_0 - T_\infty)}{hp_e L (T_0 - T_\infty)} = \frac{\sqrt{\lambda S hp_e}}{hp_e L} = \frac{\sqrt{\lambda S} \cancel{hp_e}}{(hp_e)^{\cancel{2}} L} = \frac{1}{L \sqrt{\frac{hp_e}{\lambda S}}} = \frac{1}{\omega L}$$

$$\eta = \frac{1}{\omega L} \quad (\text{II.34})$$

**Remarque :**

- 1- Dans le cas de géométries complexes (ailettes à section variable, ailettes aiguilles...), il existe des formules ou des abaques (voir tableau II.2) permettant de déterminer l'efficacité des ailettes et ensuite le flux de chaleur extrait par l'aillette grâce à la relation :  $\varphi_{extrait} = \eta \varphi_{max}$
- 2- Résistance thermique d'une ailette : des relations

$$\eta = \frac{\varphi_{extrait}}{\varphi_{max}} \quad \text{et} \quad \varphi_{max} = hp_e L (T_0 - T_\infty) = hS_e (T_0 - T_\infty) \quad \text{on obtient :} \quad \varphi_{extrait} = \frac{T_0 - T_\infty}{\frac{1}{\eta h S_e}}$$

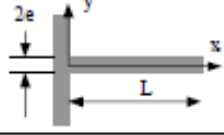
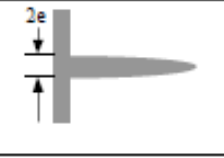
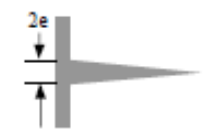

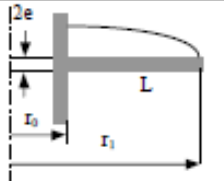
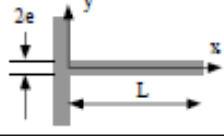
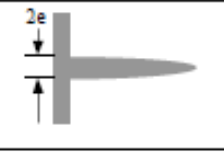
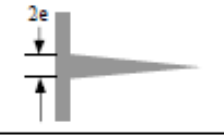

Où ' $S_e$ ' est la surface d'échange entre l'aillette et le fluide.

La résistance thermique globale entre la base de l'aillette à la température  $T_0$  et le fluide à la température  $T_\infty$  s'écrit donc :

$$R_{aillette} = \frac{1}{\eta h S_e} \quad (\text{II.35})$$

**Tableau II.2 : Efficacité de l'ailette pour des géométries complexes**

Hypothèse : Flux nul à l'extrémité de l'ailette, Il faut vérifier si  $\sqrt{\frac{he}{\lambda}} \ll 1$

Ailette droite	Rectangulaire $y = e$		$\eta = \frac{1}{\omega L} \text{th}(\omega L)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{h}{\lambda e}}$
	Parabolique $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{1/2}$		$\eta = \frac{1}{\omega L} \frac{I_{2/3}\left(\frac{4}{3}\omega L\right)}{I_{-1/3}\left(\frac{4}{3}\omega L\right)}$
	Triangulaire $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)$		$\eta = \frac{1}{\omega L} \frac{I_1(2\omega L)}{I_0(2\omega L)}$
	Parabolique $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$		$\eta = \frac{2}{\sqrt{4(\omega L)^2 + 1} + 1}$
Ailette circulaire	Rectangulaire $y = e$		$\eta = \frac{2}{\omega L \left(\frac{r_1}{r_0} + 1\right)} \frac{I_1(\omega r_0)K_1(\omega r_1) - I_1(\omega r_1)K_1(\omega r_0)}{I_0(\omega r_0)K_1(\omega r_1) - I_1(\omega r_1)K_0(\omega r_0)}$
Aiguilles (section droite circulaire)	Rectangulaire $y = e$		$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}\omega L} \text{th}(\sqrt{2}\omega L)$
	Parabolique $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{1/2}$		$\eta = \frac{3}{2\sqrt{2}\omega L} \frac{I_1\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}\omega L\right)}{I_0\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}\omega L\right)}$
	Triangulaire $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)$		$\eta = \frac{\sqrt{2}}{\omega L} \frac{I_2(2\sqrt{2}\omega L)}{I_1(2\sqrt{2}\omega L)}$
	Parabolique $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$		$\eta = \frac{2}{\sqrt{\frac{8}{9}(\omega L)^2 + 1} + 1}$

▪ **Choix des ailettes**

Les ailettes sont utilisées lorsqu'il faut extraire une densité de flux importante dans un encombrement réduit, exemples : radiateur d'automobile, carter de moteur refroidi par air, évaporateur de climatiseur,...

D'une façon générale, l'usage des ailettes est :



- Peu utile pour les liquides car le coefficient de transfert de chaleur par convection 'h' est grand,
- Utile dans le cas des gaz car le coefficient de transfert de chaleur par convection 'h' est faible.
- Des ailettes étroites et rapprochées sont meilleures que des ailettes plus grandes et espacées mais on est limité par les pertes de charges (elles augmentent si l'on diminue trop l'écartement des ailettes).
- L'ailette est d'autant plus performante que sa conductivité thermique  $\lambda$  est élevée. Le choix des ailettes est alors un compromis entre le coût, l'encombrement, les pertes de charge et le transfert de chaleur.

## Chapitre III : Transfert de chaleur par conduction en régime variable

### III.1 Conduction unidirectionnelle en régime variable :

- Milieu à température uniforme
- Transfert unidirectionnel dans des milieux limités
- Systèmes complexes : méthode des quadripôles

### III.2 Conduction unidirectionnelle en régime variable avec changement d'état

### III.3 Conduction multidirectionnelle en régime variable

### III.1 Conduction unidirectionnelle en régime variable

De nombreux problèmes de transfert de chaleur dépendent du temps. De tels problèmes transitoires surviennent généralement lorsque les conditions aux limites d'un milieu sont modifiées. Par exemple, si la température surfacique d'un milieu est modifiée, la température à chaque point de ce milieu commencera également à varier jusqu'à ce qu'elle atteigne une distribution stationnaire. L'objectif de ce chapitre est le développement de procédures permettant de déterminer la variation temporelle de la température dans un milieu solide au cours d'un processus transitoire, ainsi que le transfert de chaleur entre le solide et son environnement.

#### ▪ *Milieu à température uniforme*

L'hypothèse d'un milieu uniforme est à priori contradictoire car il est nécessaire qu'il y ait un gradient thermique pour qu'il se produise un transfert de chaleur. Cette approximation du milieu à température uniforme peut néanmoins être justifiée dans certains cas que l'on va préciser. Considérant un solide métallique initialement à la température ' $T_i$ ' immergé dans un fluide à température ' $T_0$ ' maintenue constante. L'énergie thermique est transférée par convection et rayonnement de la surface du solide vers le fluide environnant. Le transfert d'énergie par conduction se produit également de l'intérieur du solide vers sa surface, et la température à chaque point du solide diminue jusqu'à ce qu'un état stationnaire soit atteint. Les propriétés finales du matériau du solide dépendront considérablement de la variation temporaire de la température résultant du transfert de chaleur. Le contrôle du transfert de chaleur est donc l'un des clés de la fabrication de nouveaux matériaux aux propriétés améliorées.

Si l'on suppose que la température à l'intérieur du solide est uniforme, ceci est valable si ces dimensions sont petites et sa conductivité thermique est élevée. En négligeant le

transfert de chaleur par rayonnement, le bilan thermique entre deux instants 't' et 't + dt' s'écrit :

$$\varphi_e + \varphi_g = \varphi_s + \varphi_{st} \Rightarrow 0 = \varphi_s + \varphi_{st} \Rightarrow 0 = hS(T - T_0) + \rho VC \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{dT}{T - T_0} = -\frac{hS}{\rho VC} dt$$

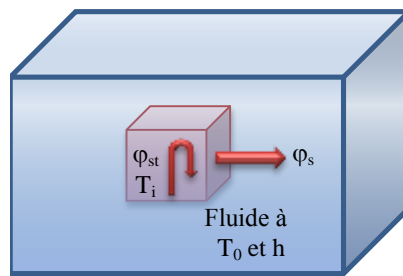
$$\int \frac{dT}{T - T_0} = -\int \frac{hS}{\rho VC} dt \Rightarrow \ln(T - T_0) = -\frac{hS}{\rho VC} t + C$$

Comme condition initiale : nous avons à t = 0, la température du solide était T = T<sub>i</sub>, d'où :

$$C = \ln(T - T_0) \text{ et par conséquent } \ln\left(\frac{T - T_0}{T_i - T}\right) = -\frac{hS}{\rho VC} t, \text{ la solution est donc sous la}$$

forme :

$$\frac{T - T_0}{T_i - T} = e^{-\left(\frac{hS}{\rho VC}\right)t} \quad \text{(III.1)}$$



**Figure III.1** : Refroidissement d'un solide métallique

L'équation (III.1) peut être utilisée pour déterminer le temps nécessaire au solide pour atteindre une certaine température T, ou, inversement, elle peut être utilisée pour calculer la température atteinte par le solide à un instant t.

Dans cette solution, le terme  $\frac{\rho VC}{hS}$  est une grandeur positive dont la dimension est 's<sup>-1</sup>', son inverse a une unité de temps (s). Ce terme est donc homogène à un temps et est appelé

'constante de temps' du système, il est exprimée par  $\tau = \frac{\rho VC}{hS} = \left(\frac{1}{hS}\right)\rho VC = R_{th}C_{th}$ .

où, R<sub>th</sub> est la résistance thermique convective et C<sub>th</sub> est la capacité thermique localisée (ou regroupée) du solide. Toute augmentation de R<sub>th</sub> ou C<sub>th</sub> fera réagir un solide plus lentement aux changements de son environnement thermique. L'équation (III.1) peut être écrite sous la forme :

$$\frac{T - T_0}{T_i - T} = e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} \quad \text{(III.2)}$$

Sous forme adimensionnelle, l'équation (III.2) devient après introduction de deux nombres adimensionnels particulièrement importants en régime variable :

$$\frac{T - T_0}{T_i - T} = e^{-Bi \cdot Fo} \quad (III.3)$$

Avec :

**Bi** : Nombre de Biot, il est défini par:

$$Bi = \frac{\text{Convection à la surface du corps}}{\text{Conduction dans le corps}} = \frac{h \Delta T}{\frac{\lambda \Delta T}{(\Delta x = l_c)}} = \frac{h l_c}{\lambda}$$

$$Bi = \frac{\text{Résistance thermique interne}}{\text{Résistance thermique externe}} = \frac{R_{conduction} = \frac{l_c}{\lambda S}}{R_{convection} = \frac{1}{hS}} = \frac{h l_c}{\lambda}$$

' $l_c$ ' est la dimension (ou longueur) caractéristique du milieu, définie comme le rapport du volume du solide à sa surface  $l_c = V/S$ . Une telle définition facilite le calcul de ' $l_c$ ' pour les solides ayant une forme compliquée. A titre d'exemple, pour un parallélépipède carré de côté ' $a$ '  $l_c = a$ , pour un cylindre long de rayon ' $r_o$ ',  $l_c = r_o/2$  et pour une sphère de rayon ' $r_o$ '  $l_c = r_o/3$ .

L'exposant de l'équation (III.1) peut être écrit sous forme :

$$\frac{hS}{\rho VC} t = \frac{h}{\rho C l_c} t = \frac{h l_c}{\lambda} \frac{\lambda}{\rho C} \frac{t}{l_c^2} = \frac{h l_c}{\lambda} \frac{\alpha t}{l_c^2}$$

$$Fo = \frac{\alpha t}{l_c^2}$$

**Fo** est le nombre de Fourier qui caractérise la pénétration de la chaleur en régime variable, avec ' $\alpha$ ' la diffusivité thermique caractérisant la vitesse de propagation d'un flux de chaleur à travers un matériau.  $\alpha = \frac{\lambda}{\rho C}$  (m<sup>2</sup>/s). L'exposant de l'équation (III.1) peut donc être écrit

sous la forme:

$$\frac{hS}{\rho VC} t = Bi \cdot Fo$$

Les résultats précédents indiquent que la différence entre les températures du solide et du fluide diminue exponentiellement jusqu'à zéro lorsque temps tend vers l'infini (figure III.2).

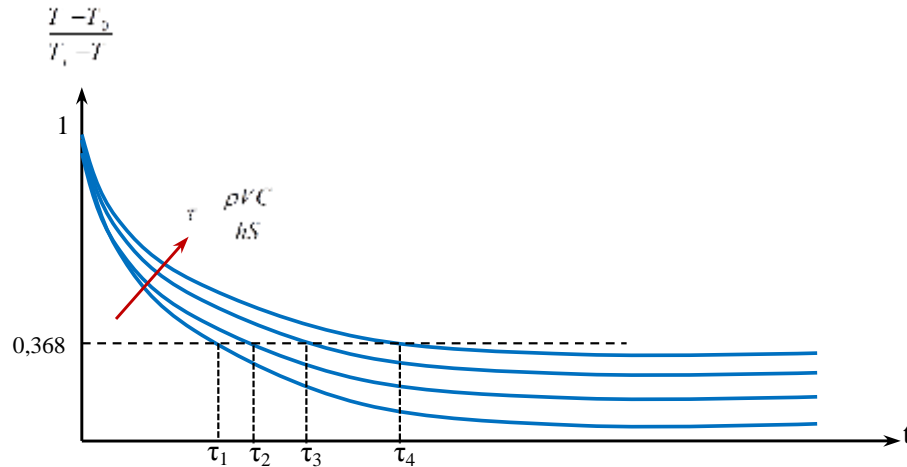


Figure III.2 : Evolution de la température dans un milieu à température uniforme

**Remarque :**

- 1- La connaissance du produit des nombres de Biot et de Fourier permet de déterminer l'évolution de la température de la sphère.
- 2- Un petit nombre de Biot ( $Bi < 0,1$ ) indique que la résistance à la conduction à l'intérieur du solide est bien inférieure à celle due à la convection à travers la couche limite du fluide et donc de faibles gradients de température sont obtenus dans le corps. Par conséquent, l'hypothèse d'une distribution uniforme de la température dans le solide est raisonnable si le nombre de Biot est petit.
- 3- Un petit nombre de Biot (rapport de la convection à la surface à la conduction dans le corps) est obtenu pour des solides de petites dimensions avec une conductivité thermique élevée, en particulier lorsqu'ils sont immergés dans un milieu mauvais conducteur de chaleur.

▪ **Transfert unidirectionnel dans des milieux limités (cas de la plaque infinie)**

On considère le cas d'une plaque d'épaisseur  $2L$  et de dimensions latérales suffisamment grandes pour que l'on puisse considérer que le transfert de chaleur est unidirectionnel. L'étude de ce cas permettra d'illustrer les différentes méthodes utilisées pour résoudre l'équation de la chaleur monodimensionnelle en régime variable qui s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \tag{III.4}$$

La solution de cette équation dépend de la condition initiale et des conditions aux limites.

**1- Plaque avec température constante imposée en surface**

Les conditions aux limites pour cet exemple sont les suivantes :

$$\begin{cases} \text{à } t = 0, T(x, 0) = T_i \\ \text{au frontières, } T(0, t) = T(2L, t) = T_0 \end{cases}$$

Pour résoudre l'équation (III.4), on utilise la méthode de décomposition de la température en un produit de fonctions et superposition des solutions.

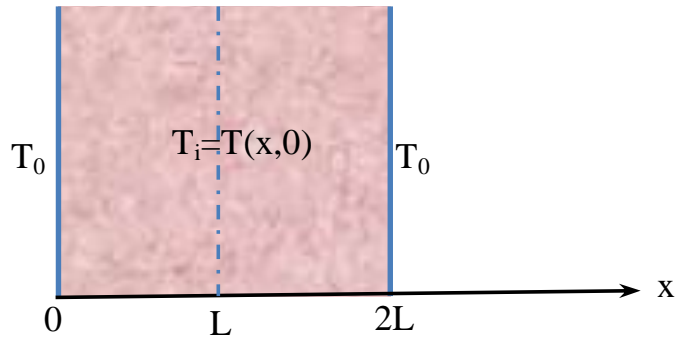


Figure III.3 : Plaque avec température constante imposée en surface

En effectuant le changement de variable suivant :  $T^* = T - T_i$ . L'équation (III.4) et les conditions aux limites deviennent :

$$\frac{\partial^2 T^*(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T^*(x,t)}{\partial t}$$

$$\begin{cases} T^*(x,0) = T_i - T_0 \\ T^*(0,t) = T^*(2L,t) = 0 \end{cases}$$

**Remarque :** On peut également considérer par raison de symétrie en prenant une condition de flux nul en  $x = L$  (au centre de la plaque) soit pour la seconde condition limite :

$$\frac{\partial T(x=L,t)}{\partial x} = 0$$

On effectue une décomposition de la température en un produit de fonctions sous la forme :

$$T^*(x,t) = X(x)Y(t)$$

L'équation de la chaleur conduit à l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T^*}{\partial t} \Rightarrow Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} X \frac{\partial Y}{\partial t} \text{ qui peut s'écrire également sous la forme : } YX'' = \frac{1}{\alpha} XY'$$

En divisant par XY, on obtient : 
$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha} \frac{Y'}{Y}$$

On remarque que le terme gauche de l'équation ne dépend que de 'x' et celui de droite ne dépend que de 'y'. Pour que cette égalité soit valable, il faut que les deux termes de l'équation soient égaux à une même constante qu'on posera égale à  $-\omega^2$ , on obtient alors :

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha} \frac{Y'}{Y} = -\omega^2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{X''}{X} = -\omega^2 \Rightarrow X'' + \omega^2 X = 0 \Rightarrow X = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x) \\ \frac{Y'}{Y} = -\omega^2 \Rightarrow Y' + \omega^2 Y = 0 \Rightarrow Y = C_3 e^{-\alpha \omega^2 t} \end{cases}$$

La solution générale de l'équation différentielle pour la variable  $T^*$  devient donc :

$$T^*(x, t) = e^{-\alpha \omega^2 t} [A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)]$$

En appliquant les conditions aux limites et la condition initiale, on trouve :

$$T^*(0, t) = 0 \Rightarrow T^*(0, t) = e^{-\alpha \omega^2 t} [A \cancel{\cos(0)}^{-1} + B \cancel{\sin(0)}^{-0}] = e^{-\alpha \omega^2 t} [A] = 0 \quad \text{d'où} \quad A = 0$$

L'équation devient donc :

$$T^*(x, t) = B \sin(\omega x) e^{-\alpha \omega^2 t}$$

La condition de symétrie donne :

$$\frac{\partial T^*(L, t)}{\partial x} = B \omega \cos(\omega L) e^{-\alpha \omega^2 t} = 0 \Rightarrow B \omega \cos(\omega L) = 0 \Rightarrow B \cos(\omega L) = 0; \quad (e^{-\alpha \omega^2 t} \neq 0 \text{ et } \omega \neq 0)$$

Cette équation admet une infinité de solutions que l'on appelle les valeurs propres :

$$\omega_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2L}, \quad \text{avec : } n = 0, 1, 2, \dots, \infty.$$

Le théorème de superposition des solutions permet d'écrire la solution générale sous la forme :

$$T^*(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin(\omega_n x) e^{-\alpha \omega_n^2 t} \quad \text{avec} \quad D_n = \frac{2(T_i - T_0)}{\omega_n L} = \frac{4(T_i - T_0)}{(2n + 1)\pi} \quad \text{ce qui donne}$$

finalement :

$$T^*(x, t) = \frac{4}{\pi} (T_i - T_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)} \sin\left((2n + 1) \frac{\pi}{2L} x\right) e^{-\alpha \left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right)^2 t}$$

ce qui donne et en remplaçant  $T^*$  par  $(T - T_0)$  et en divisant par  $(T_i - T_0)$  :

$$\frac{T(x, t) - T_0}{T_i - T_0} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)} \sin\left((2n + 1) \frac{\pi}{2L} x\right) e^{-\alpha \left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right)^2 t} \quad \text{(III.5)}$$

## 2- Plaque avec flux de chaleur constant imposé en surface

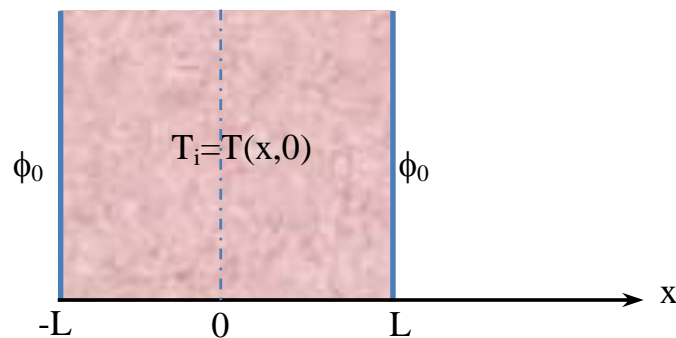


Figure III.4 : Plaque avec flux de chaleur constant imposé en surface

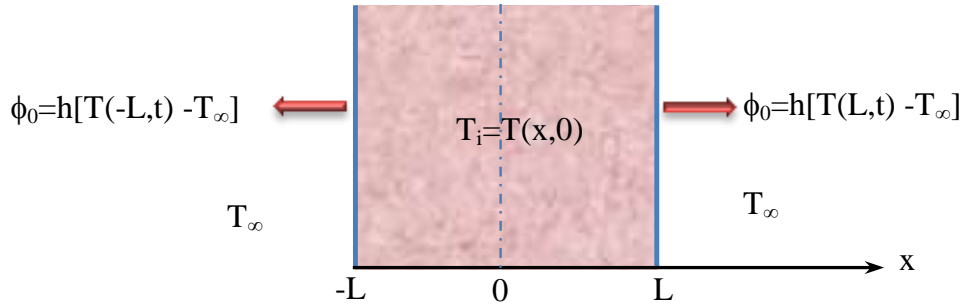
Le problème est symétrique, il revient à résoudre l'équation différentielle (III.4) avec les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{à } t = 0, T(x, 0) = T_i \\ \text{au frontières, } \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L} = \phi_0 \\ \text{au centre (condition de symétrie), } \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \end{array} \right.$$

En utilisant la méthode utilisée pour résoudre le cas précédent, on trouve la solution suivante :

$$T(x, t) - T_0 = \frac{\phi_0 t}{\rho C L} + \frac{\phi_0 L}{\lambda} \left[ \frac{3x^2 - L^2}{6L^2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \right] \quad (\text{II.6})$$

### 3- Plaque avec coefficient de transfert de chaleur par convection imposé en surface



**Figure III.5 :** Plaque coefficient de transfert de chaleur par convection imposé en surface

Le problème est symétrique, il revient à résoudre l'équation différentielle (III.4) avec les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{à } t = 0, T(x, 0) = T_i \\ \text{au frontières, } -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L} = h [T(L, t) - T_\infty] \\ \text{au centre (condition de symétrie), } \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \end{array} \right.$$

En utilisant la méthode utilisée pour résoudre le cas précédent, on trouve la solution suivante :

$$\frac{T(x, t) - T_0}{T_i - T_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^2 + \frac{h^2}{\lambda^2}}{L \left( \omega_n^2 + \frac{h^2}{\lambda^2} \right) + \frac{h}{\lambda}} \frac{\sin(\omega_n x)}{\omega_n} \cos(\omega_n x) e^{-\alpha \omega_n^2 t} \quad (\text{III.7})$$

Où ' $\omega_n$ ' représente les solutions de l'équation :  $\omega \tan(\omega L) = \frac{h}{\lambda}$  pour  $n = 1, 2, \dots, \infty$



▪ **Systèmes complexes : méthode des quadripôles thermiques**

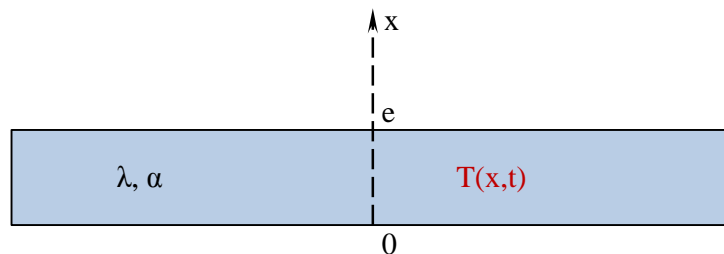
La méthode des quadripôles thermiques est une méthode explicite exacte de représentation des systèmes linéaires, basée sur les solutions analytiques des équations aux dérivées partielles résolus par une méthode de transformée intégrale ou de séparation des variables. Cette méthode est utilisée pour la modélisation directe du transfert diffusif dans des matériaux composites ou de plaques soumises à des coefficients d'échange non-uniformes. Elle permet également la mise en œuvre de solutions analytiques utilisées dans le domaine du contrôle thermique non-destructif.

La méthode des quadripôles permet de déterminer la relation liant les conditions limites entre elles en utilisant une transformée de Laplace sur le temps et une transformée intégrale (de type Fourier-cosinus par exemple) sur une les variables d'espace.

**Principe de la méthode :** Considérons l'exemple simple d'un mur homogène isotrope de dimensions latérales infinies. L'équation de la chaleur unidirectionnelle ainsi que le flux de chaleur s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

$$\varphi = -\lambda S \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}$$



**Figure III.6 :** Mur homogène isotrope

Si on effectue une transformée de Laplace sur le temps, en considérant que la température initiale est nulle, l'équation de la chaleur précédente devient :

$$\frac{\partial^2 \theta(x,p)}{\partial x^2} = \frac{p}{\alpha} \theta(x,p)$$

Avec 'θ' la transformée de Laplace de la température et 'p' la variable de Laplace.

La solution de cette équation s'écrit sous la forme :

$$\theta(x,p) = k_1(p) \cosh(qx) + k_2(p) \sinh(qx) \quad \text{avec} \quad q^2 = \frac{p}{\alpha}$$

La transformée de Laplace du flux de chaleur en un point quelconque du mur s'écrit :

$$\Phi(x, p) = -\lambda S \frac{d\theta(x, p)}{dx} = -\lambda S q k_1(p) \sinh(qx) - \lambda S q k_2(p) \cosh(qx)$$

$k_1$  et  $k_2$  sont deux constantes que l'on détermine à partir des conditions limites à  $x = 0$  et  $x = e$ .

$$\theta(0, p) = k_1(p) \quad \text{et} \quad \theta(e, p) = k_1(p) \cosh(qe) + k_2(p) \sinh(qe)$$

$$\Phi(x, p) = -\lambda S k_2(p) \quad \text{et} \quad \Phi(e, p) = -\lambda S q k_1(p) \sinh(qe) - \lambda S q k_2(p) \cosh(qe)$$

Pour éliminer  $k_1$  et  $k_2$  de ces équations, on peut exprimer la température et flux à l'entrée  $(\theta_1, \Phi_1)$  en fonction de ceux à la sortie  $(\theta_2, \Phi_2)$ , on aboutit alors à:

$$\begin{pmatrix} \theta(0, p) \\ \Phi(0, p) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(qe) & \frac{1}{\lambda q S} \sinh(qe) \\ \lambda q S \sinh(qe) & \cosh(qe) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta(e, p) \\ \Phi(e, p) \end{pmatrix} \quad (\text{III.8})$$

$$\begin{pmatrix} \theta(0, p) \\ \Phi(0, p) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \theta(e, p) \\ \Phi(e, p) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M = \begin{bmatrix} \cosh(qe) & \frac{1}{\lambda q S} \sinh(qe) \\ \lambda q S \sinh(qe) & \cosh(qe) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Le déterminant de la matrice 'M' se calcul par :

$$\text{Det}(M) = \text{Det} \begin{bmatrix} \cosh(qe) & \frac{1}{\lambda q S} \sinh(qe) \\ \lambda q S \sinh(qe) & \cosh(qe) \end{bmatrix} = \cosh^2(qe) - \sinh^2(qe) = 1$$

Puisque  $\det(M) = 1$ , alors on peut établir la relation réciproque :

$$\begin{pmatrix} \theta(e, p) \\ \Phi(e, p) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(qe) & -\frac{1}{\lambda q S} \sinh(qe) \\ -\lambda q S \sinh(qe) & \cosh(qe) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta(0, p) \\ \Phi(0, p) \end{pmatrix} \quad (\text{III.10})$$

**Remarque :** L'obtention des températures et densités de flux réelles nécessite une transformée de Laplace inverse, que l'on réalise numériquement. C'est pour cette raison que la méthode des quadripôles thermiques est une méthode semi-analytique.

Cette méthode est bien adaptée à d'autres cas de conduction de chaleur instationnaire. Dans ce qui suit, on présente quelque cas:

- **Mur multicouches**

L'entrée de la couche 'i' est égale à la sortie de la couche 'i-1', donc la matrice de transfert du système entier égale au produit de toutes les matrices de transfert des différentes couches.

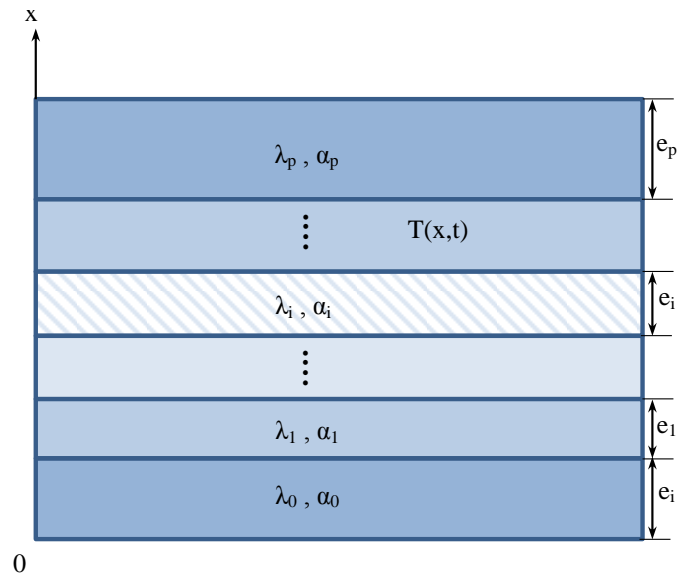


Figure III.7 : Mur multicouches

En se basant sur la matrice 'M' de l'équation (III.9), qui s'écrit :

$$M = \begin{bmatrix} \cosh(qe) & -\frac{1}{\lambda q S} \sinh(qe) \\ -\lambda q S \sinh(qe) & \cosh(qe) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix}$$

La matrice du système s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \theta(0, p) \\ \Phi(0, p) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A^0 & B^0 \\ C^0 & A^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1 & B^1 \\ C^1 & A^1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} A^p & B^p \\ C^p & A^p \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta(e, p) \\ \Phi(e, p) \end{pmatrix} \quad (\text{III.11})$$

• **Mur avec échange convectif**

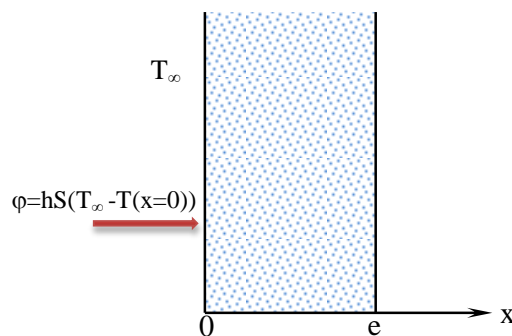


Figure III.8 : Mur simple avec transfert convectif

Sous forme matricielle quadripolaire, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \theta_\infty \\ \Phi_\infty \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{hS} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{(x=0)} \\ \Phi_{(x=0)} \end{pmatrix} \quad (\text{III.12})$$

On trouvera en littérature des récapitulatifs des matrices quadripolaires associées aux systèmes les plus couramment rencontrés dans la pratique. Ci-dessous un exemple :

### III.2 Conduction unidirectionnelle en régime variable avec changement d'état

Un changement de phase est une transition de phase lors du passage d'un état de la matière (phase 1) à un autre état (phase 2). Les trois principaux états de la matière sont : solide, liquide et gazeux. Etudions le cas d'une température constante imposée sur la surface d'un milieu semi-infini initialement à la température uniforme  $T_i$ . On impose brutalement une température de surface  $T_0$  inférieure à la température de changement de phase (appelée également température de saturation). Un changement de phase va se produire tout d'abord à la surface puis se propager vers l'intérieur du milieu semi-infini. L'équation de la chaleur s'écrit dans les phases 1 et 2 par:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} & \text{dans la phase 1, pour } x < X(t) \\ \frac{\partial^2 T_2(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t} & \text{dans la phase 2, pour } x > X(t) \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

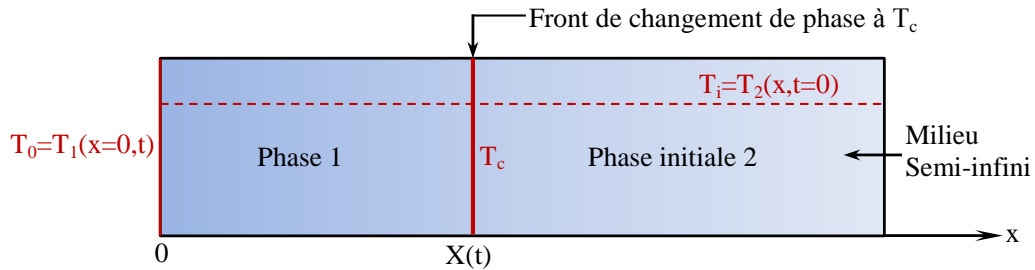


Figure III.9 : Milieu semi-infini avec changement de phase

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{à } t = 0 \text{ on a } T_1(x,0) = T_2(x,t) = T_i \\ \text{à } x = 0 \text{ on a } T_1(0,t) = T_0 \\ \text{au front de changement de phase on a } T_1(X,t) = T_2(X,t) = T_c \\ \lambda_1 \left( \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} \right)_x - \lambda_2 \left( \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} \right)_x = L\rho \frac{dX}{dt} \end{cases} \text{ avec } L: \text{ chaleur latente de changement de phase}$$

La solution analytique est de la forme :

$$T_1(x,t) = \frac{T_c - T_0}{\operatorname{erf}\left(\frac{k}{2\sqrt{\alpha_1}}\right)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}}\right) + T_0$$

$$T_2(x, t) = T_i - \frac{T_i - T_c}{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{k}{2\sqrt{\alpha_2}}\right)} \left[ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right) \right] \quad (\text{III.14})$$

‘*erf*’ est la fonction d'erreur (appelée aussi fonction d'erreur de Gauss) elle est définie par :

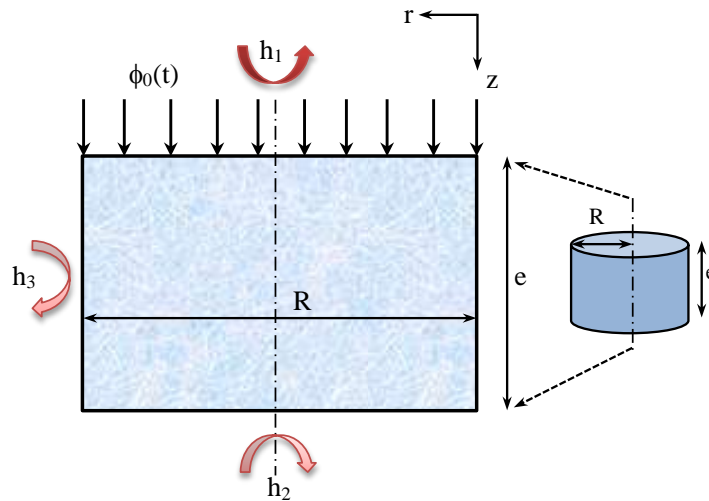
$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

‘*k*’ est solution de l'équation :

$$\frac{\lambda_1(T_c - T_0)}{\operatorname{erf}\left(\frac{k}{2\sqrt{\alpha_1}}\right)} e^{\left(\frac{-k^2}{4\alpha_1}\right)} - \frac{\lambda_2(T_i - T_c)}{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{k}{2\sqrt{\alpha_2}}\right)} e^{\left(\frac{-k^2}{4\alpha_2}\right)} = \frac{L\rho k}{2}$$

### III.3 Conduction multidirectionnelle en régime variable

Les problèmes de transfert de la chaleur par conduction multidirectionnelle peuvent être résolus numériquement ou dans certains cas analytiquement par transformations intégrales et séparation de variables. Considérons à titre d'exemple le transfert de chaleur dans un cylindre fini d'épaisseur ‘*e*’ et de rayon ‘*R*’, initialement à température uniforme, lorsque l'une de ses faces est soumise à une densité de flux de chaleur uniforme  $\phi_0(t)$ . Le cylindre échange de la chaleur par convection sur toutes ses faces avec le milieu environnant.



**Figure III.10 :** Cylindre fini soumis à une densité de flux de chaleur variable

Le problème est à symétrie cylindrique on utilise donc l'équation de la chaleur en coordonnées cylindriques qui sera résolue en utilisant la méthode de séparation des variables et la transformation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 T(r, z, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r, z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial t} \quad (\text{III.15})$$

Avec les conditions limites et initiale suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{à } z = 0: \lambda \frac{\partial T(r, 0, t)}{\partial z} = h_1 [T(r, 0, t) - T_i] - \phi_0(t) \\ \text{à } z = e: -\lambda \frac{\partial T(r, e, t)}{\partial z} = h_2 [T(r, e, t) - T_i] \\ \text{à } r = 0 \text{ (condition de symétrie): } \frac{\partial T(0, z, t)}{\partial r} = 0 \\ \text{à } r = R: -\lambda \frac{\partial T(R, z, t)}{\partial r} = h_3 [T(R, z, t) - T_i] \\ \text{à } t = 0 \text{ (condition initiale): } T(r, z, 0) = T_i \end{array} \right.$$

On pose

$$\Delta T(r, z, t) = T(r, z, t) - T_i \quad \text{et} \quad L[\Delta T(r, z, t)] = \theta(r, z, p)$$

La transformée de Laplace de l'équation (III.15) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \theta(r, z, p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta(r, z, p)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta(r, z, p)}{\partial z^2} = \frac{p}{\alpha} \theta(r, z, p)$$

En utilisant la méthode de séparation des variables, on écrit la température après transformation de Laplace sous la forme suivante :  $\theta(r, z, t) = R(r, p)Z(z, p)$  d'où on obtient :

$$\frac{\partial^2 R(r, p)Z(z, p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R(r, p)Z(z, p)}{\partial r} + \frac{\partial^2 R(r, p)Z(z, p)}{\partial z^2} = \frac{p}{\alpha} R(r, p)Z(z, p)$$

$$Z(z, p) \frac{\partial^2 R(r, p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} Z(z, p) \frac{\partial R(r, p)}{\partial r} + R(r, p) \frac{\partial^2 Z(z, p)}{\partial z^2} = \frac{p}{\alpha} R(r, p)Z(z, p)$$

Après division par  $R(r, p)Z(z, p)$  et réarrangement on obtient :

$$\underbrace{\frac{1}{R(r, p)} \left[ \frac{\partial^2 R(r, p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R(r, p)}{\partial r} \right]}_{\text{terme qui ne dépend que de } r \text{ et } p} + \underbrace{\frac{1}{Z(z, p)} \frac{\partial^2 Z(z, p)}{\partial z^2}}_{\text{terme qui ne dépend que de } z \text{ et } p} = \frac{p}{\alpha}$$

On en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R(r,p)} \left[ \frac{\partial^2 R(r,p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R(r,p)}{\partial r} \right] = -\beta^2 \\ \frac{1}{Z(z,p)} \frac{\partial^2 Z(z,p)}{\partial z^2} = \gamma^2 \end{array} \right. \quad \text{avec } \gamma^2 - \beta^2 = \frac{p}{\alpha}$$

La solution de ces deux équations différentielles donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} R(r,p) = AJ_0(\beta r) + BY_0(\beta r) \\ Z(z,p) = C \sinh(\gamma z) + D \cosh(\gamma z) \end{array} \right.$$

L'application des conditions limites et initiale conduit à la solution finale:

$$\theta(r,z,p) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n J_0(\beta_n r) \left[ (e\gamma_n) \cosh(\gamma_n(e-z)) + \frac{h_2 e}{\lambda} \sinh(\gamma_n(e-z)) \right] \quad (\text{III.16})$$

Où :

$$F_n = \frac{2\Phi_0(p) \frac{e}{\lambda}}{\omega_n \left( 1 + \frac{\omega_n^2}{\left( \frac{h_3 R}{\lambda} \right)^2} \right) J_1(\omega_n) \left[ \left( (e\gamma_n)^2 + \left( \frac{h_2 e}{\lambda} \right) \left( \frac{h_1 e}{\lambda} \right) \right) \sinh(e\gamma_n) + (e\gamma_n) \left( \frac{h_1 e}{\lambda} + \frac{h_2 e}{\lambda} \right) \cosh(e\gamma_n) \right]}$$

$$\Phi_0(p) = L[\phi_0(t)]$$

Les  $\omega_n$  étant les solutions de l'équation transcendante  $J_0(\omega_n) = \frac{\omega_n J_1(\omega_n)}{\frac{h_3 R}{\lambda}}$  résolue

numériquement. Une centaine de termes est suffisante pour calculer  $\theta(r,z,p)$ . On calcule ensuite  $T(r,z,p)$  par transformation de Laplace inverse effectuée aussi numériquement.

## Chapitre IV : Transfert de chaleur par convection forcée

### IV.1 Convection sans changement d'état : Généralités et Définitions

### IV.2 Expression du flux de chaleur

- Les couches limites de convection (hydrodynamique et thermique)
- Coefficient de convection (local et moyen)

### IV.3 Dérivation des équations de transfert de chaleur par convection

### IV.4 Rappels sur l'analyse dimensionnelle : évaluation du coefficient d'échange 'h'

### IV.5 Ecoulement Externe

- La méthode empirique
- Plaque
- Cylindre et sphère,
- Ecoulement à travers un faisceau tubulaire

### IV.6 Ecoulement Interne

- Considérations hydrodynamiques
- Considérations thermiques
- Bilan énergétique
- Ecoulement laminaire dans un tube circulaire de diamètre  $D$
- Ecoulement turbulent dans un tube circulaire de diamètre  $D$  et de longueur  $L$
- Les corrélations pour les tubes non-circulaire et annulaire
- Méthodologie pour le calcul du transfert de chaleur par convection

### IV.1 Convection sans changement d'état : Généralités et Définitions

La convection sans changement est un mode de transport de chaleur par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de la chaleur et du mouvement du fluide. Elle s'effectue entre une surface solide et un fluide (liquide ou un gaz) en plusieurs étapes :

- D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface du solide aux molécules du fluide adjacentes (dans le cas où la température de la surface est supérieure à celle du fluide).
- La chaleur transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne des molécules du fluide.
- Les molécules chaudes vont se mélanger avec d'autres molécules situées dans une région à basse température et transférer ainsi une partie de leur énergie. Dans ce cas l'écoulement transporte le fluide et la chaleur. L'énergie est, à présent, emmagasinée dans les molécules du fluide et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement.



En fonction du mode d'écoulement du fluide, on classe la convection en libre ou forcée :

- Lorsque l'écoulement du fluide se produit à cause de la différence de température (qui provoque une différence de masse volumique entre le fluide chaud et froid), on dit que la *convection est naturelle ou libre*.
- Par contre si l'écoulement du fluide est causé par des forces extérieures provoquant une différence de pression (pompe, ventilateur,...) la convection est dite *forcée*.

## IV.2 Expression du flux de chaleur

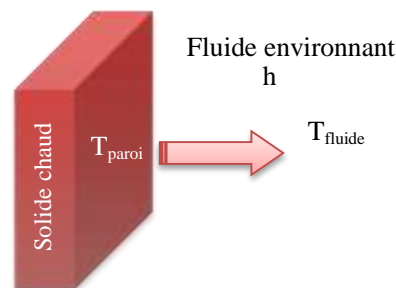
Le flux de chaleur transmis par convection entre une paroi solide et un fluide est relié à l'écart de température entre la surface du solide et le fluide par l'équation de Newton :

$$\varphi = hS (T_{\text{paroi}} - T_{\text{fluide}}) \quad [W] \quad (\text{IV.1})$$

'*h*' ayant comme unité [W/m<sup>2</sup>K] est le coefficient d'échange de chaleur par convection, il traduit d'une façon empirique les échanges de chaleur entre le solide et le fluide. Ce coefficient d'échange '*h*', appelé également taux de transfert de chaleur, dépend de l'écoulement du fluide, des propriétés thermiques du fluide et de la géométrie du solide. Sa valeur numérique n'est généralement pas uniforme sur une surface et elle dépend aussi du lieu où l'on mesure la température.

Le flux de chaleur '*φ*' dépend donc de :

- La différence de température entre la paroi solide et le fluide,
- La vitesse du fluide (nature de l'écoulement),
- Les propriétés thermo-physiques du fluide,
- La surface d'échange de chaleur,
- L'état de surface du solide,.....



**Figure IV.1 :** Convection entre un solide et le fluide environnant.

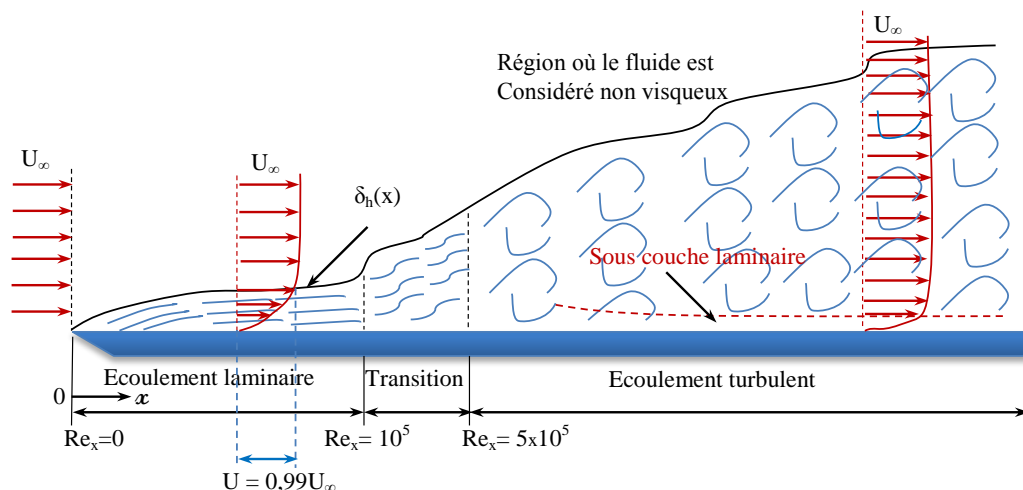
Pour calculer le flux de chaleur, il faut déterminer d'abord le coefficient de transfert de chaleur par convection '*h*'. Une bonne maîtrise de la mécanique des fluides est essentielle pour l'étude du transfert de chaleur par convection. En effet, la détermination du champ d'écoulement (appelé également l'hydrodynamique) est la première étape qui précède la

résolution d'un problème de transfert de chaleur. Il est donc nécessaire de connaître le mécanisme de l'écoulement du fluide avant d'examiner celui de l'écoulement de la chaleur.

▪ **Les couches limites de convection (hydrodynamique et thermique)**

Un des plus importants aspects de l'étude hydrodynamique est d'établir si le mouvement du fluide est laminaire ou turbulent. Lorsqu'un fluide s'écoule en *régime laminaire* le long d'une surface dont la température est différente de celle du fluide, la chaleur est transmise seulement par conduction aussi bien à l'intérieur du fluide qu'à l'interface entre le fluide et la surface. Par contre dans un écoulement de fluide en *régime turbulent*, le mécanisme de conduction est modifié et favorisé par d'innombrables tourbillons. Les petits volumes de fluide en se mélangeant avec d'autres jouent le rôle de porteur d'énergie. Par conséquent un accroissement de turbulence amène une augmentation de la quantité de chaleur s'écoulant par convection.

La région dans laquelle sont localisées les variations notables de la vitesse est appelée *couche limite hydrodynamique*. L'épaisseur de cette couche est définie comme étant la distance comptée à partir de la paroi où la vitesse locale atteint 99 % de la vitesse du fluide loin de la paroi ( $\delta_h = 0,99U_\infty$ ). Le profil des vitesses à l'intérieur de la couche limite dépend de la nature de l'écoulement. Comme le fluide poursuit son écoulement le long de la plaque, les forces de cisaillement ralentissent de plus en plus son mouvement et l'épaisseur de la couche limite augmente. L'accroissement de la couche limite ainsi que les profils des vitesses en différents points d'une plaque plane horizontale sont illustrés dans la figure IV.2.



**Figure IV.2 :** Développement de la couche limite hydrodynamique sur une plaque plane horizontale.

A partir du bord d'attaque jusqu'à une certaine distance, l'écoulement à l'intérieur de la couche limite est laminaire, cette zone est appelée *couche limites laminaire*. Ensuite l'écoulement passe par une région de *transition* puis devient turbulent. A l'intérieur de cette

zone dite *couche limite turbulente*, il existe, une très mince couche près de la paroi en écoulement presque laminaire appelée *sous couche limite laminaire* ou *film laminaire*. L'épaisseur de la couche limite varie en fonction de nombreux paramètres : nature du fluide, température, rugosité de la paroi, ...

Dans la couche limite laminaire, l'écoulement s'effectue par couches pratiquement indépendantes. Entre deux filets fluides adjacents les échanges de chaleur s'effectuent donc :

- Par conduction uniquement si l'on considère une direction normale aux filets fluides.
- Par convection et conduction (négligeable) si l'on considère une direction non normale aux filets fluides.

Dans la couche limite turbulente, l'écoulement n'est pas unidirectionnel et l'échange de chaleur, en dehors de la sous-couche laminaire, s'effectue par convection et conduction dans toutes les directions.

La couche limite hydrodynamique est directement liée aux contraintes de cisaillement à la paroi ' $\tau_p$ ' et par conséquent au frottement. Pour un fluide Newtonien, cette contrainte de cisaillement peut être évaluée à partir du gradient de vitesse par la relation de Newton :

$$\tau_p = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{paroi}$$

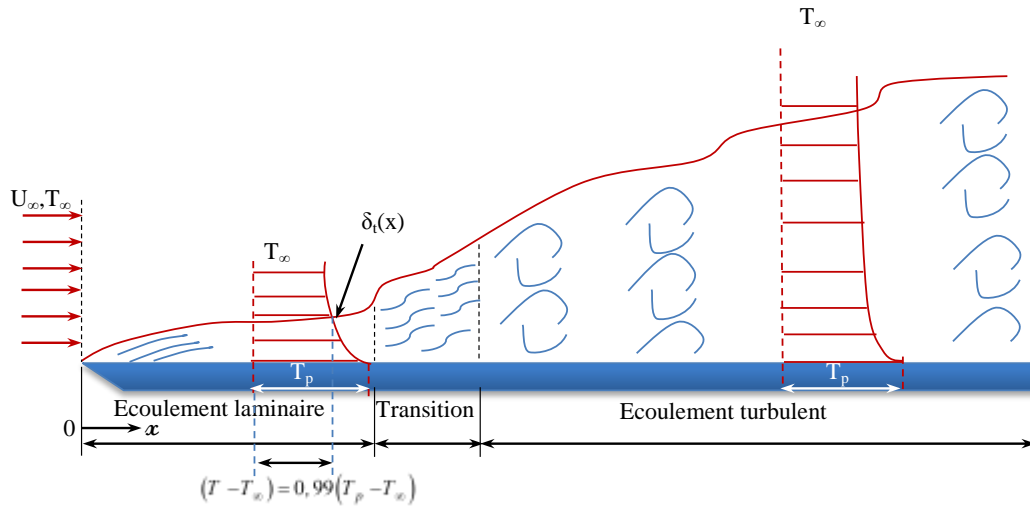
Pour un écoulement externe, elle fournit une base à l'évaluation du coefficient de frottement local :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2}$$

Ce coefficient de frottement est le paramètre clé pour la couche hydrodynamique.

**Analogie de Reynolds :** Comme la viscosité des fluides représente la transmission des quantités de mouvement des molécules lors des chocs intermoléculaires, le transfert de chaleur représente la transmission d'énergie cinétique lors de ces mêmes chocs. Cette liaison intime des phénomènes de viscosité et de transfert de chaleur conduit à l'*analogie de Reynolds* qui postule que: 'dans un écoulement de fluide avec transfert de chaleur, le profil des vitesses et celui des températures sont liés par une relation de similitude schématisée sur la figure IV.3. L'analogie de Reynolds montre que le gradient thermique est particulièrement important au voisinage de la paroi, dans une zone appelée *couche limite thermique* qui se développe de manière analogue à la *couche limite hydrodynamique*. La résistance thermique est entièrement située dans cette couche qui joue le rôle d'isolant thermique. L'épaisseur de la couche limite thermique est définie comme la distance pour laquelle on a :

$(T - T_\infty) = 0,99(T_{paroi} - T_\infty)$ . Le paramètre clé pour la couche limite thermique est le coefficient d'échange de chaleur par convection.



**Figure IV.3 :** Développement de la couche limite thermique sur une plaque plane horizontale  
(Analogie de Reynolds).

▪ **Coefficient de convection (local et moyen)**

Dans l'expression du flux de chaleur de l'équation (IV.1), le coefficient de transfert de chaleur par convection 'h' varie en fonction de la position où on calcule le flux thermique, puisque les conditions d'écoulement varient d'un point à un autre (figures IV.2 et IV.3), le coefficient et le flux thermique échangés varient aussi en chaque point. Le coefficient 'h' est appelé dans ce cas coefficient d'échange convectif local, il est noté 'h<sub>i</sub>' ou 'h(x)'. Le flux de chaleur s'écrit alors :

$$\phi_x = h(x) S (T_{paroi} - T_{fluide}) \tag{IV.2}$$

La densité de flux de chaleur total échangée représente la somme des densités du flux thermique dans chaque point du système. Il sera alors obtenu par intégration de ces densités du flux de chaleur local sur toute la surface par :

$$\phi = \frac{\phi}{S} = \int_S \phi_x dS = \int_S h(x) (T_{paroi} - T_{fluide}) dS = (T_{paroi} - T_{fluide}) \int_S h(x) dS, \text{ d'où :}$$

$$\phi = \bar{h} S (T_{paroi} - T_{fluide}) \tag{IV.3}$$

On définit alors le coefficient d'échange convectif moyen ou global pour toute la surface par :

$$\bar{h} = \frac{1}{S} \int_S h(x) dS \tag{IV.4}$$

Si on considère par exemple le cas de la plaque plane horizontale de surface 'S = L.b' alors l'élément de surface se calcul par 'dS = b.dx' et le coefficient d'échange moyen se calcul par :

$$\bar{h} = \frac{1}{L.b} \int_S h(x) b \cdot dx = \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=L} h(x) dx \quad (IV.5)$$

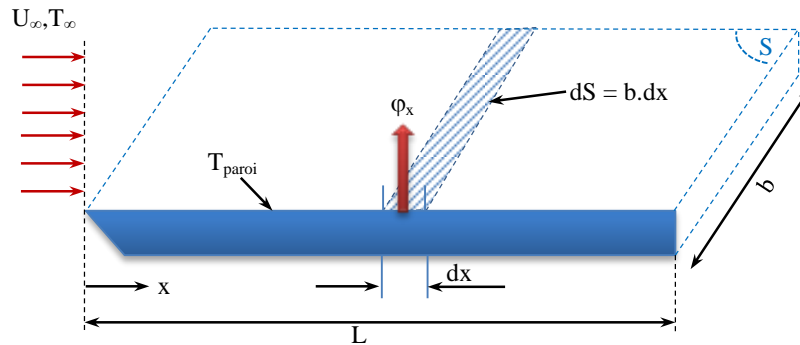


Figure IV.4 : Flux de chaleur sur une plaque plane horizontale.

En transfert de chaleur par convection, la détermination des flux de chaleur local et total est primordiale. Ces flux thermique peuvent être déterminés à partir des relations (IV.3 à IV.5). Cependant la simplicité de ces relations n'est qu'apparente. En effet, le calcul du flux de chaleur nécessite la connaissance préalable du coefficient d'échange, local ou moyen qui sont fonction de plusieurs paramètres telles que : les propriétés thermiques et physiques du fluide (qui eux même dépendent de la température), la géométrie et la dynamique de l'écoulement. Dans le tableau IV.1, on trouve l'ordre de grandeur du coefficient de transfert de chaleur par convection pour différentes configurations.

Tableau IV.1 : Ordre de grandeur du coefficient de transfert de chaleur par convection [\*].

Configuration	$h \left[ \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C} \right]$
<b>Convection naturelle</b>	
• Dans un gaz	2-10
• Dans un liquide	100-1000
<b>Convection forcée</b>	
• Avec un gaz	10-200
• Avec un liquide	100-5000
<b>Ebullition de l'eau</b>	
• Dans un récipient	2500-35000
• En écoulement dans un tube	5000-100000
<b>Condensation de l'eau sous 1 atm</b>	
• Sur une surface verticale	1000-11000
• A l'extérieur de tubes horizontaux	10000-25000

Un transfert de chaleur élevé est obtenu pour un coefficient d'échange par convection élevé. Ce coefficient 'h', qui dépend de plusieurs paramètres, est plus grand lorsque :

- La vitesse d'écoulement du fluide est plus grande, de ce fait l'écoulement turbulent donne un coefficient 'h' plus important que l'écoulement en régime laminaire.
- La chaleur spécifique du fluide 'C<sub>p</sub>' est plus grande.
- La conductivité thermique du fluide λ (ou sa diffusivité thermique α) est plus grande, pour cela les fluides possèdent un coefficient 'h' plus important que les gaz.
- La viscosité du fluide est plus faible (à cause du faible frottement elle permet d'obtenir de grandes vitesses).

Le transfert de chaleur entre une surface solide et le fluide qui l'entoure se fait par conduction thermique puisque la vitesse des particules fluides en contact directe avec cette surface est nulle. La densité de flux de chaleur à la surface est continue, ce qui permet d'écrire :

$$\phi \Big|_{\text{à la surface}} = -\lambda_s \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}^{\text{dans le solide}} = -\lambda_f \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}^{\text{dans le fluide}}$$

Avec 'λ<sub>s</sub>' conductivité thermique du solide et 'λ<sub>f</sub>' conductivité thermique du fluide.

Le problème de la convection revient donc à déterminer le gradient de température à la surface, qui dépend du phénomène de conduction. La densité du flux de chaleur à la surface dépend du couplage entre la conduction et la convection.

Le coefficient d'échange thermique par convection peut être lié au gradient de température dans le fluide à la paroi. Puisque au voisinage de la paroi (y = 0) le transfert de chaleur s'effectue par conduction, alors la densité de flux dans le fluide s'exprime à partir de la loi de Fourier par:

$$\phi = -\lambda_f \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

La chaleur est ensuite transportée par convection dans le fluide et la densité de flux s'exprime la loi de Newton :

$$\phi = h (T_{\text{paroi}} - T_{\text{fluide}})$$

Le coefficient de transfert de chaleur par convection est donc lié au gradient de température à la surface par :

$$h = \frac{-\lambda_f \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}}{(T_{\text{paroi}} - T_{\text{fluide}})} \tag{IV.6}$$

### IV.3 Dérivation des équations de transfert de chaleur par convection

Les équations de base de la modélisation du phénomène de transfert de chaleur par convection dans la couche limite sont celle permettant de trouver le champ thermique qui est lié au champ dynamique. Les équations de la mécanique des fluides (les deux premières lois de conservation : masse et quantité de mouvement) ne seront pas détaillées ici. Par contre, l'équation de conservation de l'énergie sera développée en détails. Pour le bilan thermique on prend en compte les phénomènes de conduction et de convection dans le fluide. Les équations régissant le phénomène du transfert de chaleur par convection sont :

- **Equation de conservation de la masse**

Cette équation est appelée également équation de *continuité* ou encore équation de *conservation du débit*. Elle exprime la conservation de la masse dans un volume élémentaire, elle s'écrit, pour un écoulement laminaire et incompressible, par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (\text{IV.7})$$

'u, v et w' sont les composantes du vecteur vitesse suivant les directions 'x, y et z' respectivement.

- **Equations de conservation de la quantité de mouvement (Navier-Stocks)**

On obtient les équations de conservation de la quantité de mouvement en appliquant la deuxième loi de Newton qui postule que : 'le taux de variation de la quantité de mouvement par rapport au temps d'une particule de fluide est égal à la résultante de toutes les forces externes agissant sur cette particule'. Ces équations s'écrivent sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right. = \begin{array}{l} f_x \\ f_y \\ f_z \end{array} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (\text{IV.8})$$

Forces d'inertie

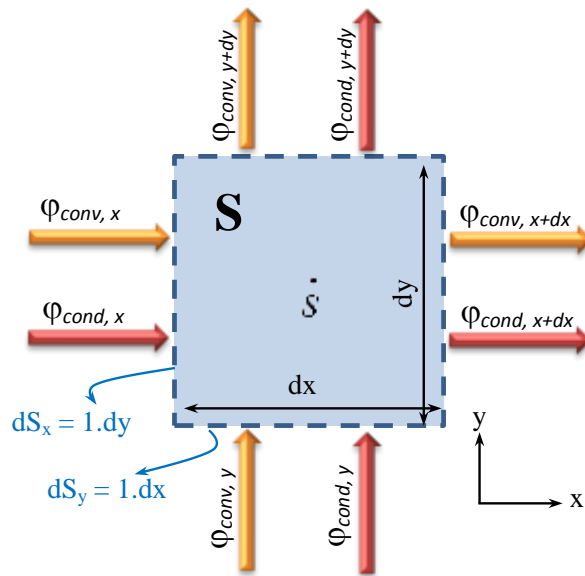
Forces de pesanteur  
Forces de pression

Forces visqueuses

Ces équations expriment l'équilibre entre les forces d'inertie d'une part, et d'autre part les force de pesanteur (gravité) par unité de masse, les forces de pression et celles dues à la viscosité.

• **Equation de conservation de l'énergie**

Pour obtenir l'équation de l'énergie, nous allons effectuer un bilan thermique qui consiste à écrire que : *la variation de l'énergie interne d'un système 'S' par rapport au temps est égale à la somme des flux entrant dans 'S' par conduction et convection (comptés positivement), et des flux sortant du système 'S' (comptés négativement)*. Pour simplifier la procédure, nous allons traiter le cas bidimensionnel, ensuite on généralise pour le cas tridimensionnel (voir figure IV.5). Dans ce bilan on prend en compte un terme source de chaleur  $\dot{S}$  (en W).



**Figure IV.5 :** Bilan thermique sur un élément de fluide S.

$$\rho C_p dV \frac{\partial T}{\partial t} = (\varphi_{\text{cond}, x} - \varphi_{\text{cond}, x+dx} + \varphi_{\text{cond}, y} - \varphi_{\text{cond}, y+dy}) + (\varphi_{\text{conv}, x} - \varphi_{\text{conv}, x+dx} + \varphi_{\text{conv}, y} - \varphi_{\text{conv}, y+dy}) + \dot{S}$$

Avec :

Les flux de chaleur selon la direction 'x' s'expriment par :

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{cond}, x} &= -\lambda_f dS_x \frac{\partial T(x)}{\partial x} \\ \varphi_{\text{cond}, x+dx} &= -\lambda_f dS_x \frac{\partial T(x+dx)}{\partial x} \\ \varphi_{\text{cond}, x} &= \dot{m}_x C_p (T(x) - T_0) \\ \varphi_{\text{cond}, x+dx} &= \dot{m}_x C_p (T(x+dx) - T_0) \end{aligned}$$



Les flux de chaleur selon la direction 'y' s'expriment par :

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{cond},y} &= -\lambda_f dS_y \frac{\partial T(y)}{\partial y} \\ \varphi_{\text{cond},y+dy} &= -\lambda_f dS_y \frac{\partial T(y+dy)}{\partial y} \\ \varphi_{\text{cond},y} &= \dot{m}_y C_p (T(y) - T_0) \\ \varphi_{\text{cond},y+dy} &= \dot{m}_y C_p (T(y+dy) - T_0)\end{aligned}$$

$T_0$  est la température de référence du fluide et  $\dot{m}_x = \rho u_x dS_x$  est le débit massique entrant dans 'S' selon la direction 'x'. et  $\dot{m}_y = \rho u_y dS_y$  le débit massique entrant dans 'S' selon la direction 'y'. En remplaçant les expressions des flux dans la relation du bilan, on obtient :

$$\begin{aligned}\rho C_p dV \frac{\partial T}{\partial t} &= \left( -\lambda_f dS_x \frac{\partial T(x)}{\partial x} + \lambda_f dS_x \frac{\partial T(x+dx)}{\partial x} - \lambda_f dS_y \frac{\partial T(y)}{\partial y} + \lambda_f dS_y \frac{\partial T(y+dy)}{\partial y} \right) \\ &+ \left[ \rho dS_x C_p (u_x T(x) - T_0) - \rho dS_x C_p (u_{x+dx} T(x+dx) - T_0) + \rho dS_y C_p (u_y T(y) - T_0) \right. \\ &\left. - \rho dS_y C_p (u_{y+dy} T(y+dy) - T_0) \right] + \dot{S}\end{aligned}$$

Après réarrangement, on obtient :

$$\begin{aligned}\rho C_p dV \frac{\partial T}{\partial t} &= \left[ -\lambda_f dS_x \left( \frac{\partial T(x)}{\partial x} - \frac{\partial T(x+dx)}{\partial x} \right) - \lambda_f dS_y \left( \frac{\partial T(y)}{\partial y} - \frac{\partial T(y+dy)}{\partial y} \right) \right] \\ &+ \left[ \rho C_p dS_x (u_x T(x) - u_{x+dx} T(x+dx)) + \rho C_p dS_y (u_y T(y) - u_{y+dy} T(y+dy)) \right] + \dot{S}\end{aligned}$$

Après division par 'dV = dx.dy.1' et sachant que 'dS<sub>x</sub> = dy.1' et 'dS<sub>y</sub> = dx.1' on obtient :

$$\begin{aligned}\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} &= \left[ -\lambda_f \frac{1.\cancel{dy}}{1.dx.\cancel{dy}} \left( \frac{\partial T(x)}{\partial x} - \frac{\partial T(x+dx)}{\partial x} \right) - \lambda_f \frac{1.\cancel{dx}}{1.\cancel{dx}.dy} \left( \frac{\partial T(y)}{\partial y} - \frac{\partial T(y+dy)}{\partial y} \right) \right] \\ &+ \left[ \rho C_p \frac{1.\cancel{dy}}{1.dx.\cancel{dy}} (u_x T(x) - u_{x+dx} T(x+dx)) + \rho C_p \frac{1.\cancel{dx}}{1.\cancel{dx}.dy} (u_y T(y) - u_{y+dy} T(y+dy)) \right] + \frac{\dot{S}}{dV}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} &= \left[ -\lambda_f \left( \frac{\frac{\partial T(x)}{\partial x} - \frac{\partial T(x+dx)}{\partial x}}{dx} \right) - \lambda_f \left( \frac{\frac{\partial T(y)}{\partial y} - \frac{\partial T(y+dy)}{\partial y}}{dy} \right) \right] \\ &+ \left[ \rho C_p \left( \frac{u_x T(x) - u_{x+dx} T(x+dx)}{dx} \right) + \rho C_p \left( \frac{u_y T(y) - u_{y+dy} T(y+dy)}{dy} \right) \right] + \dot{S}\end{aligned}$$

En utilisant la définition de la dérivée on obtient :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_f \left( \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(y)}{\partial y^2} \right) - \rho C_p u_x \frac{\partial T(x)}{\partial x} - \rho C_p u_y \frac{\partial T(y)}{\partial x} + \dot{S} \quad \left[ \frac{W}{m^3} \right]$$

En généralisant cette relation pour l'espace à 3 dimensions, on obtient :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_f \left( \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(z)}{\partial z^2} \right) - \rho C_p u \frac{\partial T(x)}{\partial x} - \rho C_p v \frac{\partial T(y)}{\partial x} - \rho C_p w \frac{\partial T(z)}{\partial z} + \dot{S}$$

Ou encore :

$$\rho C_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T(x)}{\partial x} + v \frac{\partial T(y)}{\partial x} + w \frac{\partial T(z)}{\partial z} \right] = \lambda_f \left( \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(z)}{\partial z^2} \right) + \dot{S}$$

Sous forme compact l'équation d'énergie s'écrit

$$\rho C_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T \right] = \lambda_f \Delta T + \dot{S} \quad \left[ \frac{W}{m^3} \right] \quad (IV.9)$$

**Remarque :** La résolution des équations de conservations avec les conditions aux limites associées pour les vitesses et les températures permettra la détermination des champs de vitesses et de températures et par conséquent le coefficient d'échange convectif 'h' à partir de la relation IV.6.

#### IV.4 Rappels sur l'analyse dimensionnelle : évaluation du coefficient d'échange 'h'

Les coefficients d'échange de chaleur par convection peuvent être déterminés par plusieurs façons :

- Les solutions mathématiques exactes des équations de la couche limite.
- Les solutions approchées de la couche limite par les méthodes d'intégration.
- L'analyse dimensionnelle combinée avec les expériences.

L'analyse dimensionnelle nécessite des calculs mathématiques simples combinés à des données expérimentales. Ce qui étend le domaine d'application de ces données expérimentales en les rassemblant suivant des groupes adimensionnels. Dans la pratique, les coefficients d'échange de chaleur par convection sont généralement calculés à partir des équations empiriques obtenues en établissant une corrélation entre les données expérimentales au moyen de l'analyse dimensionnelle.

L'analyse dimensionnelle est fondée sur un principe simple affirmant que toute relation entre des grandeurs physiques est indépendante du système d'unités de mesure, autrement dit, qu'elle est dimensionnellement homogène. Pour le transfert de chaleur, on définit quatre grandeurs fondamentales appelées *unités fondamentales*:

- La longueur L
- La masse M
- Le temps T
- La température  $\theta$

A partir ces dimensions fondamentales, toutes les autres grandeurs dites *unités dérivées* peuvent être définies. Par exemple :

- Vitesse (m/s):  $L.T^{-1}$ .
- Viscosité dynamique (kg/m.s) :  $ML^{-1}T^{-1}$ .
- Quantité de chaleur ( $J = N.m = kg.m^2/s^2$ ) :  $ML^2T^{-2}$

Le nombre de groupe indépendant adimensionnel nécessaire pour exprimer la relation décrivant un phénomène, peut être déterminé par une méthode qui repose sur le principe de l'homogénéité dimensionnelle des termes d'une équation, elle est connue sous le nom de théorème de '*Vaschy-Buckingham*' ou théorème des groupements  $\pi$ .

D'après ce théorème, le nombre de groupe indépendant adimensionnel, qui peut être formé par la combinaison des variables physiques du problème donné, est égal au nombre total de ces quantités physiques (densité, viscosité, coefficient d'échange de chaleur etc.) diminué du nombre des dimensions fondamentales nécessaires pour exprimer les formules dimensionnelles des 'n' quantités physiques (si on a 7 grandeurs  $g_1, \dots, g_7$  et 4 dimensions M, L, T,  $\theta$ , on obtient une loi avec  $7 - 4 = 3$  paramètres sans dimensions  $\Pi_1, \Pi_2$  et  $\Pi_3$ ).

L'équation exprimant la relation entre les variables possède une solution de la forme :

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots) = 0$$

Pour un phénomène représenté par trois groupes adimensionnels, cette équation s'écrit :

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0$$

Elle peut également être mise sous la forme :

$$\Pi_1 = F(\Pi_2, \Pi_3)$$

Pour ce problème, on peut déterminer la corrélation entre les données expérimentales en traçant  $\Pi_1$  en fonction de  $\Pi_2$  pour différentes valeurs de  $\Pi_3$

▪ ***Evaluation du coefficient de transfert de chaleur convectif 'h'***

Ce coefficient dépend d'un certain nombre de grandeurs :  $\bar{h} = f(g_1, g_2, \dots, g_n)$

Ces grandeurs sont généralement : la chaleur massique du fluide ' $C_p$ ', sa conductivité thermique ' $\lambda$ ', sa viscosité ' $\mu$ ' sa densité ' $\rho$ ' sa vitesse moyenne ' $u_m$ ' et enfin une dimension caractéristique ' $d$ '. Dans ces conditions on peut écrire :

$$\bar{h} = f(C_p, \lambda_f, \rho, \mu, u_m, d)$$

On établit maintenant les dimensions de ces grandeurs, sachant que ( $J = Nm = kg.m^2/s^2$  et  $W = J/s = kg.m^2/s^3$ )

Grandeurs	Unités	Dimensions
$\bar{h}$	$W/m^2K = kg/s^3K$	$MT^{-3}\theta^{-1}$
$C_p$	$J/kgK = m^2/s^2K$	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$
$\lambda_f$	$W/mK = kg.m/s^3K$	$MLT^{-3}\theta^{-1}$
$\rho$	$kg/m^3$	$ML^{-3}$
$\mu$	$kg/m.s$	$ML^{-1}T^{-1}$
$u_m$	$m/s$	$LT^{-1}$
$d$	$M$	$L$

Nous avons 7 grandeurs et 4 relations fondamentales, donc Avec 7 variables et 4 unités fondamentales, la loi fondamentale de la convection doit donc dépendre de  $7-4 = 3$  grandeurs sans dimensions. Elle est de la forme :  $F(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0$ , avec par exemple :

$$\begin{cases} \Pi_1 = d^{a_1} \mu^{b_1} \rho^{c_1} \lambda_f^{d_1} \bar{h} & (1) \\ \Pi_2 = d^{a_2} \mu^{b_2} \rho^{c_2} \lambda_f^{d_2} C_p & (2) \\ \Pi_3 = d^{a_3} \mu^{b_3} \rho^{c_3} \lambda_f^{d_3} u_m & (3) \end{cases}$$

En faisant intervenir les dimensions, la relation (1) devient :

$$\begin{aligned} [\Pi_1] &= L^{a_1} (ML^{-1}T^{-1})^{b_1} (ML^{-3})^{c_1} (MLT^{-3}\theta^{-1})^{d_1} MT^{-3}\theta^{-1} = 1 \\ [\Pi_1] &= L^{a_1} (M^{b_1} L^{-b_1} T^{-b_1}) (M^{c_1} L^{-3c_1}) (M^{d_1} L^{d_1} T^{-3d_1} \theta^{-d_1}) MT^{-3}\theta^{-1} = 1 \\ [\Pi_1] &= L^{a_1 - b_1 - 3c_1 + d_1} M^{b_1 + c_1 + d_1 + 1} T^{-b_1 - 3d_1 - 3} \theta^{-d_1 - 1} = 1 \end{aligned}$$

Pour que  $\Pi_n$  reste adimensionnel, et puisque les unités fondamentales sont indépendantes, il faut que la somme des exposants de chaque dimension fondamentale soit nulle. Ce qui donne:

$$\begin{cases} \text{pour L : } a_1 - b_1 - 3c_1 + d_1 = 0 \\ \text{pour M: } b_1 + c_1 + d_1 + 1 = 0 \\ \text{pour T : } -b_1 + c_1 - 3d_1 - 3 = 0 \\ \text{pour } \theta : -d_1 - 1 = 0 \end{cases}$$

La solution de système donne :  $a_1 = 1$ ,  $b_1 = 0$ ,  $c_1 = 0$  et  $d_1 = -1$  et on obtient ainsi :

$$\Pi_1 = d \mu^0 \rho^0 \lambda_f^{-1} \bar{h} = \frac{\bar{h} d}{\lambda_f} = Nu$$

Ce nombre adimensionnel est appelé nombre de Nusselt, il caractérise l'importance du transfert de chaleur par convection par rapport à celui par conduction.

En suivant la même méthode pour les relations (2) et (3), on obtient :

$$\Pi_2 = \frac{\mu C_p}{\lambda_f} = Pr, \text{ ce nombre adimensionnel est appelé 'nombre de Prandtl'}$$

Ce nombre est calculable pour un fluide donné indépendamment des conditions expérimentales (il ne dépend que de la température). Il caractérise l'influence de la nature du fluide sur le transfert de chaleur par convection.

$$\Pi_3 = \frac{\rho u_m d}{\mu} = Re, \text{ ce nombre adimensionnel est appelé 'nombre de Reynolds'}$$

Ce nombre caractérise le régime d'écoulement, laminaire ou turbulent.

Le théorème de 'Vaschy-Buckingham' permet d'écrire :  $\Pi_1 = F(\Pi_2, \Pi_3)$

Il est donc préférable de chercher la relation :  $Nu = F(Pr, Re)$

▪ **Quelques nombres adimensionnels usuels en convection**

La nécessité de définir des corrélations qui soient applicables à des appareils de tailles différentes opérant dans des situations différentes conduit à l'utilisation de paramètres adimensionnels qui permettent de définir des similitudes. On définit ainsi :

1- *Nombre de Reynolds* :  $Re = \frac{\rho U d}{\mu}$ , c'est le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses, il caractérise le régime d'écoulement (laminaire ou turbulent).

2- *Nombre de Prandtl* :  $Pr = \mu \frac{c_p}{\lambda_f} = \frac{\nu}{\alpha_f}$ , c'est le rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement ' $\nu$ ' à la diffusivité thermique ' $\alpha_f$ ', il caractérise le fluide dans un état donné.

3- *Nombre de Nusselt* :  $Nu = \frac{\bar{h} d}{\lambda}$ , c'est le rapport entre le flux de chaleur par convection et celui par conduction dans le fluide, il caractérise le transfert de chaleur par convection.

4- *Nombre de Péclet* :  $Pe = Re.Pr = \frac{U d}{\alpha_f}$ , c'est le rapport entre le transfert de chaleur par diffusion et celui par convection dans le fluide, il caractérise la convection forcée.

5- *Nombre de Grashof* :  $Gr = \frac{\rho^2 g \beta (T_p - T_f) d^3}{\mu^2}$ , il caractérise le déplacement du fluide dans

un phénomène de convection naturelle. Cette relation est utilisable pour le cas où la température imposée à la paroi est constante. Si à la paroi on impose un flux de chaleur constant, on utilise alors le nombre de '*Grashof modifié  $Gr^*$* ', obtenu en posant:

$$Gr = \frac{\rho^2 g \beta (T_p - T_f) d^3}{\mu^2}, \text{ avec } \varphi = -\lambda S \frac{(T_f - T_p)}{d} \Rightarrow (T_p - T_f) = \frac{\varphi \cdot d}{\lambda S} \text{ d'où: } Gr^* = \frac{\rho^2 g \beta \varphi d^4}{\lambda S \mu^2}$$

Avec ‘ $\beta = 1/T_f$ ’ est le coefficient de dilatation thermique volumique et ‘ $d$ ’ est une longueur caractéristique qui peut être le diamètre pour une conduite ou la longueur pour une plaque.

**6- Nombre de Rayleigh :**  $Ra = Gr.Pr$ , il caractérise la convection naturelle.

▪ **Nombre de Nusselt**

C'est un nombre adimensionnel utilisé pour caractériser les transferts thermiques par convection entre un fluide et une paroi. Dans la couche limite thermique, le nombre de Nusselt est équivalent au coefficient de frottement dans la couche limite hydrodynamique.

- Le nombre de Nusselt représente le rapport du flux de chaleur échangé par convection au flux de chaleur échangé par conduction:

$$Nu = \frac{\varphi_{convection}}{\varphi_{conduction}} = \frac{h S (T_p - T_f)}{\lambda_f S \frac{(T_p - T_f)}{d}} = \frac{h d}{\lambda_f} = Nu \quad (IV.10)$$

**Remarque :** un nombre de Nusselt  $Nu = 1$  pour une couche fluide représente le transfert de chaleur à travers cette couche par conduction pure. Plus le nombre de Nusselt est élevé, plus la convection est efficace.

- Le nombre de Nusselt représente aussi le rapport de la résistance thermique de conduction par la résistance thermique de convection :

$$Nu = \frac{\varphi_{convection}}{\varphi_{conduction}} = \frac{(T_p - T_f)}{R_{th-convection}} = \frac{R_{th-conduction}}{R_{th-convection}} \frac{d}{\frac{1}{h}} = \frac{h d}{\lambda_f} = Nu \quad (IV.11)$$

Avec :

‘ $h$ ’ est le coefficient de transfert de chaleur par convection.

‘ $\lambda_f$ ’ est la conductivité thermique du fluide.

‘ $d$ ’ est une longueur caractéristique qui dépend de la géométrie du solide. Dans le cas d'un écoulement dans une conduite, ‘ $d$ ’ représente le diamètre de la canalisation, ou le diamètre hydraulique si la section de conduite n'est pas circulaire. Dans le cas d'une plaque plane, ‘ $d$ ’ représente la longueur de la plaque.

- Le nombre de Nusselt peut être interprété physiquement comme étant le rapport du gradient de température dans le fluide en contact immédiat avec la surface sur le gradient de température de référence  $(T_p - T_f)/d$ .

Au voisinage immédiat de la paroi (à l'interface  $y = 0$ ), la chaleur se transmet par conduction pure, le flux de chaleur peut être calculée par :

$$\varphi_{interface} = -\lambda_f S \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = hS (T_p - T_f)$$

En écrivant  $\partial T = \partial(T - T_p)$  et en introduisant une longueur caractéristique ' $d$ ' du corps à partir duquel la chaleur se transmet, l'équation précédente se met sous la forme adimensionnelle :

$$\frac{hS}{\lambda_f S} = \frac{-\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{(T_p - T_f)} \Rightarrow \frac{hd}{\lambda_f d} = \frac{-\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{(T_p - T_f)} \Rightarrow \frac{hd}{\lambda_f} = \frac{-\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{\frac{(T_p - T_f)}{d}} = Nu \quad (IV.12)$$

- Enfin, le nombre de Nusselt est également considéré comme le gradient de température adimensionnelle à la surface. En posant  $y^+ = \frac{y}{d}$  et  $T^+ = \frac{T - T_p}{T_f - T_p}$ , on obtient à partir de

l'équation (IV.6) de définition du coefficient d'échange convectif :

$$\frac{\partial T^+}{\partial y^+} = \frac{\partial \left( \frac{T - T_p}{T_f - T_p} \right)}{\partial \left( \frac{y}{d} \right)} = \frac{1}{\frac{T_f - T_p}{d}} \frac{\partial T}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_f - T_p}{d} \frac{\partial T^+}{\partial y^+}$$

$$h = \frac{-\lambda_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{(T_p - T_f)} = \frac{-\lambda_f \frac{T_f - T_p}{d} \left. \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right|_{y=0}}{(T_p - T_f)} = -\frac{\lambda_f (T_f - T_p)}{d (T_p - T_f)} \left. \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right|_{y=0} = \frac{\lambda_f}{d} \left. \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right|_{y=0}$$

$$h = \frac{\lambda_f}{d} \left. \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right|_{y=0} \Rightarrow \frac{hd}{\lambda_f} = \left. \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right|_{y=0} \Rightarrow Nu = \left. \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right|_{y=0} \quad (IV.13)$$

En pratique, le nombre de Nusselt est une mesure commode du coefficient d'échange de chaleur par convection car, une fois sa valeur connue, on peut calculer ' $h$ ' d'après la relation :

$$h = \frac{Nu \lambda_f}{d} \quad (IV.14)$$

Lorsque le nombre de Nusselt est lié au coefficient d'échange convectif local, il est appelé nombre de Nusselt local ' $Nu_x$ '. Dans ce cas, il varie en fonction de la position où on calcule le flux thermique, puisque ce dernier varie en chaque point de la géométrie. Le nombre de Nusselt local s'écrit :

$$Nu_x(x) = \frac{h(x).x}{\lambda_f} \quad (IV.15)$$

Le nombre de Nusselt global ou moyen ( $\bar{Nu}_L$  ou  $\bar{Nu}_D$ ) permet de calculer le flux de chaleur global (total), il correspond à un coefficient d'échange convectif moyen et s'exprime en fonction du nombre de Nusselt local par:

$$Nu_L = \int_0^L \frac{Nu_x(x)}{x} dx \quad (IV.16)$$

#### IV.5 Ecoulement Externe

##### ▪ La méthode empirique

La convection forcée externe correspond à un écoulement à l'extérieur d'une structure solide (le long d'une plaque plane par exemple). Une bonne compréhension de la convection forcée externe est importante dans la conception de nombreux systèmes d'ingénierie tels que les échangeurs de chaleur, les composants électroniques et les aubes de turbines. Pour la plupart des problèmes d'écoulement externes, les géométries et les champs d'écoulements sont trop compliqués pour être résolus analytiquement, et nous devons donc utiliser des corrélations basées sur des données expérimentales. L'objectif principal dans un phénomène de convection est la détermination du coefficient de transfert de chaleur par convection, qui sera calculé à partir du nombre de Nusselt. Nous avons vu que le nombre de Nusselt peut s'écrire sous la forme :  $Nu = f(Pr, Re)$  et les données expérimentales permettent souvent de le représenter de manière pratique par une simple relation de la forme :

$$Nu = C Re_L^m Pr^n \quad (IV.17)$$

Où : 'm' et 'n' sont des exposants constants, et la valeur de la constante 'C' dépend de la géométrie et du régime d'écoulement.

Dans ce qui suit nous allons présenter les corrélations expérimentales les plus usuelles en convection forcée externe. Concernant le nombre de Prandtl qui caractérise le fluide en écoulement il doit être déterminé pour une température donnée du fluide. La température du fluide dans la couche limite thermique varie de 'T<sub>p</sub>' à la surface à 'T<sub>∞</sub>' au bord extérieur de la limite. Les propriétés des fluides varient également avec la température, et donc avec la position à travers la couche limite. Afin de tenir compte de ces variations des propriétés avec la température, les propriétés des fluides sont généralement évaluées à la température dite du film, définie comme :



$$T_f = \frac{T_p - T_\infty}{2} \quad (\text{IV.18})$$

Les propriétés thermophysiques du fluide sont alors supposées rester constantes pour tout l'écoulement.

▪ **Plaque plane horizontale**

Considérons un écoulement parallèle d'un fluide sur une plaque plane horizontale de longueur ' $L$ ' (figure IV.6). La coordonnée ' $x$ ' est mesurée le long de la surface de la plaque depuis le bord d'attaque dans le sens de l'écoulement. Le fluide s'approche de la plaque dans la direction  $x$  avec une vitesse ' $U_\infty$ ' et une température ' $T_\infty$ ' uniformes en amont. L'écoulement dans la couche limite hydrodynamique commence comme laminaire, mais si la plaque est suffisamment longue, l'écoulement deviendra turbulent après une distance ' $x_{cr}$ ' à partir du bord d'attaque où le nombre de Reynolds atteint sa valeur critique de transition. Le nombre de Reynolds à une distance  $x$  du bord d'attaque de la plaque est exprimé par :

$$Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu} = \frac{\rho U_\infty x}{\mu} \quad (\text{IV.19})$$

La valeur du nombre de Reynolds varie du bord d'attaque jusqu'au bord de fuite de la plaque où elle atteint la valeur :

$$Re_L = \frac{U_\infty L}{\nu} = \frac{\rho U_\infty L}{\mu} \quad (\text{IV.20})$$

Pour un écoulement sur une plaque plane, la transition du régime laminaire au turbulent est généralement supposée se produire au nombre Reynolds critique :

$$Re_L = \frac{U_\infty x_{cr}}{\nu} = \frac{\rho U_\infty x_{cr}}{\mu} = 5 \cdot 10^5 \quad (\text{IV.21})$$

- *Température constante imposée à la surface de la plaque*

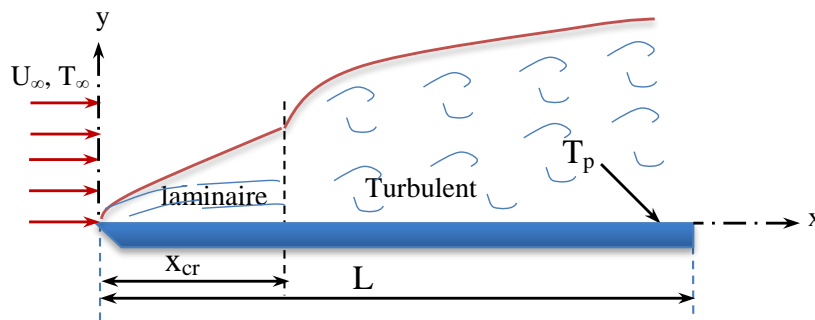


Figure IV.6 : Convection forcée sur une plaque plane horizontale

**Régime laminaire :**

$$Nu_x = \frac{h_x \cdot x}{\lambda_f} = 0,332 Re_x^{0.5} Pr^{0.33} \quad (IV.22)$$

$$\bar{Nu}_L = \frac{\bar{h} \cdot L}{\lambda_f} = 0,664 Re_L^{0.5} Pr^{0.33} \quad (IV.23)$$

Cette corrélation est valable pour  $Re < 5 \cdot 10^5$  et  $Pr \geq 0,6$ .

**Régime turbulent :**

$$Nu_x = \frac{h_x \cdot x}{\lambda_f} = 0,0296 Re_x^{0.8} Pr^{0.33} \quad (IV.24)$$

$$\bar{Nu}_L = \frac{\bar{h} \cdot L}{\lambda_f} = 0,037 Re_L^{0.8} Pr^{0.33} \quad (IV.25)$$

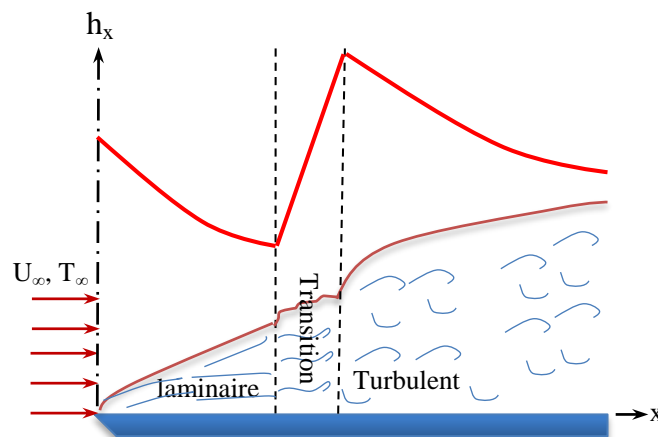
Cette corrélation est valable pour  $5 \cdot 10^5 \leq Re \leq 10^7$  et  $0,6 < Pr \leq 60$ .

Dans les relations précédentes, pour le régime laminaire ' $h_x$ ' est proportionnel à  $Re_L^{0.5}$  et donc

$$\text{à } \frac{1}{x^{0.5}} : h_x = 0,0296 \frac{\lambda_f}{x} Re_x^{0.8} Pr^{0.33} = 0,332 \frac{\lambda_f}{x} \left( \frac{U_\infty x}{\nu} \right)^{0.8} Pr^{0.33} = 0,332 \frac{\lambda_f}{x^{0.2}} \left( \frac{U_\infty}{\nu} \right)^{0.8} Pr^{0.33}$$

Par conséquent, la valeur de ' $h_x$ ' tend vers l'infini au bord d'attaque (à  $x = 0$ ) et diminue le sens de l'écoulement d'un facteur  $x^{-0.5}$ , sa variation est illustrée sur la figure IV.7 qui montre que ' $h_x$ ' est plus élevé en écoulement turbulent qu'en écoulement laminaire. De plus, il atteint ses valeurs les plus élevées lorsque l'écoulement devient entièrement turbulent, puis diminue d'un facteur  $x^{-0.2}$  dans le sens de l'écoulement le long de la plaque :

$$\text{à } \frac{1}{x^{0.5}} : h_x = 0,332 \frac{\lambda_f}{x} Re_x^{0.5} Pr^{0.33} = 0,332 \frac{\lambda_f}{x} \left( \frac{U_\infty x}{\nu} \right)^{0.5} Pr^{0.33} = 0,332 \frac{\lambda_f}{x^{0.5}} \left( \frac{U_\infty}{\nu} \right)^{0.5} Pr^{0.33}$$



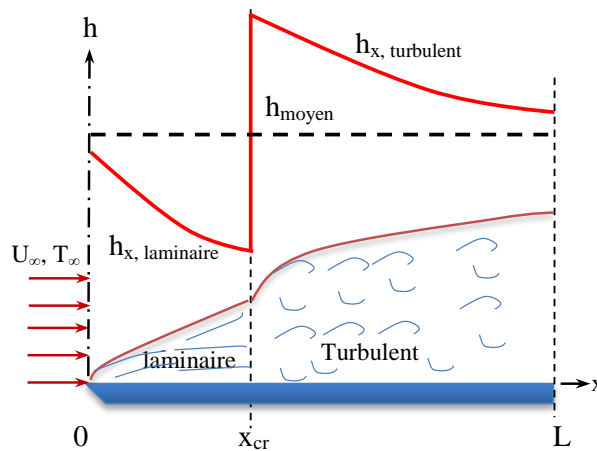
**Figure IV.7 :** Variation du coefficient de transfert de chaleur par convection local le long d'une plaque plane horizontale

La relation (IV.23) donne le coefficient de transfert de chaleur convectif moyen pour toute la plaque lorsque le flux est laminaire sur toute la plaque. Tandis que la relation (IV.25) donne le coefficient de transfert de chaleur moyen pour la plaque entière uniquement lorsque l'écoulement est turbulent sur toute la plaque, ou lorsque la région d'écoulement laminaire de la plaque est trop petite par rapport à la région d'écoulement turbulent.

Lorsque la plaque plane est suffisamment longue pour que l'écoulement devienne turbulent, mais pas suffisamment longue pour ignorer la région d'écoulement laminaire, le coefficient de transfert de chaleur moyen sur toute la plaque est déterminé en effectuant l'intégration de l'équation (IV.5) en deux parties :

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \left( \int_0^{x_{cr}} h_{x, \text{laminaire}} dx + \int_{x_{cr}}^L h_{x, \text{turbulent}} dx \right) \quad (\text{IV.26})$$

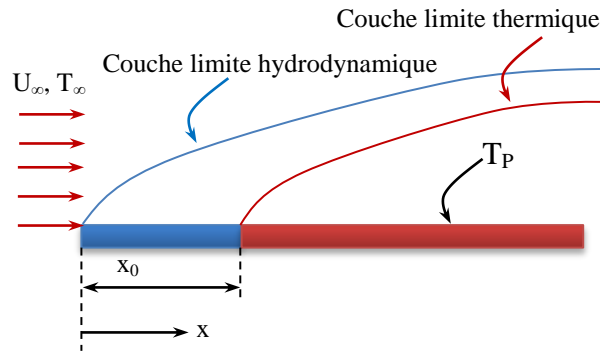
Dans cette expression ' $x_{cr}$ ' est déterminée à partir du nombre de Reynolds critique et en effectuant les intégrations et après substitution des expressions indiquées dans l'équation (IV.26), le coefficient de transfert de chaleur convectif sur toute la plaque sera déterminé, son allure est illustré sur la figure IV. 8.



**Figure IV.8 :** Coefficient du transfert de chaleur convectif moyen le long d'une plaque plane horizontale pour les régimes laminaire et turbulent.

**Plaque plane avec une longueur de départ non chauffée**

Les corrélations précédentes sont applicables pour une plaque entièrement chauffée à partir du bord d'attaque. Mais de nombreuses applications pratiques impliquent des surfaces avec une section de départ non chauffée de longueur ' $x_0$ ', et donc il n'y a pas de transfert de chaleur pour  $0 < x < x_0$ . Dans de tels cas, la couche limite hydrodynamique commence à se développer au bord d'attaque ( $x = 0$ ), mais la couche limite thermique commence à se développer là où le chauffage commence ( $x = x_0$ ), voir figure IV.9.



**Figure IV.9 :** Plaque plane avec une longueur de départ non chauffée

Lorsque la section chauffée de la plaque est maintenue à une température constante, on a :

**Régime laminaire :**

$$Nu_x = \frac{Nu_x(\text{pour } x_0 = 0)}{\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]^{1/3}} = \frac{0,332 Re_x^{0.5} Pr^{0.33}}{\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]^{1/3}} \quad (\text{IV.27})$$

**Régime turbulent :**

$$Nu_x = \frac{Nu_x(\text{pour } x_0 = 0)}{\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{9/10}\right]^{1/9}} = \frac{0,0296 Re_x^{0.8} Pr^{0.33}}{\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{9/10}\right]^{1/9}} \quad (\text{IV.28})$$

Dans ces deux relations, on peut remarquer que pour  $x_0 = 0$  on se trouve dans le cas de la plaque entièrement chauffée (équations IV.22 et IV.24). Par conséquent, les termes entre parenthèses dans le dénominateur servent de facteurs de correction pour les plaques avec des longueurs de départ non chauffées.

La détermination du nombre de Nusselt moyen nécessite l'intégration numérique des relations IV.27 et IV.28. Les résultats des intégrations numériques ont été corrélés pour les coefficients de transfert de chaleur par convection moyens par :

**Régime laminaire :**

$$\bar{h} = \frac{2 \left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]}{1 - \left(\frac{x_0}{L}\right)^{3/4}} h_{x=L} \quad (\text{IV.29})$$

**Régime turbulent :**

$$\bar{h} = \frac{5 \left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{9/10}\right]}{4 \left[1 - \left(\frac{x_0}{L}\right)^{9/10}\right]} h_{x=L} \quad (\text{IV.30})$$

La relation (IV.29) donne le coefficient de convection moyen pour toute la section chauffée de la plaque lorsque l'écoulement est laminaire sur toute la plaque. On peut remarquer que pour  $x_0 = 0$ , il se réduit à  $\bar{h} = 2h_{x=L}$ , ce qui correspond aux équations IV.22 et IV.23.

La relation (IV.30) donne le coefficient de convection moyen dans le cas d'un écoulement turbulent sur toute la plaque ou lorsque la région d'écoulement laminaire est petite par rapport à la région turbulente.

- **Flux de chaleur constant imposé à la surface de la plaque**

Lorsque la plaque plane est soumise à un flux de chaleur constant au lieu d'une température constante, le nombre de Nusselt local est donné par :

**Régime laminaire :**

$$Nu_x = \frac{h_x \cdot x}{\lambda_f} = 0,453 Re_x^{0.5} Pr^{0.33} \quad (IV.31)$$

**Régime turbulent :**

$$Nu_x = \frac{h_x \cdot x}{\lambda_f} = 0,0308 Re_x^{0.8} Pr^{0.33} \quad (IV.32)$$

Ces relations donnent des valeurs qui sont 36% plus élevées pour le régime laminaire et 4% plus élevées pour le régime turbulent par rapport au cas de la plaque soumise à une température constante.

Pour la plaque avec une longueur de départ non chauffée, les relations développées pour le cas d'une température constante à la surface sont toujours valables, en utilisant les Equations IV.31 et IV.32 pour  $Nu_x$  (pour  $x_0 = 0$ ) dans les équations IV.27 et IV.28, respectivement.

- **Écoulement autour d'un cylindre**

Considérant l'écoulement d'un fluide à l'extérieur d'un cylindre de diamètre ' $D$ ', perpendiculairement à son axe du cylindre. Sa vitesse et sa température à l'infini amont sont ' $U_\infty$ ' et ' $T_\infty$ ' respectivement (voir la figure IV.10). Un sillage se forme en aval de l'écoulement qui conduit à une répartition non homogène du coefficient de transfert de chaleur par convection sur la périphérie du cylindre. On définit un coefficient de convection moyen pour toute la périphérie ayant une température ' $T_p$ ' par :

**Cas d'un gaz :**

$$\bar{Nu}_D = C Re_D^m Pr^{0.33} \quad (IV.33)$$

**Cas d'un liquide :**

$$\bar{Nu}_D = 1,11C Re_D^m Pr^{0.33} \quad (IV.34)$$

Où : ' $C$ ' et ' $m$ ' sont des constantes, leurs valeurs sont données dans le tableau IV.2 :

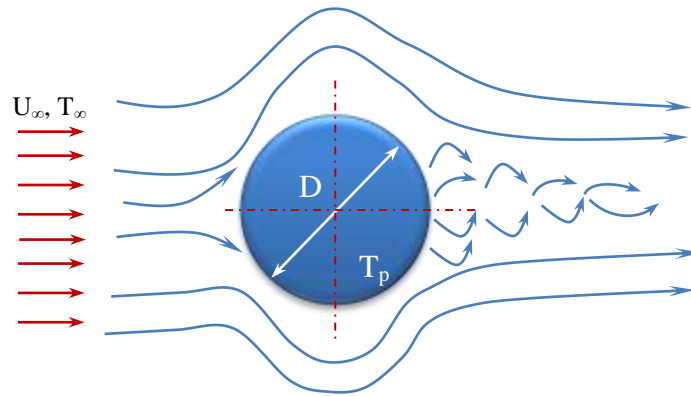


Figure IV.10 : Écoulement autour d'un cylindre

Tableau IV.2 Constantes dans l'expression du nombre de Nusselt pour l'écoulement autour d'un cylindre

Nombre de Reynolds	C	M
0,4 - 4	0,989	0,330
4 - 40	0,911	0,385
40 - 4000	0,683	0,466
4000 - 40000	0,193	0,618
40000 - 400000	0,027	0,805

▪ **Écoulement autour d'une sphère**

Pour une sphère, les effets de sillage sont similaires à ceux pour le cylindre et la corrélation du nombre de Nusselt est la suivante :

$$\bar{Nu}_D = 2 + \left( 0,4 Re_D^{0,5} + 0,06 Re_D^{0,66} \right) Pr^{0,4} \left( \frac{\mu_\infty}{\mu_p} \right) \quad (IV.35)$$

Cette relation est valable pour :

$$\begin{cases} 0,71 < Pr < 380 \\ 3,5 < Re_D < 7,6 \cdot 10^4 \\ 1 < \left( \mu_\infty / \mu_p \right) < 3,2 \end{cases}$$

Dns ces expressions, 'Re' est le nombre de Reynolds à l'amont du cylindre (calculé en utilisant la vitesse 'U\_infinity') et 'Re\_D' est celui calculé à la surface du cylindre. Toutes les propriétés sont déterminées à la température 'T\_infinity' sauf la viscosité dynamique 'mu\_p' du fluide qui est déterminée à la température 'T\_p'.

▪ **Écoulement autour d'un faisceau tubulaire**

Beaucoup d'installations industrielles sont constituées de rangées de tubes parallèles immergées dans un écoulement perpendiculaire à leur axe (par exemple : échangeurs de chaleur). Les tubes peuvent être alignés ou disposés en quinconce (voir figure IV.11). La disposition en quinconce conduit à de plus fortes turbulences et donc à un coefficient d'échange convectif plus important que pour un faisceau aligné. Le nombre de Nusselt se calcul par la corrélation suivante :

$$\bar{Nu}_D = 1,13C_1 Re_{D,max}^m Pr^{0,33} \tag{IV.36}$$

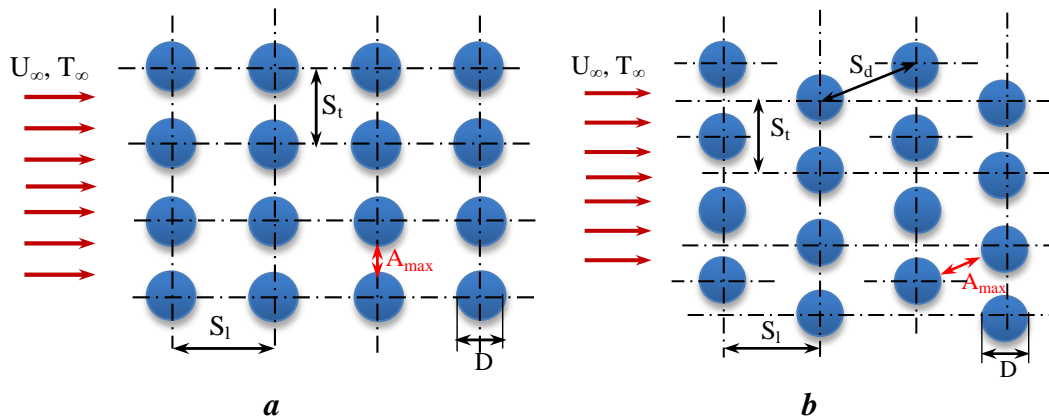
Pour la disposition alignée:  $C_1 = 0,26$  et  $m = 0,65$ ,

Pour la disposition en quinconce :  $C_1 = 0,41$  et  $m = 0,60$

Le nombre de Reynolds est calculé dans ces configurations en utilisant la vitesse maximale dans l'écoulement (sur les plans désignés par 'A<sub>max</sub>' ) :

Pour la disposition alignée: 
$$u_{max} = \frac{S_t}{(S_t - D)} U_\infty$$

Pour la disposition en quinconce : 
$$u_{max} = \frac{2S_t}{(S_d - D)} U_\infty$$



**Figure IV.11** : Ecoulement autour d'un faisceau de tubes :

*a-* disposition alignée ; *b-* disposition en quinconce

**IV.6 Ecoulement Interne**

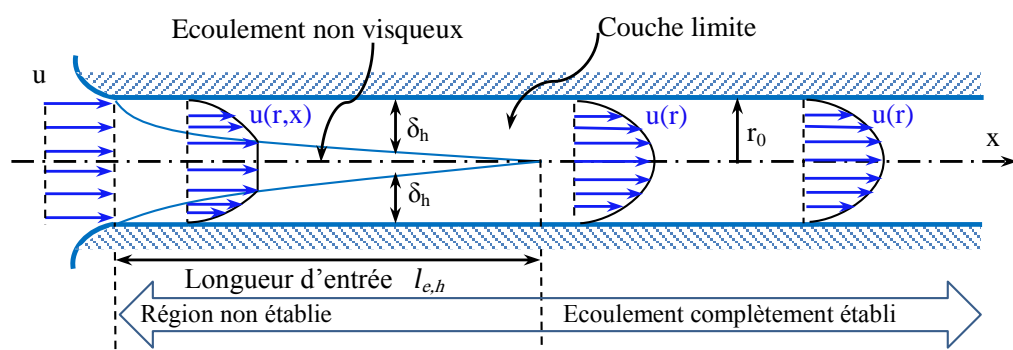
L'écoulement interne est un écoulement se développant dans un espace confiné qui peut être un tube (cylindrique ou rectangulaire), l'espace entre deux tubes concentriques etc. Dans la plupart des applications pratiques, l'écoulement d'un fluide dans un tube ou une conduite peut être considéré unidimensionnel avec des propriétés variant dans une seule direction (la direction de l'écoulement). Par conséquent, toutes les propriétés sont uniformes dans toute section transversale normale à la direction de l'écoulement, et possèdent des

valeurs moyennes sur cette section. A l'encontre d'écoulement externes, les écoulements internes se différencient par :

- Le développement de la couche limite est enchainé aux surfaces délimitant l'espace de l'écoulement.
- Les grandeurs caractéristiques : vitesse et température sont des grandeurs moyennes, vitesse moyenne ' $u_m$ ' au lieu de ' $u_\infty$ ' et température moyenne ' $T_m$ ' au lieu de ' $T_\infty$ '.
- **Considérations hydrodynamiques**

Considérons l'écoulement laminaire dans un tube de section circulaire de rayon ' $r_0$ ' où le fluide pénètre dans le tube avec une vitesse uniforme (figure IV.12). En mécanique des fluides (hydrodynamique) il est connu que, lorsque le fluide entre en contact avec la surface, les effets visqueux deviennent importants et une couche limite se développe avec l'augmentation de ' $x$ '. Ce développement se produit au détriment d'une région d'écoulement non visqueux qui se rétrécit et se termine par une fusion de la couche limite sur la ligne médiane. Suite à cette fusion, les effets visqueux s'étendent sur toute la section transversale du tube et le profil de vitesse ne change plus avec l'augmentation de ' $x$ '. On dit alors que l'écoulement est '*complètement développé*', et la distance de l'entrée à laquelle cette condition est atteinte est appelée '*longueur d'entrée hydrodynamique  $l_{e,h}$* '.

Le profil de vitesse complètement développé est parabolique pour l'écoulement laminaire dans un tube circulaire. Pour un écoulement turbulent, le profil est plat en raison d'un mélange turbulent dans le sens radial. Il est important de connaître l'étendue de la zone d'entrée, qui dépend du fait que l'écoulement est laminaire ou turbulent.



**Figure IV.12 :** Développement de la couche limite hydrodynamique d'un écoulement laminaire dans une conduite horizontale.

Le nombre de Reynolds pour l'écoulement dans un tube circulaire est défini par :

$$Re_D = \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{u_m D}{\nu} \quad (IV.37)$$



Où ' $u_m$ ' est la vitesse moyenne du fluide dans la section transversale du tube et D est le diamètre du tube.

Dans un écoulement entièrement développé, le nombre critique de Reynolds correspondant au début de la turbulence :  $Re_{cr} = 2300$ .

La longueur d'entrée hydrodynamique pour l'écoulement laminaire est donnée par :

$$\left(\frac{l_h}{D}\right) \approx 0,05 Re_D \quad (IV.38)$$

Pour l'écoulement turbulent, elle est indépendante du nombre de Reynolds :

$$10 \leq \left(\frac{l_h}{D}\right) \leq 60 \quad (IV.39)$$

• **Vitesse moyenne**

Dans un écoulement interne la vitesse moyenne est celle qui fournit le débit massique à travers le tube, elle est définie par :

$$\dot{m} = \rho u_m S$$

Avec 'S' est la section transversale du tube,  $S = \pi D^2/4$

Pour un écoulement permanent et incompressible dans un tube de section constante le débit massique et la vitesse moyenne sont constantes et indépendantes de 'x'. Le nombre de Reynolds s'écrit alors :

$$Re_D = \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{\dot{m} D}{S \mu} = \frac{\dot{m} D}{\pi D^2/4 \mu} = \frac{4\dot{m}}{\pi D \mu}$$

Le débit massique peut également être exprimé par :  $\dot{m} = \int_S \rho u(r, x) dS$

On obtient alors

$$\dot{m} = \rho u_m S = \int_S \rho u(r, x) dS \Rightarrow u_m = \frac{\int_S \rho u(r, x) dS}{\rho S} \Rightarrow u_m = \frac{\rho \int_S u(r, x) dS}{\rho \pi r_0^2}$$

$$S = \pi r^2 \Rightarrow dS = 2\pi r dr$$

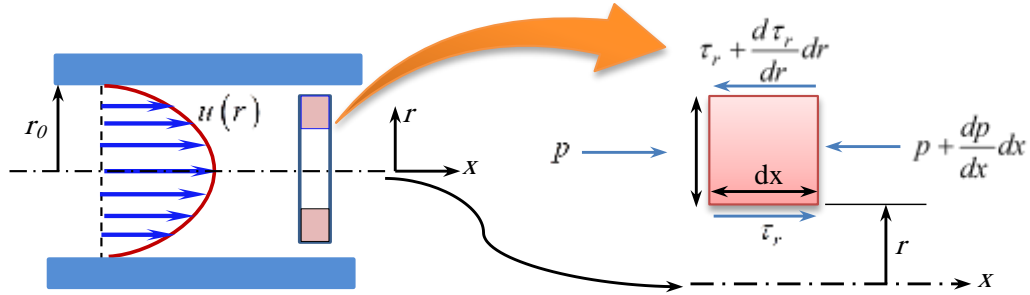
La vitesse moyenne dans un tube circulaire pour un fluide incompressible est de la forme :

$$u_m = \frac{\rho \int_S u(r, x) dS}{\rho \pi r_0^2} = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} u(r, x) r dr \quad (IV.40)$$

Cette expression permet de déterminer la vitesse moyenne à n'importe quelle position axiale à partir de la connaissance du profil de vitesse.

• **Profil de vitesse dans la région complètement développée**

Le profil de vitesse peut être facilement déterminé en résolvant les équations de continuité et de quantité de mouvement (équations IV.7 et IV.8 : voir écoulement de couette en Mécanique des fluides). Considérons un écoulement laminaire d'un fluide incompressible ayant des propriétés physiques constantes dans la région complètement développée d'un tube circulaire. Prenons l'élément différentiel annulaire de la figure IV.13 et effectuant l'équilibre entre les forces de cisaillement et de pression dans l'écoulement :



**Figure IV.13 :** Equilibre des forces sur un élément différentiel pour un écoulement laminaire complètement développé dans un tube circulaire [\*\*].

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{\text{cisaillement}} + \vec{F}_{\text{pression}} = 0$$

$$\left[ \tau_r S_r - \left( \tau_r S_r + \frac{d\tau_r S_r}{dr} dr \right) \right] + \left[ p S_p - \left( p S_p + \frac{dp S_p}{dx} dx \right) \right] = 0, \text{ avec } S_r = 2\pi r dx \text{ et } S_p = 2\pi r dr$$

Forces de cisaillements Forces de pressions

$$\left[ - \left( \frac{d(\tau_r 2\pi r dx)}{dr} dr \right) \right] + \left[ - \left( \frac{d(p 2\pi r dr)}{dx} dx \right) \right] = 0$$

$$\left[ - \left( \frac{d(r \tau_r)}{dr} \right) \right] + \left[ - \left( \frac{d(r p)}{dx} \right) \right] = 0 \Rightarrow - \frac{d}{dr}(r \tau_r) = r \frac{dp}{dx} \quad \text{(IV.41)}$$

Or la loi de Newton pour un fluide visqueux donne :  $\tau_r = -\mu \frac{du}{dr}$  avec  $y = r_0 - r$

L'équation (IV.40) devient :

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = \frac{dp}{dx} \quad \text{(IV.42)}$$

Puisque le gradient de pression axiale est indépendant de 'r', alors en intégrant deux fois l'équation (IV.42), la solution du problème est de la forme :

$$u(r) = \frac{1}{\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) \frac{r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2 \quad \text{(IV.43)}$$

Les constantes d'intégration peuvent être déterminées en utilisant les conditions aux limites suivantes :

A la paroi la vitesse est nulle:  $u(r_0) = 0$  et au centre la vitesse est maximale:  $\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=0} = 0$

La deuxième condition donne  $C_1 = 0$  (pour avoir une solution finie)

La première condition donne  $C_2 = -\frac{1}{4\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) r_0^2$

Après remplacement des constantes, l'équation (IV.43) devient :

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) r_0^2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \quad (\text{IV.44})$$

Le profil de vitesse d'un «écoulement complètement développé est parabolique (figure IV.12). Notons que le gradient de pression doit toujours être négatif.

La vitesse moyenne de l'écoulement est obtenue en remplaçant dans l'équation IV.40 'u (r)' par sa valeur obtenue par l'équation IV.44. Après intégration, on obtient :

$$u_m = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) \int_0^{r_0} \left[ r - \frac{r^3}{r_0^2} \right] dr = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4r_0^2} \right]_0^{r_0} = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) \left[ \frac{r_0^2}{2} - \frac{r_0^4}{4r_0^2} \right]$$

$$u_m = -\frac{r_0^2}{8\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) \quad (\text{IV.45})$$

En substituant (IV.45) dans (IV.44), on obtient finalement le profil de vitesse sous forme :

$$\frac{u(r)}{u_m} = 2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \Rightarrow u(r) = 2u_m \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \quad (\text{IV.46})$$

• **Gradient de pression et coefficient de frottement (écoulement complètement développée)**

Pour déterminer la perte de pression, il est pratique d'utiliser le coefficient de perte de charge linéaire appelé également coefficient de frottement de Moody (ou Darcy), qui est défini par :

$$f = \frac{-\left( \frac{dp}{dx} \right) D}{\rho \frac{u_m^2}{2}} \quad (\text{IV.47})$$

Le coefficient de frottement est définie par :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\rho \frac{u_m^2}{2}} \quad \text{avec} \quad \tau_p = -\mu \left( \frac{du}{dr} \right)_{r=r_0} \quad \text{d'où:} \quad C_f = \frac{f}{4} \quad (\text{IV.48})$$

En substituant les équations IV.37 et IV.45 dans l'équation IV.47, on obtient pour l'écoulement laminaire complètement développé :

$$f = \frac{\frac{8\mu}{r_0^2} u_m}{\rho \frac{u_m^2}{2}} D = \frac{\frac{16\mu}{\left(\frac{D}{2}\right)^2}}{\rho u_m} D = \frac{\frac{16\mu}{D}}{\rho u_m} = \frac{64}{\frac{\rho u_m D}{\mu}}$$

$$f = \frac{64}{Re_D} \quad (IV.49)$$

Pour l'écoulement turbulent complètement développé, l'analyse est beaucoup plus compliquée et nous devons nous appuyer sur des résultats expérimentaux. Dans ce cas, le coefficient de frottement dépend du nombre de Reynolds et de l'état de surface du tube et augmente avec la rugosité ' $\varepsilon$ '. Pour un tube lisse on utilise la corrélation de *Petukhov* qui est de la forme :

$$f = (0,790 \ln Re_D - 1,64)^{-2} \quad \text{valable pour: } 3000 \leq Re_D \leq 5.10^6 \quad (IV.50)$$

Pour un tube rugueux, on utilise la corrélation de *Colebrook* décrite par l'expression :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{Re_D \sqrt{f}} \right] \quad (IV.51)$$

La perte de pression pour l'écoulement laminaire complètement développé de la position axiale ' $x_1$ ' à ' $x_2$ ' peut alors être exprimée, d'après l'équation IV.47, par :

$$\Delta p = - \int_{p_1}^{p_2} dp = f \frac{\rho u_m^2}{2D} \int_{x_1}^{x_2} dx = f \frac{\rho u_m^2}{2D} (x_2 - x_1) = f \rho \frac{u_m^2}{2} \frac{l}{D} \quad (IV.52)$$

#### ▪ *Considérations thermiques*

Considérons un fluide qui entre dans un tube avec une température constante et qui est inférieure à celle de la surface. Un transfert de chaleur par convection se produit et une couche limite thermique commence à se développer dans le tube (figure IV.14). L'état thermique complètement développé est atteint et le profil de température  $T(r, x)$  dépend des conditions aux limites imposées (température constante ou flux de chaleur constant à la surface).

Pour l'écoulement laminaire, la longueur d'entrée thermique peut être exprimée par :

$$\left( \frac{l_{e,th}}{D} \right) \approx 0,05 Re_D \cdot Pr \quad (IV.53)$$

Pour les fluides ayant un nombre de Prandtl  $Pr > 1$ , la couche limite hydrodynamique se développe plus rapidement que la couche limite thermique ' $l_{e,h} < l_{e,th}$ ', tandis que l'inverse est vrai pour un de nombre  $Pr < 1$ .

Pour un nombre de Prandtl élevé (fluides tels que les huiles) ' $l_{e,h}$ ' est beaucoup plus petit que ' $l_{e,th}$ ' et le profil de vitesse est considéré complètement développé dans toute la région d'entrée

thermique. En revanche, pour un écoulement turbulent, les conditions sont presque indépendantes du nombre de Prandtl et on considère que :

$$\left(\frac{l_{e,th}}{D}\right) = 10 \quad (IV.54)$$

**Remarque :** dans la région complètement développée thermiquement d'un fluide avec des propriétés constantes, le coefficient de transfert de chaleur par convection local est constant et indépendante de la direction 'x'.

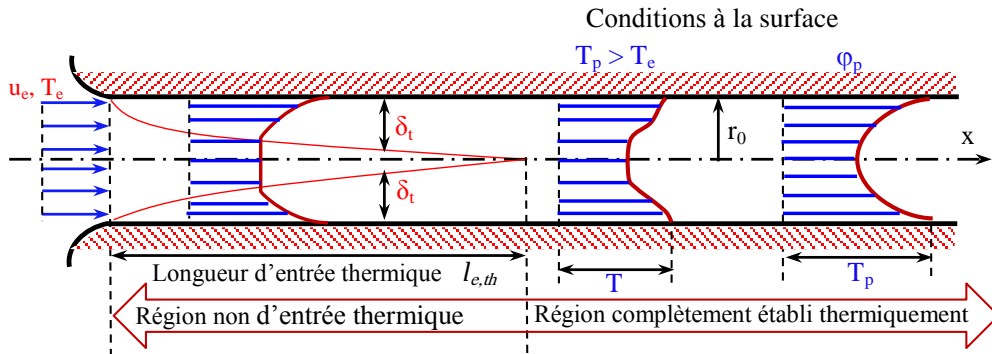


Figure IV.14 : Développement de la couche limite thermique dans un tube circulaire chauffé.

- **Température moyenne'**

Contrairement à l'écoulement externe où la vitesse et la température de références sont considérées comme étant ceux de l'écoulement libre loin de la paroi ( $T_\infty$  et  $U_\infty$ ), l'écoulement interne prend en considération une vitesse moyenne et une température moyenne (appelée également moyenne de mélange 'Bulk temperature').

Pour définir la température moyenne, prenons la définition de la quantité de chaleur échangée par convection entre une paroi solide et un fluide :

$$Q = \dot{m} C_p (T_{paroi} - T_{fluide})$$

Cette équation représente l'énergie thermique pour un liquide incompressible ou l'enthalpie (énergie thermique plus travail d'écoulement) pour un gaz idéal, qui est transporté par le fluide. Pour l'écoulement externe la température est considérée constante à travers les zones de section transversale d'entrée et de sortie. Ceci n'est pas vrai pour un écoulement interne.

La température moyenne est définie par :

$$\dot{m} C_p T_{mf} = \int_S \rho u C_p T dS \quad (IV.55)$$

$$T_{mf} = \frac{1}{\dot{m} C_p} \int_S \rho u C_p T dS$$

$\dot{m} = \rho u_m S$  est le débit massique et 'S' la section transversale de la conduite ou du tube. Pour un écoulement incompressible dans un tube circulaire avec  $\rho$  et  $C_p$  constante on a :

$$S = \pi r^2 \Rightarrow dS = 2\pi r dr, \text{ d'où :}$$

$$T_{mf} = \frac{1}{\rho u_m (\pi r_0^2) C_p} \int_0^{r_0} \rho u C_p T (2\pi r dr) = \frac{2}{u_m r_0^2} \int_0^{r_0} u T r dr \quad (IV.56)$$

Il est important de noter que la température moyenne multiplié par le débit massique et la chaleur spécifique ( $\dot{m} C_p T_{mf}$ ), fournit la vitesse à laquelle la chaleur (ou l'enthalpie) est advectée (transportée) avec le fluide lorsqu'il se déplace le long du tube.

Le flux de chaleur dans un écoulement interne s'exprime par :

$$\phi = hS (T_p - T_{mf})$$

' $T_{mf}$ ' n'est constante dans le sens de l'écoulement comme pour le cas de l'écoulement externe ( $T_\infty$ ). La valeur de ' $T_{mf}$ ' augmente avec ' $x$ ' si le transfert de chaleur se fait de la paroi solide vers le fluide ( $T_{mf} > T_p$ ) et elle diminue avec ' $x$ ' dans le cas contraire ( $T_{mf} < T_p$ ).

▪ **Bilan énergétique**

Le bilan énergétique est établi pour déterminer la variation de la température moyenne avec la position le long du tube ainsi que la relation du flux de chaleur convectif total avec la différence de température entre l'entrée et la sortie du tube.

Considérons l'écoulement avec transfert de chaleur par convection d'un fluide avec un débit massique constant dans le tube de la figure IV.15, le flux de chaleur convectif s'écrit par :

$$\phi_{conv} = \dot{m} C_p (T_{fm,sortie} - T_{fm,entree}) \quad (IV.57)$$

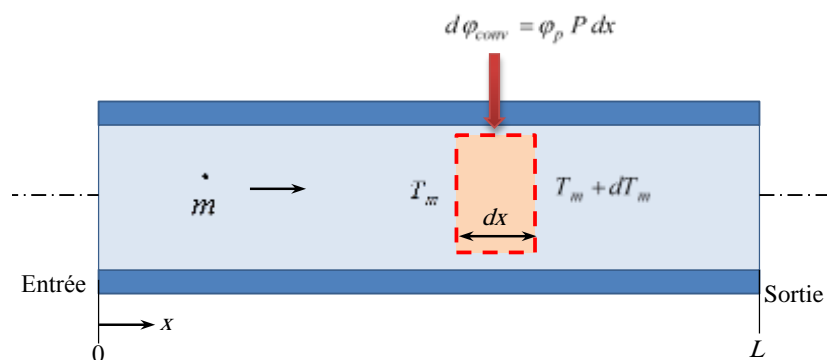


Figure IV.15 : Volume de contrôle pour un écoulement interne dans un tube

En appliquant l'équation IV.57 au volume de contrôle de la figure IV.14 on obtient :

$$d\phi_{conv} = \dot{m} C_p [(T_{fm} + dT_{fm}) - T_{fm}] = \dot{m} C_p dT_{fm}$$

D'autre part, le taux de transfert de chaleur par convection vers l'élément de contrôle peut être écrit sous la forme :  $d\varphi_{conv} = \varphi_p dS = \varphi_p P dx$ , où ' $\varphi_p$ ' est le flux de chaleur convectif échangé à travers la surface du volume de contrôle et ' $P$ ' est le périmètre de cette surface. On a alors:

$$d\varphi_{conv} = \dot{m} C_p dT_{fm} = \varphi_p P dx \Rightarrow \frac{dT_{fm}}{dx} = \frac{\varphi_p P}{\dot{m} C_p}$$

$$\frac{dT_{fm}}{dx} = \frac{P}{\dot{m} C_p} h (T_p - T_{mf}) \quad (IV.58)$$

A partir de cette équation, la variation axiale de ' $T_{mf}$ ' peut être déterminée : si  $T_p > T_{mf}$ , la chaleur est transférée au fluide et par conséquent ' $T_{mf}$ ' augmente avec ' $x$ '; si  $T_p < T_{mf}$ , l'inverse est vrai. La solution de l'équation précédente dépend des conditions aux limites thermiques imposées à la surface : Flux de chaleur constant ou température constante.

- **Flux de chaleur constant imposé à la surface**

Dans ce cas, le flux de chaleur total ' $\varphi_{conv}$ ' est indépendant de ' $x$ ', il s'ensuit que :

$$\frac{dT_{fm}}{dx} = \frac{\varphi_p P}{\dot{m} C_p} = C^{te} \Rightarrow dT_{fm} = \frac{\varphi_p P}{\dot{m} C_p} dx \Rightarrow \int dT_{fm} = \int \frac{\varphi_p P}{\dot{m} C_p} dx \Rightarrow T_{fm}(x) = \frac{\varphi_p P}{\dot{m} C_p} x + C$$

Pour déterminer la constante d'intégration, on pose à  $x = 0$ ,  $T_{fm} = T_{fm,e}$ , d'où :

$$T_{fm}(x) = \frac{\varphi_p P}{\dot{m} C_p} x + T_{fm,e} \quad \varphi_p = \text{Constant} \quad (IV.59)$$

Cette équation montre que la température moyenne varie linéairement avec ' $x$ ' le long du tube. De plus, puisque  $\varphi_p = h(T_p - T_{mf})$ , alors la différence de température ( $T_p - T_{mf}$ ) variera aussi avec ' $x$ '. Cette différence de température est initialement faible (en raison de la grande valeur de ' $h$ ' près de l'entrée) mais augmente avec l'augmentation de ' $x$ ' puisque ' $h$ ' diminue avec le développement de la couche limite. La variation de ' $T_{mf}$ ' et ( $T_p - T_{mf}$ ) est illustrée dans la figure IV.16-a.

- **Température constante imposée à la surface**

Les résultats dans ce cas est différent du précédent. En définissant  $\theta = T_p - T_{mf}$ , l'équation IV.58 s'écrit :

$$\frac{dT_{fm}}{dx} = \frac{P}{\dot{m} C_p} h (T_p - T_{mf}) = \frac{P}{\dot{m} C_p} h \theta \text{ or } \frac{dT_{fm}}{dx} = -\frac{d\theta}{dx} \text{ (puisque: } dT_{fm} = T_{mf} - T_p \text{)}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{P}{\dot{m}C_p}h\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{P}{\dot{m}C_p}hdx \Rightarrow \int_{\theta_e}^{\theta_s} \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{P}{\dot{m}C_p} \int_0^L hdx$$

$$(\ln \theta)_{\theta_e}^{\theta_s} = -\frac{PL}{\dot{m}C_p} \left( \frac{1}{L} \int_0^L hdx \right)$$

A partir de la définition du coefficient de transfert de chaleur par convection moyen, équation IV.5, on obtient :

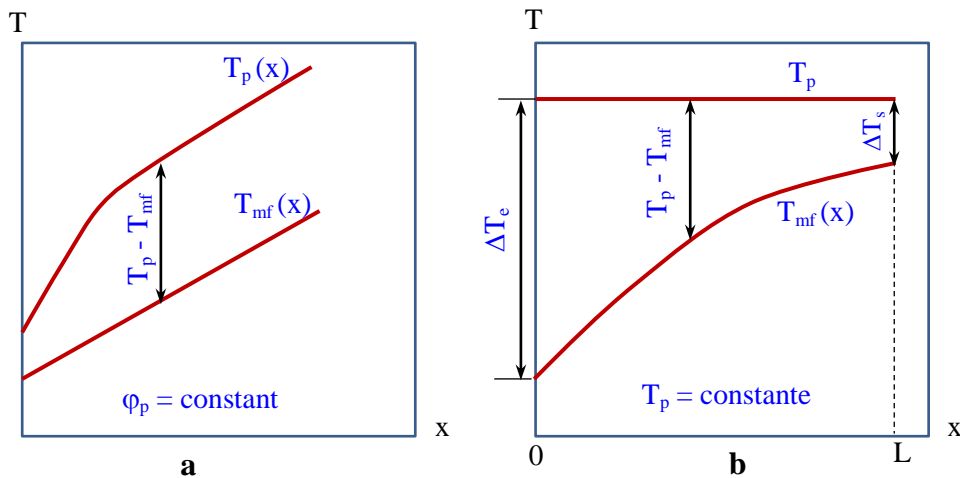
$$\ln \frac{\theta_s}{\theta_e} = -\frac{PL}{\dot{m}C_p} \bar{h}_L \Rightarrow \frac{\theta_s}{\theta_e} = e^{-\frac{PL}{\dot{m}C_p} \bar{h}_L} \Rightarrow \frac{T_p - T_{m,s}}{T_p - T_{m,e}} = e^{-\frac{PL}{\dot{m}C_p} \bar{h}_L}$$

Si on intègre de l'entrée du tube jusqu'à une position axiale 'x' à l'intérieur du tube, on obtient un résultat plus général :

$$\frac{T_p - T_m(x)}{T_p - T_{m,e}} = e^{-\frac{Px}{\dot{m}C_p} \bar{h}_{L,x}} \quad T_p = \text{Constante} \quad (\text{IV.60})$$

Où  $\bar{h}_{L,x}$  est maintenant la valeur moyenne de coefficient d'échange convectif e l'entrée du tube jusqu'à la distance 'x' et non pas à la sortie. Ce résultat indique que la différence de température ( $T_p - T_{mf}$ ) diminue exponentiellement avec la distance le long de l'axe du tube.

**Remarque :** La température moyenne varie linéairement avec 'x' le long du tube pour le cas d'un flux constant imposé et varie exponentiellement pour le cas d'une température constante imposée. De plus, la différence de température ( $T_p - T_{mf}$ ) varie également avec x. La distribution axiale de la température moyenne ainsi que celle de la différence de température ( $T_p - T_{mf}$ ) est illustrée sur la figure IV.16-b.



**Figure IV.16 :** Variations de température axiales pour le transfert de chaleur dans un tube.  
 a) Flux thermique constant en surface. (b) Température de surface constante.



▪ **Écoulement laminaire dans un tube circulaire de diamètre  $D$**

Le coefficient d'échange de chaleur convectif moyen se calcul à partir du nombre de Nusselt moyen.

**1- Région complètement développée**

Le nombre de Nusselt est constant et indépendant de ' $Re_D$ ', du ' $Pr$ ' et de la position axiale ' $x$ '.

- Flux de chaleur constant imposé à la surface :

$$\bar{Nu}_D = \frac{\bar{h}D}{\lambda} = 4,36 \quad \text{pour } \varphi_p = \text{constant} \quad (\text{IV.61})$$

- Température constante imposée à la surface :

$$\bar{Nu}_D = \frac{\bar{h}D}{\lambda} = 3,66 \quad \text{pour } T_p = \text{constant} \quad (\text{IV.62})$$

**2- Région d'entrée (hydrodynamique ou thermique)**

On définit le nombre de Graetz par :

$$Gz_D = \frac{D}{x} Re_D \cdot Pr$$

On utilise la corrélation de Hausen définie par :

$$\bar{Nu}_D = 3,66 + \frac{0,0668Gz_D}{1 + 0,04Gz_D^{2/3}} + \quad \text{pour } T_p = \text{constant} \quad \text{et } Pr \geq 5 \quad (\text{IV.63})$$

Toutes les propriétés du fluide doivent être évaluées à la température moyenne :

$$\bar{T}_{mf} = \frac{(T_{mf,e} + T_{mf,s})}{2}$$

**3- Propriétés thermo-physiques du fluide dépendent de la température**

Lorsque les différences entre la température de la paroi et la température moyenne correspondent à de grandes variations des propriétés thermo-physiques du fluide, on utilise la corrélation de Kays *et al.*, définie par :

$$\bar{Nu}_{D,c} = \bar{Nu}_D \left( \frac{\mu}{\mu_p} \right)^{0,14} \quad \text{pour les liquides} \quad (\text{IV.64})$$

Où  $\bar{Nu}_{D,c}$  est le nombre de Nusselt corrigé par rapport à  $\bar{Nu}_D$  qui est calculé à partir des équations IV.61 à 63. Toutes les propriétés thermo-physiques du fluide sont évaluées à ' $T_{fm}$ ' à l'exception de ' $\mu_p$ ', qui est évaluée à la température de la paroi ' $T_p$ '.

$\bar{Nu}_{D,c}$  peut être appliqué à l'écoulement laminaire d'un liquide dans un tube circulaire, dans la région complètement développée ou dans la région d'entrée.

▪ ***Écoulement turbulent dans un tube circulaire de diamètre  $D$  et de longueur  $L$***

Pour un écoulement turbulent complètement développé (hydrodynamiquement et thermiquement) dans un tube circulaire lisse, le nombre de Nusselt local peut être obtenu à partir de la corrélation de *Dittus-Boelter* :

$$\begin{aligned} \bar{Nu}_D &= 0,023 Re_D^{4/5} Pr^n \\ n &= 0,4 \text{ pour le chauffage } T_p > T_{mf} \\ n &= 0,3 \text{ pour le refroidissement } T_p < T_{mf} \end{aligned} \quad (IV.65)$$

Cette corrélation a été validée expérimentalement pour les conditions suivantes :

$$\left[ \begin{array}{l} 0,6 \leq Pr \leq 160 \\ Re_D \geq 10000 \\ \frac{L}{D} \geq 10 \end{array} \right]$$

Cette corrélation est utilisée pour des différences de température ( $T_p - T_{mf}$ ) petites ou modérées, avec toutes les propriétés thermo-physiques du fluide évaluées à ' $T_{mf}$ '.

Pour des différences de température ( $T_p - T_{mf}$ ) élevées impliquant de grandes variations des propriétés thermo-physiques du fluide, la corrélation de *Sieder et Tate* est recommandée:

$$\bar{Nu}_D = 0,027 Re_D^{4/5} Pr^{1/3} \left( \frac{\mu}{\mu_p} \right)^{0,14} \quad (IV.66)$$

Cette corrélation est valable pour les conditions suivantes :

$$\left[ \begin{array}{l} 0,7 \leq Pr \leq 16700 \\ Re_D \geq 10000 \\ \frac{L}{D} \geq 10 \end{array} \right]$$

Toutes les propriétés thermo-physiques du fluide sont évaluées à ' $T_{fm}$ ' à l'exception de ' $\mu_p$ ', qui est évaluée à la température de la paroi ' $T_p$ '.

Les corrélations IV.65 et IV.66 sont faciles à appliquer mais peuvent engendrer des erreurs allant jusqu'à 25%. Ces erreurs peuvent être réduites à moins de 10% en utilisant des corrélations plus récentes, mais généralement plus complexes. Une corrélation, valable pour les tubes lisses pour une large gamme de nombres de Reynolds, y compris la région de transition, a été élaborée par *Gnielinski*:

$$\bar{Nu}_D = \frac{\left(\frac{f}{8}\right)(Re_D - 1000)Pr}{1 + 12,7\sqrt{\frac{f}{8}}(Pr^{2/3} - 1)} \quad (IV.67)$$

Où ' $f$ ' est le coefficient de frottement, il peut être calculé à partir des équations IV.51 et IV.52

Cette corrélation est valable pour les conditions suivantes :

$$\left[ \begin{array}{l} 0,5 \leq Pr \leq 200 \\ 3000 \leq Re_D \leq 5.10^6 \end{array} \right]$$

**Remarque :**

1. Les corrélations précédentes peuvent être appliquées à la fois pour une température constante ou un flux thermique constant appliqués à la paroi solide.
2. Pour un écoulement turbulent dans des tubes rugueux, le coefficient de transfert de chaleur augmente avec la rugosité de la paroi et il peut être calculé en utilisant la corrélation de *Gnielinski* avec des coefficients de frottement obtenus à partir de l'équation IV.51
3. Les corrélations précédentes ne s'appliquent pas aux métaux liquides. Pour un écoulement turbulent complètement développé dans des tubes circulaires lisses on utilise :

- Corrélation de *Skupinski* et al. (applicable pour un flux de chaleur constant à la paroi)

$$\bar{Nu}_D = 4,82 + 0,0185Pe_D^{0,827} \quad \text{pour: } \varphi_p = \text{constant} \quad (IV.68)$$

Où  $Pe_D = Re_D \cdot Pr$  est le nombre de *Péclet*. Cette corrélation est valable pour :

$$\left[ \begin{array}{l} 3.10^{-3} \leq Pr \leq 5.10^{-2} \\ 3,6.10^3 \leq Re_D \leq 9,05.10^5 \\ 10^2 \leq Pe_D \leq 10^4 \end{array} \right]$$

- Corrélation de *Seban* et *Shimazaki* (pour une température constante à la paroi)

$$\bar{Nu}_D = 5,0 + 0,025Pe_D^{0,8} \quad \text{pour: } T_p = \text{constant} \quad (IV.69)$$

Cette corrélation est utilisable pour  $Pe_D \geq 100$  :

▪ **Corrélations pour les tubes non circulaires et annulaires**

La plupart des fluides, en particulier les liquides, sont transportés dans des conduites de sections circulaires parce qu'elles peuvent supporter de grandes différences de pression entre l'intérieur et l'extérieur sans subir de distorsions. Les conduites de sections non circulaires sont généralement utilisées dans de nombreuses applications d'ingénierie telles que les systèmes de chauffage et de refroidissement de bâtiments où la différence de pression est relativement petite et les coûts de fabrication et d'installation sont plus faibles. Pour la même







surface, la conduite circulaire donne le meilleur transfert de chaleur pour la moindre perte de charge. Cependant, comme première approximation, de nombreux résultats obtenus pour les conduites circulaires peuvent être appliqués aux conduites non circulaires en utilisant, au lieu du diamètre géométrique, le diamètre hydraulique défini par :

$$D_h = \frac{4S_m}{P_m} \quad (IV.70)$$

Où ' $S_m$ ' est la section transversale mouillée et ' $P_m$ ' le périmètre mouillé de cette section. C'est ce diamètre qui doit être utilisé pour calculer les différents paramètres tels que ' $Re_D$ ' et ' $Nu_D$ '.

- Pour l'écoulement turbulent, on peut utiliser les corrélations IV.65 à 69 pour  $Pr \geq 0,7$ .
- Pour l'écoulement laminaire, les corrélations pour les tubes circulaires sont moins précises, en particulier avec des sections transversales ayant des angles vifs. Pour de tels cas, le nombre de Nusselt correspondant aux régions complètement développées peut être obtenu à partir du tableau IV.3.

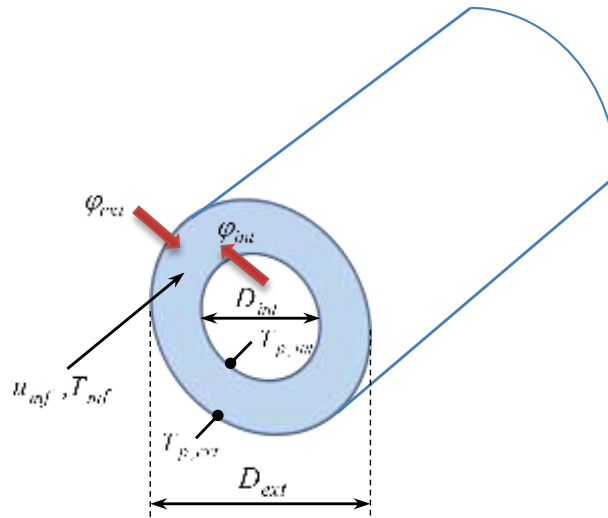
**Tableau IV.3** Nombre de Nusselt moyen et coefficient de frottement pour un écoulement laminaire complètement développé dans des conduites de différentes sections (\*\*).

$Nu_D$				
Section transversale	$\frac{b}{a}$	Flux thermique constant	Température constante	$f.Re_D$
	---	4,36	3,66	64
	1	3,61	2,98	57
	1,43	3,73	3,08	59
	2	4,12	3,39	62
	3	4,79	3,96	69
	4	5,33	4,44	73
	8	6,49	5,60	82
 Chauffé	$\infty$	8,23	7,54	96
 Isolé	$\infty$	5,39	4,86	96
	---	3,11	2,49	53

**Remarque :** pour la comparaison des nombres de Nusselt associés à différentes formes de sections transversales, il faut prendre en considération qu'une section transversale caractérisée par un nombre de Nusselt plus grand n'implique pas nécessairement un transfert de chaleur par convection ' $\varphi$ ' plus efficace, car le diamètre hydraulique et le périmètre mouillé dépendent de la section transversale.

- **Tubes annulaires (concentriques)**

De nombreux problèmes d'écoulements internes impliquent un transfert de chaleur dans des tubes concentriques (figure IV.17). Le fluide passe à travers l'espace annulaire formé ces tubes, et le transfert de chaleur par convection peut se produire vers ou depuis les surfaces des tubes interne et externe.



**Figure IV.17 :** Espace annulaire dans des tubes concentriques

Il est possible de spécifier indépendamment les conditions aux limites thermiques (flux de chaleur ou la température) à chacune de ces surfaces. Dans tous les cas, le flux thermique de chaque surface peut être calculé avec des expressions de la forme :

$$\begin{aligned} \varphi_{int} &= h_{int} (T_{p,int} - T_{mf}) \quad \text{avec} \quad Nu_{int} = \frac{h_{int} D_h}{\lambda} \\ \varphi_{ext} &= h_{ext} (T_{p,ext} - T_{mf}) \quad \text{avec} \quad Nu_{ext} = \frac{h_{ext} D_h}{\lambda} \end{aligned} \quad (IV.71)$$

Dans ces expressions, les coefficients de transfert de chaleur par convection sont associés aux surfaces intérieure et extérieure. Le diamètre hydraulique se calcul à partir de IV.70 par :

$$D_h = \frac{4S_m}{P_m} = \frac{4\pi \left( \frac{D_{ext}^2}{4} - \frac{D_{int}^2}{4} \right)}{\pi D_{ext} + \pi D_{int}} = D_{int} - D_{ext} \quad (IV.72)$$

- Pour un écoulement laminaire complètement développé avec une surface isolée et l'autre à une température constante,  $Nu_{int}$  ou  $Nu_{ext}$  sont obtenus à partir du tableau IV.4.

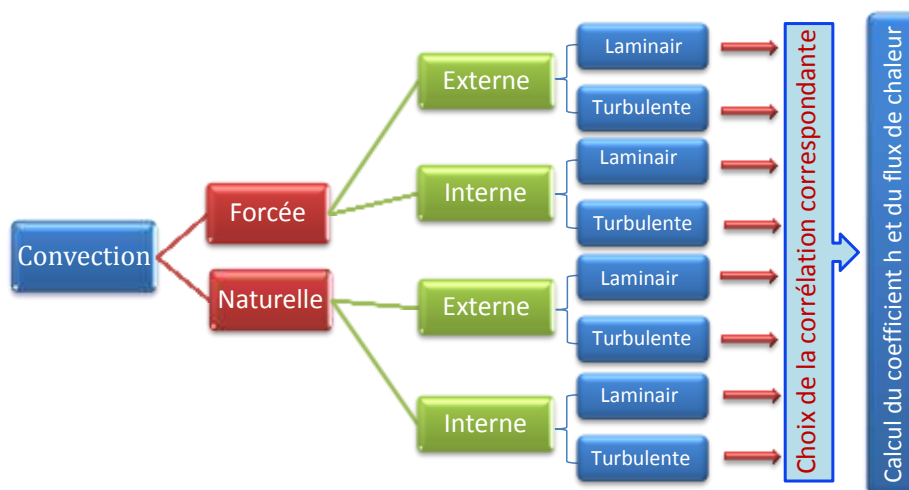
**Tableau IV.4** Nombre de Nusselt pour un écoulement laminaire complètement développé dans un anneau de tube circulaire avec une surface isolée et l'autre à température constante (\*\*).

$D_{int}/D_{ext}$	$Nu_{int}$	$Nu_{ext}$
0	---	3,66
0,05	17,46	4,06
0,1	11,56	4,11
0,25	7,37	4,23
0,5	5,74	4,43
$\approx 1$	4,86	4,86

▪ **Méthodologie pour le calcul du transfert de chaleur par convection**

La démarche à suivre lorsque l'on veut déterminer le flux de chaleur échangé par convection entre un fluide et une paroi solide est la suivante :

1. Déterminer s'il s'agit d'une convection forcée ou naturelle (libre)
2. Spécifier les conditions géométriques du problème (écoulement le long d'une surface plane, sphère, cylindre). L'objectif est de déterminer le type de convection : interne ou externe.
3. Spécifier une température de référence ( $T_{\infty}$ : pour un écoulement externe,  $T_{mf}$ : pour un écoulement interne) et déterminer les propriétés thermo-physiques du fluide à cette température (calculer le nombre de *Prandtl*).
4. Déterminer le régime d'écoulement (laminaire ou turbulent) à partir du nombre de Reynolds (en convection forcée) ou du nombre de Rayleigh (en convection naturelle).
5. Choisir une corrélation expérimentale correspondante à la configuration étudiée pour calculer le nombre de *Nusselt*.
6. Calculer le coefficient d'échange de chaleur par convection (moyen ou local) à partir du nombre de *Nusselt*. Sachant que, le coefficient d'échange local est utilisé pour déterminer le flux de chaleur à un point donné de la surface, tandis que le coefficient d'échange moyen détermine le flux de chaleur pour toute la surface.
7. Calculer le flux de chaleur échangé à partir de la relation de *Newton*.



*Figure IV.18 : Méthodologie pour calculer le flux de chaleur par convection*

## Chapitre V : Transfert de chaleur par convection libre (naturelle)

### V.1 Considérations physiques du problème

### V.2 Nombres de Grashof et Rayleigh

### V.3 Convection libre laminaire sur une surface plane verticale

### V.4 Effets de la turbulence

### V.5 Corrélations empiriques: écoulement externe en convection libre (plaque, Cylindre, sphère)

### V.6 Convection libre entre deux plaques planes parallèles

### V.7 Cavités (Cavités rectangulaires, cylindres et sphères concentriques)

### V.8 Convection mixte forcée et libre

### V.1 Considérations physiques du problème

La convection libre ou naturelle se produit dans des situations où des courants de convection existent à l'intérieur du fluide et qui surviennent lorsqu'une force corporelle agit sur un fluide dans lequel il existe des gradients de masses volumiques. Dans le cas le plus courant, le gradient de masse volumique est dû à un gradient de température et la force corporelle est due au champ gravitationnel. Etant donné que les vitesses d'écoulement par convection libre sont généralement beaucoup plus faibles que celles associées à la convection forcée, les échanges de chaleur, en convection naturelle, sont donc nettement moins intenses qu'en convection forcée. La convection naturelle explique les mouvements des grandes masses d'air autour de la Terre, actions de vents, formations des nuages et formations de courants océaniques.

En convection libre, le mouvement du fluide est dû aux forces de *flottabilité* (forces d'*Archimède*) à l'intérieur du fluide qui sont dues à la présence combinée d'un gradient de masse volumique du fluide et d'une force corporelle proportionnelle à ce gradient. En effet, la masse volumique des gaz et des liquides dépend de la température, elle diminue généralement avec l'augmentation de la température.

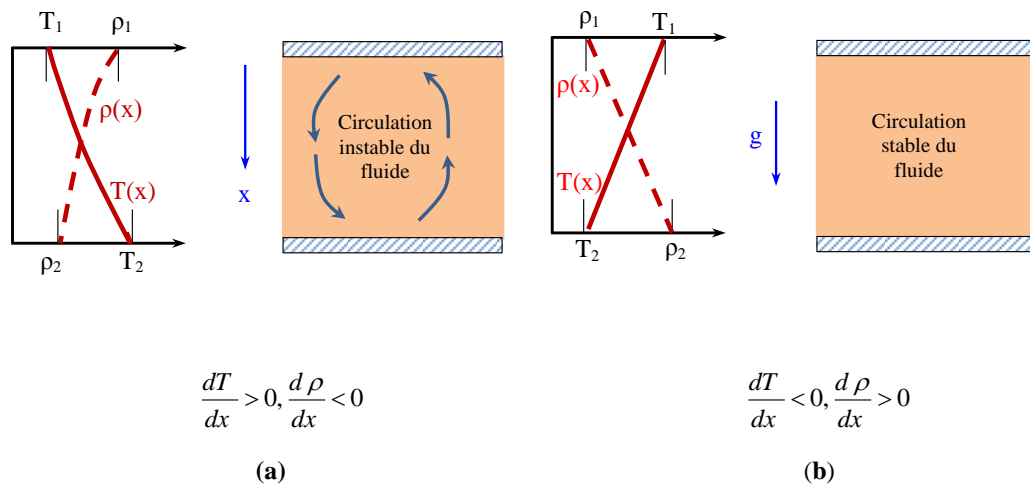
Pour mieux comprendre le phénomène de convection libre, considérons l'exemple de la figure V.1 où un fluide est enfermé entre deux grandes plaques horizontales de températures différentes ( $T_1 \neq T_2$ ) :



1. Dans le cas 'a' la température de la plaque inférieure dépasse celle de la plaque supérieure ( $T_1 < T_2$ ) et la masse volumique diminue dans le sens de la force gravitationnelle. Si la différence de température dépasse une valeur critique, les conditions sont instables et les forces de flottabilité sont capables de vaincre les forces visqueuses. La force gravitationnelle sur le fluide plus lourd dans les couches supérieures dépasse celle agissant sur le fluide plus léger dans les couches inférieures, et une circulation du fluide se produira conformément au schéma de la figure V.1-a. Dans ce processus, le fluide plus lourd descend et sera réchauffé, tandis que le fluide plus léger va monter en se refroidissant puisque ( $T_1 < T_2$ ).

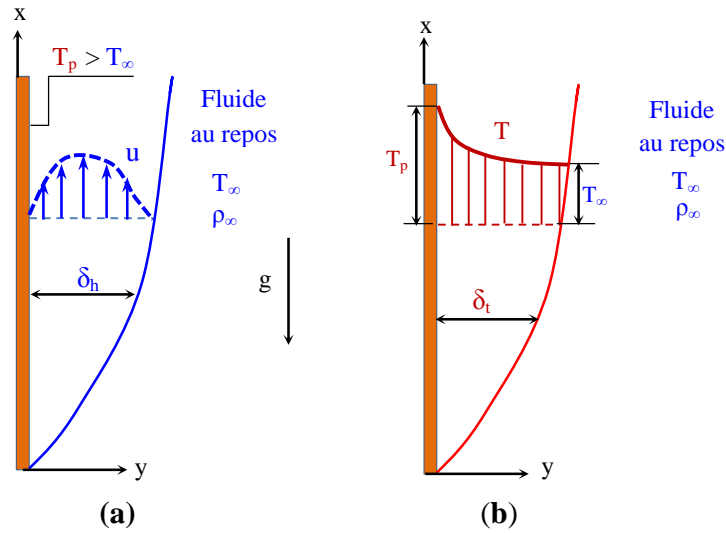
2. Dans le cas 'b', pour lequel ( $T_1 > T_2$ ) et la masse volumique ne diminue plus dans le sens de la force gravitationnelle. Les conditions sont maintenant stables et il n'y a pas de mouvement du fluide en moyenne.

- Pour le cas 'a' un transfert de chaleur se produit du bas vers la surface supérieure par convection libre
- Pour le cas 'b', le transfert de chaleur (de haut en bas) se fait par conduction.



**Figure V.1 :** Convection libre entre de grandes plaques horizontales ayant des températures différentes: **a-** Gradient de température instable, **b-** Gradient de température stable

Comme pour le cas de la convection forcée, des couches limites hydrodynamique et thermique se développent lors de la convection libre. Si on considère l'exemple d'une plaque verticale chauffée ( $T_p > T_\infty$ ) immergée dans un fluide au repos (figure V.2). Le fluide proche de la plaque est moins dense que le fluide plus éloigné et les forces de flottabilité provoquent donc une couche limite de convection libre dans laquelle le fluide chauffé monte verticalement, entraînant avec lui le fluide au repos. La distribution de vitesse résultante est différente de celle associée aux couches limites de convection forcée. En particulier, la vitesse est nulle pour  $y = 0$  et  $y \rightarrow \infty$ .



**Figure V.2 :** Développement de la couche limite laminaire sur une plaque verticale chauffée:  
**a-** Couche limite hydrodynamique (de vitesse), **b-** Couche limite thermique

## V.2 Nombres de Grashof et Rayleigh

Un coefficient thermo-physique supplémentaire intervient dans le cas de la convection naturelle : le coefficient de dilatation thermique volumétrique à pression constante défini par :

$$\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \approx -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\Delta \rho}{\Delta T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\rho_\infty - \rho}{T_\infty - T} \right) \quad (\text{V.1})$$

Cette propriété thermodynamique du fluide fournit une mesure de la quantité par laquelle la masse volumique change à cause d'une variation de température à pression constante. La manière dont on obtient le coefficient de dilatation thermique dépend du fluide. Pour un gaz parfait on a :

$$\rho = \frac{p}{RT} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \frac{p}{R} \left( \frac{\partial (1/T)}{\partial T} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{p}{R} \left( \frac{-1}{T^2} \right) = \frac{1}{(p/RT)} \frac{p}{R} \left( \frac{1}{T^2} \right)$$

$$\beta = \frac{1}{T} \quad (\text{V.2})$$

Où ' $T$ ' est la température absolue. Pour les liquides et les gaz non idéaux, ' $\beta$ ' doit être obtenus à partir des tableaux de propriétés appropriés.

La variation de la masse volumique en fonction de la température est supposée linéaire, elle est obtenue à partir de l'équation V.1 par:

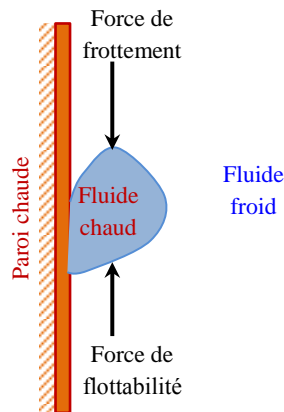
$$\rho(T) = \rho_\infty(T) [1 - \beta(T - T_\infty)] \quad \text{avec} \quad \beta(T - T_\infty) \ll 1 \quad (\text{V.3})$$

Où  $T_\infty$  représente la température du fluide loin de la paroi.

L'application de l'analyse dimensionnelle à la convection naturelle a met en évidence un nouveau groupement adimensionnel appelé nombre de *Grashof* ( $Gr$ ) donné par :

$$Gr_L = \frac{g \beta (T_p - T_\infty) L^3}{\nu^2} \quad (V.4)$$

Le nombre de *Grashof* mesure le rapport des forces de flottabilité (poussées d'Archimède) aux forces visqueuses agissant sur le fluide. Il joue un rôle comparable à celui du nombre de *Reynolds* en convection forcée. Le régime d'écoulement en convection naturelle est donc régi par le nombre de *Grashof* (figure V.3)



**Figure V.3 :** Forces de flottabilité et visqueuse opposée agissant sur le fluide en convection libre.

L'analyse dimensionnelle montre que les échanges de chaleur par convection naturelle peuvent être décrits par des corrélations du type :

$$Nu = f (Gr, Pr) \quad (V.5)$$

Dans les corrélations expérimentales pour la convection naturelle le produit des nombres de *Grashof* et de *Prandtl* est appelé nombre de *Rayleigh* :

$$Ra_L = Gr_L \cdot Pr \quad (V.6)$$

Où '*L*' est une longueur caractéristique de la géométrie étudiée.

### V.3 Convection libre laminaire sur une surface plane verticale

Considérons un écoulement de fluide laminaire parallèlement à une plaque plane verticale (figure V.2) entraîné par la force de flottabilité. L'écoulement est supposé permanent, bidimensionnel et les approximations de la couche limite sont valables. La force de gravité agit dans la direction '*x*' négative. Avec ces simplifications, l'équation (IV.8) de la quantité de mouvement suivant '*x*' se réduit à l'équation de la couche limite suivante :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (V.7)$$

A chaque position en hauteur '*x*', loin de la paroi de la plaque, la pression est considérée uniforme et le fluide non chauffé et en équilibre hydrostatique et sa vitesse est nulle ( $u = 0$ ), l'équation V.7 donne :

$$0 = -g - \frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial p}{\partial x} + 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_\infty g \quad (\text{V.8})$$

En substituant l'équation V.8 dans l'équation V.7, on obtient :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g + \frac{\rho_\infty}{\rho} g + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \left( \frac{\rho_\infty}{\rho} - 1 \right) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \left( \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho} \right) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{V.9})$$

En utilisant l'équation V.1 pour introduire le coefficient de dilatation thermique  $\beta$  on obtient :

$$\left( \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho} \right) = \beta (T - T_\infty) \quad (\text{V.10})$$

Cette simplification est connue sous le nom de l'approximation de *Boussinesq*. En remplaçant dans l'équation V.9, on obtient l'équation de quantité de mouvement suivant 'x' :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \beta (T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{V.11})$$

Cette équation montre comment la force de flottabilité entraînant l'écoulement est liée à la différence de température entre la paroi et le fluide.

Les effets de la force de flottabilité (poussée d'Archimède) sont limités à l'équation de la quantité de mouvement, les équations de conservation de la masse (équation IV.7) et de l'énergie (équation IV.9) sont ajoutées pour compléter la formulation du problème, on obtient alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \beta (T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{cases} \quad (\text{V.12})$$

Pour résoudre ces équations, on introduit les conditions aux limites suivantes (figure V.2)

pour  $y = 0$ :  $u = v = 0$  et  $T = T_p$

pour  $y \rightarrow \infty$ :  $u \rightarrow 0$  et  $T \rightarrow T_\infty$

Une solution de similitude (par similarité) a été obtenue par *Ostrach*, elle donne l'expression du nombre de *Nusselt* local par :

$$Nu_x = \frac{h x}{\lambda} = \left( \frac{Gr_x}{4} \right)^{\frac{1}{4}} f(Pr) \quad (\text{V.13})$$

$Gr_x$  est le nombre de *Grashof* local, donnée par la relation :

$$Gr_x = \frac{g \beta (T_p - T_\infty) x^3}{\nu^2}$$

$f(Pr)$  est une fonction du nombre de *Prandtl* qui a été obtenue numériquement par :

$$f(Pr) = \frac{0,75 Pr^{0,5}}{(0,609 + 1,221 Pr^{0,5} + 1,238 Pr)^{1/4}} \quad (V.14)$$

Cette relation est valable pour  $0 \leq Pr \leq \infty$

Le nombre de *Nusselt* moyen est donné par :

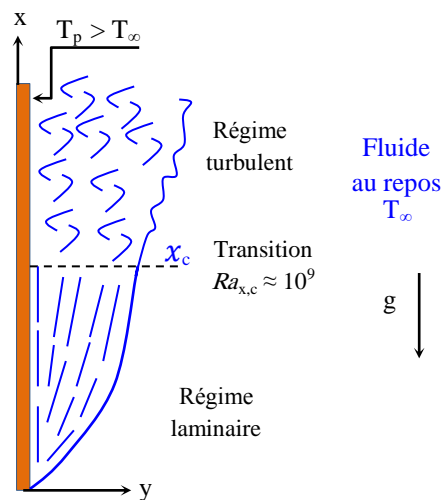
$$\overline{Nu}_L = \frac{4}{3} \left( \frac{Gr_L}{4} \right)^{1/4} f(Pr) \quad (V.15)$$

En posant  $x = L$  et en remplaçant dans l'équation V.13 et en comparant avec l'équation V.15 on obtient:

$$\overline{Nu}_L = \frac{4}{3} Nu_L \quad (V.16)$$

#### V.4 Effets de la turbulence

Les couches limites dues à la convection libre ne sont pas limitées à l'écoulement laminaire. Comme pour la convection forcée, des instabilités hydrodynamiques peuvent survenir et les perturbations de l'écoulement peuvent être amplifiées, conduisant à une transition de l'écoulement laminaire vers l'écoulement turbulent. Ce processus est illustré schématiquement sur la figure V.4 pour une plaque verticale chauffée.



**Figure V.4 :** Transition de la couche limite de convection libre sur une plaque verticale.

La transition dans une couche limite de convection libre dépend de la force de flottabilité (poussée d'*Archimède*) et des forces visqueuses dans le fluide. L'effet de ces

forces est pris en compte par le nombre de *Rayleigh*. Pour les plaques verticales, le nombre critique de *Rayleigh* à partir duquel l'écoulement devient turbulent est donnée par :

$$Ra_{x,cr} = Gr_{x,cr} Pr = \frac{g \beta (T_p - T_\infty) x^3}{\nu \alpha} \approx 10^9 \quad (\text{V.17})$$

Comme dans le cas de la convection forcée, la transition vers la turbulence a un fort effet sur le transfert de chaleur par convection libre. Cependant, les équations V.13 à V.16 ne s'appliquent que pour  $Ra_L \leq 10^9$  (écoulement laminaire). Pour obtenir des corrélations appropriées pour l'écoulement turbulent, on utilise des résultats expérimentaux.

### V.5 Corrélations empiriques: Ecoulement externe en convection libre

En convection libre, les corrélations empiriques développées pour les écoulements externes sont souvent de la forme :

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{\lambda} = C Ra_L^n \quad (\text{V.18})$$

Où :

Le nombre de *Rayleigh* est basé sur la longueur caractéristique ' $L$ ' de la géométrie.

Pour un écoulement laminaire :  $n = \frac{1}{4}$ .

Pour un écoulement turbulent :  $n = \frac{1}{3}$  (d'où  $\bar{h}_L$  est indépendant de  $L$ )

Toutes les propriétés du fluide sont déterminées à la température du film,  $T_f = \frac{T_p + T_\infty}{2}$

#### V.5.1 Plaque verticale

- *Température constante imposée à la paroi (plaque isotherme)*

Des corrélations de la forme donnée par l'équation V.18 et qui correspondent à chaque régime d'écoulement ont été développées pour la plaque verticale. Elle sont de la forme :

$$\overline{Nu}_L = C Ra_L^n$$

Pour un écoulement laminaire :  $10^4 \leq Ra_L \leq 10^9$ ,  $C = 0,59$  et  $n = \frac{1}{4}$

Pour un écoulement turbulent :  $10^9 \leq Ra_L \leq 10^{13}$ ,  $C = 0,10$  et  $n = \frac{1}{3}$

Une autre corrélation applicable pour une large gamme de nombre de *Rayleigh* (régimes laminaire et turbulent :  $10^{-1} \leq Ra_L \leq 10^9$ ), elle est de la forme :

$$\overline{Nu}_L = \left[ 0,825 + \frac{0,387Ra_L^{1/6}}{\left[ 1 + \left( \frac{0,492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{8/27}} \right]^2 \quad (V.19)$$

Cette corrélation est adaptée à la plupart des calculs d'ingénierie. Pour une meilleure précision pour l'écoulement laminaire, on utilise la corrélation suivante :

$$\overline{Nu}_L = 0,68 + \frac{0,670Ra_L^{1/4}}{\left[ 1 + \left( \frac{0,492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{4/9}} \quad \text{pour } Ra_L \leq 10^9 \quad (V.20)$$

▪ **Flux de chaleur constant imposé à la paroi**

Dans le cas d'un flux de chaleur constant imposé à la surface, la température à la paroi ' $T_p$ ' n'est pas constante et varie le long de la plaque. Les corrélation du nombre de *Nusselt* pour les plaques isothermes peuvent également être utilisées pour les plaques soumises à un flux thermique constant, à condition que la température de la paroi ' $T_p$ ' sera remplacée par la température au milieu de plaque ' $T_{p,L/2}$ ' dans l'évaluation de la température du film.

On peut aussi utiliser le nombre de *Grashof* modifié défini par :

$$Gr_L^* = \frac{g \beta \varphi_p L^4}{\lambda S \nu^2} \quad (V.21)$$

**Remarque (Cylindre vertical) :** Les corrélation précédentes peuvent également être appliquées à des cylindres verticaux de hauteur ' $L$ ', si l'épaisseur de la couche limite ' $\delta$ ' est bien inférieure au diamètre du cylindre ' $D$ '. Dans ce cas, le diamètre du cylindre est suffisamment grand pour que les effets de courbure soient négligeables et la surface extérieure du cylindre vertical peut être traitée comme étant une plaque verticale. Ceci est valable si :

$$D \geq \frac{35L}{Gr_L^{1/4}} \quad (V.22)$$

**V.5.2 Plaques horizontales et inclinées**

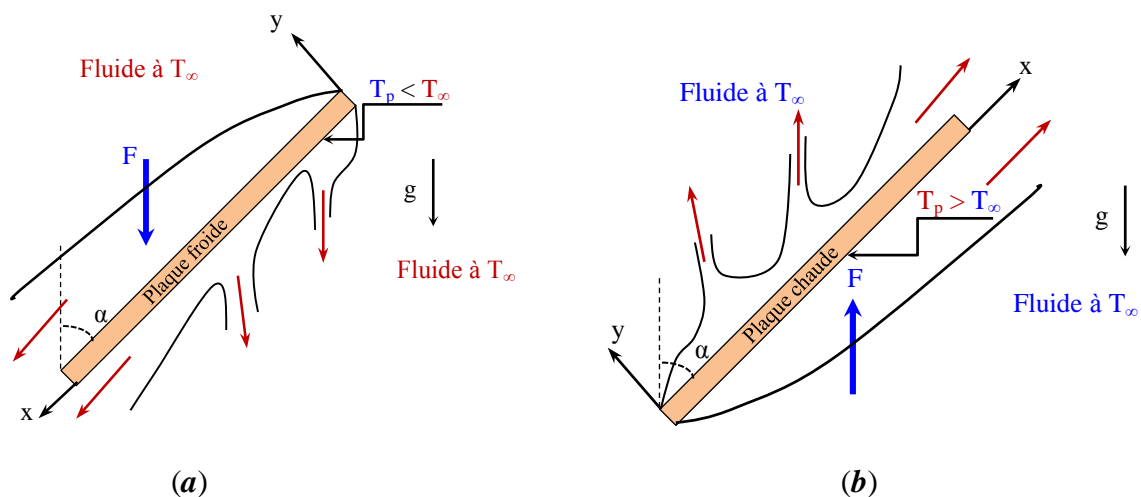
Pour le cas d'une plaque verticale chaude (ou froide) par rapport au fluide qui l'entoure, la force de gravité est alignée avec la plaque et la force de flottabilité engendre un mouvement de fluide dans le sens ascendant (ou descendant). Si la plaque est inclinée par rapport à la gravité, la force de flottabilité a une composante normale et un autre parallèle, à la surface de la plaque. On constate alors une réduction des vitesses du fluide le long de la plaque à cause de la réduction de la force de flottabilité parallèle à la surface et par

conséquent, une réduction du transfert de chaleur par convection selon que l'on s'intéresse au transfert de chaleur depuis la surface supérieure ou inférieure de la plaque.

Si la plaque est froide (figure V.5-a), la composante de la force de flottabilité suivant la direction 'y' normale à la plaque, agit pour maintenir l'écoulement descendant de la couche limite en contact avec la face supérieure de la plaque. Puisque la composante suivant 'x' de l'accélération gravitationnelle est réduite à ' $f_x = g \cdot \cos \alpha$ ', les vitesses du fluide le long de la plaque diminuent et par conséquent, le transfert de chaleur par convection vers la surface supérieure diminue.

Cependant, à la face inférieure, la composante de la force de flottabilité suivant 'y' va déplacer le fluide de la surface, et le développement de la couche limite est interrompu par le rejet du fluide froid à partir de la face inférieure qui est remplacé, en continu, par le fluide ambiant plus chaud. Ce déplacement du fluide de la couche limite froide par la température ambiante plus chaude et la réduction correspondante de l'épaisseur de la couche limite thermique augmentent le transfert de chaleur par convection vers la face inférieure. En effet, l'augmentation du transfert de chaleur dépasse généralement la diminution due à la composante 'x' réduite de la force de gravité, et l'effet combiné a comme conséquence l'augmentation du transfert de chaleur vers la face inférieure.

Les mêmes constatations sont faites pour le cas de la plaque chaude (figure V.5-b) où l'écoulement du fluide tridimensionnel est associé à la face supérieure, à partir de laquelle des parcelles de fluide chaud sont évacuées.

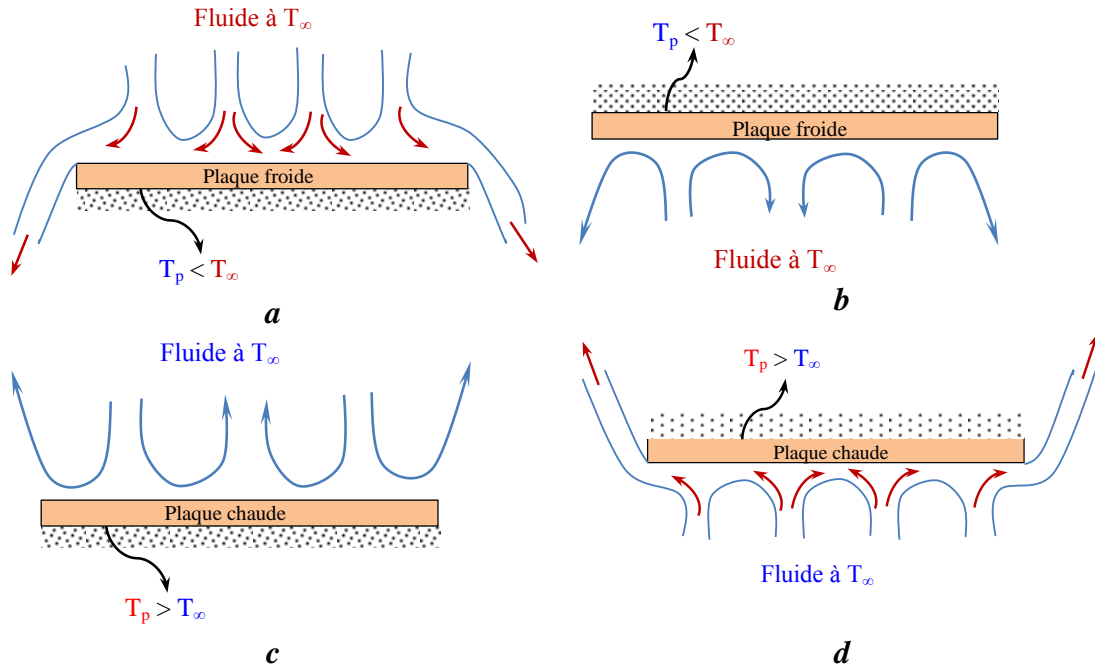


**Figure V.5 :** Ecoulements en convection naturelle entraînés par la force de flottabilité sur les parois supérieure et inférieure d'une plaque plane inclinée:

**a-** plaque froide ( $T_p < T_\infty$ ), **b-** plaque chaude ( $T_p > T_\infty$ ).



Pour la plaque inclinée, les modèles d'écoulement et de transfert de chaleur dépendent fortement du fait que la surface soit froide ou chaude et qu'elle soit orientée vers le haut ou vers le bas. Si la plaque est horizontale, la force de flottabilité est exclusivement normale à la surface.



**Figure V.6 :** *Écoulements en convection naturelle entraînés par la force de flottabilité sur des plaques planes horizontales froides ( $T_p < T_\infty$ ) et chaudes ( $T_p > T_\infty$ ):*

(a) *Paroi supérieure de la plaque froide. (b) Paroi inférieure de la plaque froide. (c) Paroi supérieure de la plaque chaude. (d) Paroi inférieure de la plaque chaude.*

**Remarque :** Pour les plaques horizontales de différentes formes (carrées, rectangles ou cercles), il est nécessaire de définir une longueur caractéristique à utiliser pour le calcul des nombres de *Nusselt* et *Rayleigh* :

$$L = \frac{S_s}{P} \quad (\text{V.23})$$

Où  $S_s$  et  $P$  sont respectivement la surface de la plaque (sur le côté) et le périmètre. En utilisant cette longueur caractéristique, les corrélations recommandées pour le nombre de *Nusselt* moyen sont :

- **Surface supérieure de la plaque chaude ou surface inférieure de la plaque froide:**

$$\overline{Nu}_L = 0,54Ra_L^{1/4} \text{ pour } 10^4 \leq Ra_L \leq 10^7 \text{ et } Pr \geq 0,7 \quad (\text{V.24})$$

$$\overline{Nu}_L = 0,15Ra_L^{1/3} \text{ pour } 10^7 \leq Ra_L \leq 10^{11} \text{ et tout } Pr \quad (\text{V.25})$$

- **Surface inférieure de la plaque chaude ou surface supérieure de la plaque froide:**

$$\overline{Nu}_L = 0,52Ra_L^{1/5} \text{ pour } 10^4 \leq Ra_L \leq 10^9 \text{ et } Pr \geq 0,7 \quad (\text{V.26})$$

### V.5.3 Cylindre horizontal long

De nombreuses corrélations existent pour cette géométrie. Pour un cylindre isotherme (température constante imposée à la paroi), on a une expression de la forme :

$$\overline{Nu}_D = \frac{hD}{\lambda} = C Ra_D^n \quad (\text{V.27})$$

Où 'C' et 'n' sont des constantes données dans le tableau V.1 et  $\overline{Nu}_D$  et  $Ra_D$  sont basés sur le diamètre du cylindre.

**Tableau V.1 :** Constantes de l'équation V.27 pour la convection libre sur un cylindre horizontal

$Ra_D$	C	n
$10^{-10} - 10^{-2}$	0,675	0,058
$10^{-2} - 10^2$	1,02	0,148
$10^2 - 10^4$	0,850	0,188
$10^4 - 10^7$	0,480	0,250
$10^7 - 10^{12}$	0,125	0,333

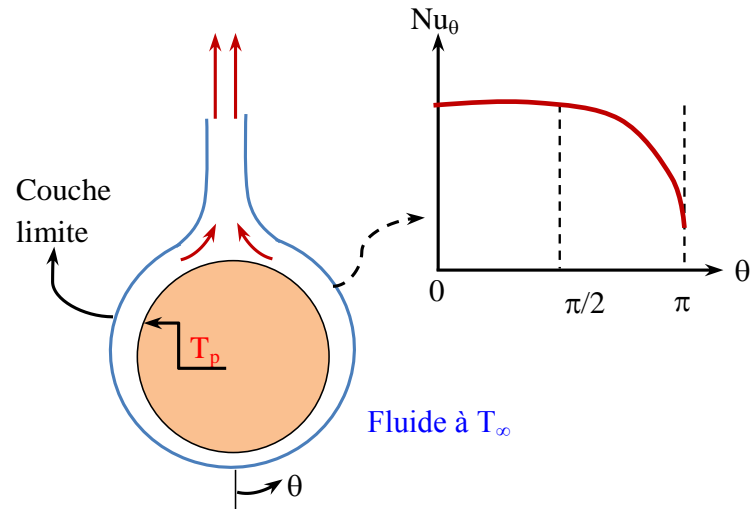
Une autre corrélation applicable pour une large gamme de nombres de *Rayleigh* est donnée par:

$$\overline{Nu}_D = \left\{ 0,60 + \frac{0,387 Ra_D^{1/6}}{\left[ 1 + (0,559/Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2 \text{ pour } Ra_D \leq 10^{12} \quad (\text{V.28})$$

Les corrélations précédentes donnent le nombre de *Nusselt* moyen sur toute la circonférence d'un cylindre isotherme.

Pour un cylindre long chauffé (figure V.7), les nombres de *Nusselt* locaux sont influencés par le développement de la couche limite, qui commence à ' $\theta = 0$ ' et se termine à ' $\theta < \pi$ '. Si l'écoulement reste laminaire sur toute la surface, la distribution du nombre de *Nusselt* local en fonction de ' $\theta$ ' est caractérisée par un maximum à ' $\theta = 0$ ' et une décroissance monotone avec l'augmentation de ' $\theta$ '. Cette décroissance s'interrompt à des nombres de *Rayleigh* suffisamment grands ( $Ra_D \geq 10^9$ ) pour permettre la transition vers la turbulence à

l'intérieur de la couche limite. Si le cylindre est refroidi, le développement de la couche limite commence à ' $\theta = \pi$ ' et le nombre de *Nusselt* local est maximum à cet endroit.



**Figure V.7 :** Développement de la couche limite et distribution du nombre de Nusselt sur un cylindre horizontal chauffé.

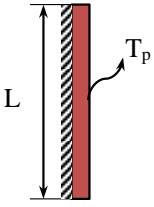
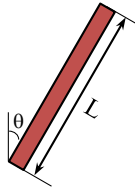
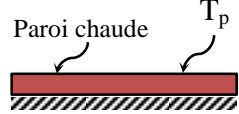
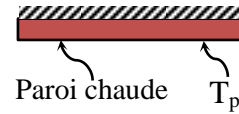
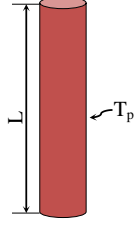
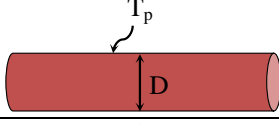
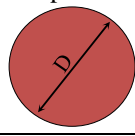
#### V.5.4 Sphère

Pour le cas d'une sphère, la corrélation ci-dessous est recommandée pour les fluides ayant :  $Pr \geq 0,7$  et  $Ra_D \leq 10^{11}$  :

$$\overline{Nu}_D = 2 + \frac{0,589 Ra_D^{1/4}}{\left[1 + (0,469/Pr)^{9/16}\right]^{4/9}} \quad (V.29)$$

**Remarque :** Lorsque  $Ra_D \rightarrow 0$ , l'équation V.29 se réduit à  $\overline{Nu}_D = 2$ , ce qui correspond au transfert de chaleur par conduction entre une surface sphérique et un milieu stationnaire infini.

**Tableau V.2 : Résumé des corrélations du nombre de Nusselt moyen pour la convection libre (naturelle) pour différentes géométries.**

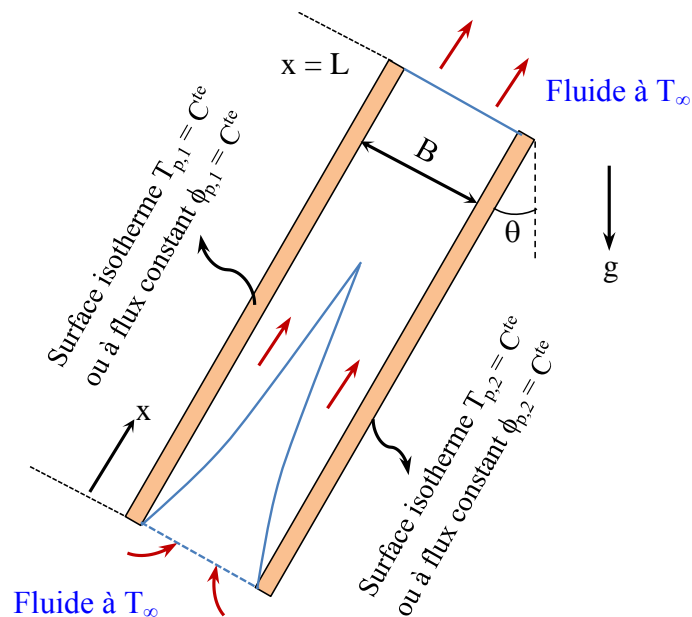
Géométrie	Longueur caractéristique	Nombre de Rayleigh	Corrélation du nombre de Nusselt moyen
<p>Plaque plane verticale</p> 	L	$10^4 - 10^9$ $10^9 - 10^{13}$ Rangée complète	$Nu = 0,59Ra_L^{1/4}$ $Nu = 0,1Ra_L^{1/3}$ $Nu = \left[ 0,825 + \frac{0,387Ra_L^{1/6}}{\left[ 1 + (0,492/Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right]^2$
<p>Plaque plane inclinée</p> 	L		Utiliser les équations de la plaque verticale pour la paroi supérieure d'une plaque froide et la paroi inférieure d'une plaque chaude. Remplacer 'g' par 'g.cosθ' pour $Ra < 10^9$
<p>Plaque plane horizontale (Surface A et périmètre p)</p> <p>a- Paroi supérieure d'une plaque chaude (ou paroi inférieure d'une plaque froide)</p>  <p>b- Paroi inférieure d'une plaque chaude (ou paroi supérieure d'une plaque froide)</p> 	A/P	$10^4 - 10^7$ $10^7 - 10^{11}$ $10^5 - 10^{11}$	$Nu = 0,54Ra_L^{1/4}$ $Nu = 0,1Ra_L^{1/3}$ $Nu = 0,27Ra_L^{1/4}$
<p>Cylindre vertical</p> 	L		Un cylindre vertical peut être traité comme une plaque plane verticale lorsque : $D \geq \frac{35L}{Gr_L^{1/4}}$
<p>Cylindre horizontal</p> 	D	$Ra_D \leq 10^{12}$	$Nu = \left[ 0,6 + \frac{0,387Ra_D^{1/6}}{\left[ 1 + (0,559/Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right]^2$
<p>Sphère</p> 	D	$Ra_D \leq 10^{11}$ $(Pr \geq 0,7)$	$Nu = 2 + \frac{0,589Ra_D^{1/4}}{\left[ 1 + (0,469/Pr)^{9/16} \right]^{4/9}}$

## V.6 Convection libre entre deux plaques planes parallèles

Il s'agit de plaques planes parallèles verticales (ou inclinées) qui sont ouvertes à l'air ambiant aux extrémités opposées (Figure V.8). Les plaques peuvent, par exemple, constituer un réseau d'ailettes utilisées pour améliorer le transfert de chaleur par convection libre à partir d'une surface de base à laquelle les ailettes sont fixées, ou ils peuvent constituer un réseau de cartes de circuits imprimés avec des composants électroniques dissipant la chaleur.

Pour les canaux verticaux ( $\theta = 0$ ), la force de flottabilité agit exclusivement pour induire un mouvement dans le sens du courant ( $x$ ) et, à partir de ' $x = 0$ ', des couches limites se développent sur chaque surface. Pour des canaux courts et/ou de grands espacements ( $L/B$  petits), un développement d'une couche limite indépendante se produit à chaque surface et les conditions correspondent à celles d'une plaque plane isolée dans un milieu infini et au repos. Pour ' $L/B$ ' élevés, les couches limites se développent sur des surfaces opposées et finissent par se fusionner pour donner un écoulement complètement développé.

Pour les canaux inclinés, il y a une composante de la force de flottabilité normale, et une autre parallèle à la direction du courant. Dans ce cas, les conditions peuvent être fortement influencées par le développement d'un écoulement secondaire tridimensionnel.



**Figure V.8 :** Convection libre entre deux plaques planes parallèles chauffées avec des extrémités exposées à un fluide au repos.

### V.6.1 Canaux verticaux

▪ **Plaques isothermes chauffées symétriquement :**

La corrélation semi-empirique suivante est utilisée :

$$\overline{Nu}_B = \frac{1}{24} Ra_B \left( \frac{B}{L} \right) \left\{ 1 - e^{-\frac{35}{Ra_B(B/L)}} \right\}^{3/4} \quad (V.30)$$

Où les nombres de *Nusselt* et *Rayleigh* moyens sont définis par :

$$\overline{Nu}_B = \left( \frac{\varphi/S}{T_p - T_\infty} \right) \frac{B}{\lambda} \quad (V.31)$$

$$Ra_B = \frac{g \beta (T_p - T_\infty) B^3}{\alpha \nu} \quad (V.32)$$

Cette corrélation a été développée pour l'air en tant que fluide de travail, elle est applicable pour :

$$10^{-1} \leq \frac{B}{L} Ra_B \leq 10^5$$

Dans la région complètement développée (pour  $B/L \rightarrow 0$ ), la corrélation devient:

$$\overline{Nu}_{B(RCD)} = \frac{1}{24} Ra_B \left( \frac{B}{L} \right) \quad (V.33)$$

Pour les conditions combinées correspondant aux plaques isothermes ( $T_{p,1}$  constante) et adiabatiques ( $\varphi_{p,2} = 0$ ), on a l'expression suivante pour la surface isotherme :

$$\overline{Nu}_{B(RCD)} = \frac{1}{12} Ra_B \left( \frac{B}{L} \right) \quad (V.34)$$

▪ **Plaques chauffées symétriquement par un flux de chaleur constant :**

Pour les surfaces ayant un flux de chaleur constant, on définit le nombre de Nusselt local par :

$$Nu_{B,L} = \left( \frac{\phi}{T_{p,L} - T_\infty} \right) \frac{B}{\lambda} \quad (V.35)$$

et le nombre de Rayleigh modifié par :

$$Ra_B^* = \frac{g \beta \phi_p B^4}{\lambda \alpha \nu} \quad (V.36)$$

Où ' $\phi$ ' est la densité de flux de chaleur et l'indice ' $L$ ' se réfère aux conditions à ' $x = L$ ' où la température de la plaque est un maximale.

Dans la région complètement développée on a :

- Pour les conditions symétriques avec un flux de chaleur constant :

$$Nu_{B,L(RCD)} = 0,144 \left[ Ra_B^* \left( \frac{B}{L} \right) \right]^{1/2} \quad (V.37)$$

- Pour des conditions non-symétriques avec une des surface adiabatique ( $\phi_{p,2} = 0$ ):

$$Nu_{B,L(RCD)} = 0,204 \left[ Ra_B^* \left( \frac{B}{L} \right) \right]^{1/2} \quad (V.38)$$

**Remarque :** Pour les corrélations précédentes, les propriétés du fluide sont évaluées à des températures moyennes :  $T_m = (T_p + T_\infty)/2$  pour les surfaces isothermes et  $T_m = (T_{p,L} + T_\infty)/2$  pour les surfaces à flux de chaleur constant.

### V.6.2 Canaux inclinés

Pour les canaux inclinés, la corrélation suivante peut être utilisée avec une erreur de  $\pm 10\%$  :

$$\bar{Nu}_B = 0,645 \left[ Ra_S \left( \frac{B}{L} \right) \right]^{1/4} \quad (V.39)$$

Cette corrélation est applicable pour des plaques isothermes symétriques et des plaques adiabatiques-isothermes et pour :

$$0 \leq \theta \leq 45^\circ \text{ et } Ra_S (B/L) > 200$$

## V.7 Cavités

### V.7.1 Cavités rectangulaires

Dans la cavité rectangulaire de la figure V.9, les deux parois opposées sont maintenues à des températures différentes ( $T_1 > T_2$ ), tandis que les parois qui restent sont adiabatiques. L'angle d'inclinaison ' $\theta$ ' entre les surfaces chauffées et refroidies et l'horizontale peut varier de  $0^\circ$  (cavité horizontale chauffée par le bas) à  $90^\circ$  (cavité verticale avec parois latérales chauffée) jusqu'à  $180^\circ$  (cavité horizontale chauffée par le haut).

La densité de flux de chaleur à travers la cavité s'exprime par :

$$\phi = h(T_1 - T_2) \quad (V.40)$$

Cette densité de flux de chaleur dépend fortement du rapport d'aspect 'H/L' et de l'angle d'inclinaison ' $\theta$ '. Pour les grandes valeurs du rapport 'b/L', la dépendance de la densité de flux de chaleur de 'b/L' est faible et peut être négligée.

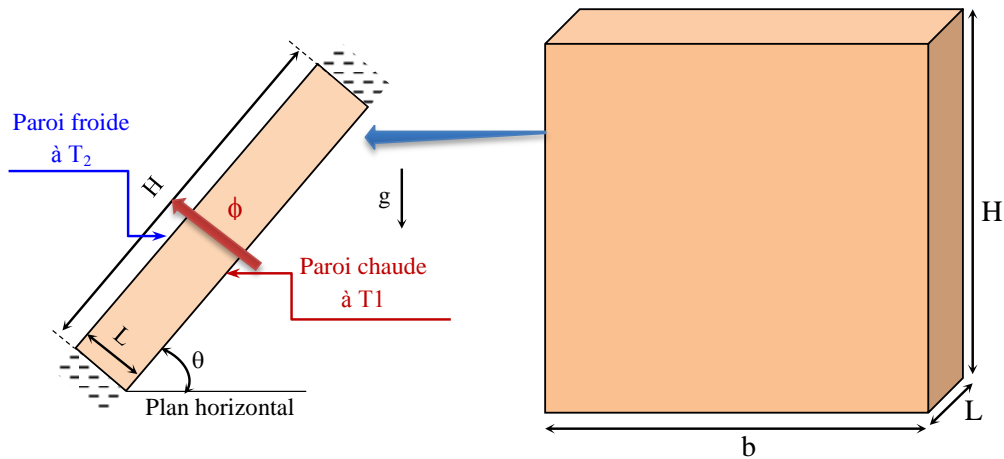
#### a- Cavité horizontale

Pour une cavité rectangulaire horizontale chauffée par le bas ( $\theta = 0$ ), on utilise la corrélation suivante :

$$\bar{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{\lambda} = 0,069Ra_L^{1/3} Pr^{0,074} \quad (V.41)$$

Cette corrélation est valable pour :  $3 \times 10^5 \leq Ra_L \leq 7 \times 10^9$

Toutes les propriétés du fluide sont évaluées à la température moyenne  $T_m = (T_1 + T_2)/2$ . Cette corrélation s'applique pour des valeurs de ' $L/H$ ' suffisamment faibles afin d'assurer un effet négligeable des parois latérales.

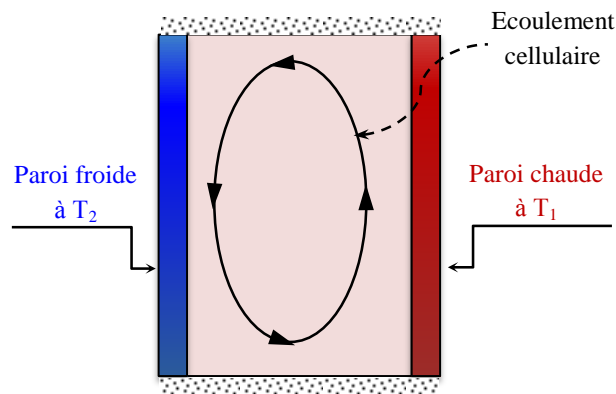


**Figure V.9 :** Convection libre dans une cavité rectangulaire

**Remarque :** En l'absence de rayonnement, pour le chauffage par le haut ( $\theta = 180^\circ$ ), le transfert de chaleur de la paroi supérieure vers la paroi inférieure se fait exclusivement par conduction ( $Nu_L = 1$ ), indépendamment de la valeur de ' $Ra_L$ '

**b- Cavité verticale**

Dans la cavité rectangulaire verticale ( $\theta = 90^\circ$ ), les parois verticales sont chauffées et refroidies, tandis que les parois horizontales sont adiabatiques. Le mouvement du fluide est caractérisé par un écoulement cellulaire pour lequel le fluide monte le long de la paroi chaude et descend le long de la paroi froide (figure V.10).



**Figure V.10 :** Ecoulement cellulaire dans une cavité verticale.



- Pour les rapports d'aspect  $1 \leq H/L \leq 10$  :

$$\bar{N}u_L = 0,22 \left( \frac{Pr}{0,2+Pr} Ra_L \right)^{0,28} \left( \frac{H}{L} \right)^{-1/4} \quad (V.42)$$

Cette corrélation est valable pour :

$$\begin{cases} 2 \leq \frac{H}{L} \leq 10 \\ Pr \leq 10^5 \\ 10^3 \leq Ra_L \leq 10^{10} \end{cases}$$

- Pour les rapports d'aspect  $H/L$  plus grand:

$$\bar{N}u_L = 0,42 Ra_L^{1/4} Pr^{0,012} \left( \frac{H}{L} \right)^{-0,3} \quad (V.43)$$

Cette corrélation est valable pour :

$$\begin{cases} 1 \leq \frac{H}{L} \leq 40 \\ 1 \leq Pr \leq 2 \times 10^4 \\ 10^4 \leq Ra_L \leq 10^7 \end{cases}$$

### *c- Cavité inclinée*

Pour la convection libre dans les cavités inclinées (tels que les capteurs solaires plans), les corrélations dépendent de l'angle d'inclinaison critique  $\theta^*$ .

- Pour les angles d'inclinaison inférieurs à la valeur critique  $\theta^*$ , donnée dans le tableau V.3, on utilise pour les rapports d'aspect élevés ( $H/L \geq 12$ ) la corrélation suivante :

$$\bar{N}u_L = 1 + 1,44 \left[ 1 - \frac{1708}{Ra_L \cos \theta} \right]^* \left[ 1 - \frac{1708 (\sin 1,8\theta)^{1,6}}{Ra_L \cos \theta} \right] + \left[ \left( \frac{Ra_L \cos \theta}{5830} \right)^{1/3} - 1 \right]^* \quad (V.44)$$

Cette corrélation est valable pour :

$$\begin{cases} \frac{H}{L} \geq 12 \\ 0 < \theta \leq \theta^* \end{cases}$$

La notation  $[ ]^*$  implique que, si la quantité entre crochets est négative, elle doit être mise à zéro. Ceci est dû au fait que, si le nombre de Rayleigh est inférieur à une valeur critique  $Ra_{L,c} = 1708 / \cos \theta$ , il n'y a pas d'écoulement à l'intérieur de la cavité.

Pour les faibles rapports d'aspect on utilise la corrélation suivante :

$$\bar{Nu}_L = \bar{Nu}_L(\theta = 0) \left[ \frac{\bar{Nu}_L(\theta = 90^\circ)}{\bar{Nu}_L(\theta = 0)} \right]^{\theta/\theta^*} (\sin \theta^*)^{\theta/4\theta^*} \quad (V.45)$$

Cette corrélation est valable pour :

$$\begin{cases} \frac{H}{L} \leq 12 \\ 0 < \theta \leq \theta^* \end{cases}$$

- Pour les angles d'inclinaison supérieurs à la valeur critique  $\theta^*$ , les corrélations suivantes sont utilisables pour tous les rapports d'aspect (H/L) :

$$\bar{Nu}_L = \bar{Nu}_L(\theta = 90^\circ) (\sin \theta)^{1/4} \quad \theta^* \leq \theta < 90^\circ \quad (V.46)$$

$$\bar{Nu}_L = 1 + [\bar{Nu}_L(\theta = 90^\circ) - 1] \sin \theta \quad 90^\circ < \theta < 180^\circ \quad (V.47)$$

**Tableau V.3 : Angle critique pour les cavités rectangulaires inclinées**

<b>H/L</b>	1	3	6	12	> 12
<b><math>\theta^*</math></b>	25°	53°	60°	67°	70°

### V.7.2 Cylindres concentriques

Il s'agit de la convection libre dans l'espace annulaire entre deux longs cylindres horizontaux coaxiaux (figure V.11). L'écoulement dans la région annulaire est caractérisé par deux cellules symétriques par rapport au plan médian vertical.

Si le cylindre intérieur est chauffé et le cylindre extérieur est refroidi ( $T_i > T_e$ ), le fluide monte et descend le long des cylindres intérieur et extérieur, respectivement. Si par contre ( $T_i < T_e$ ), les écoulements cellulaires sont inversés.

Le flux de chaleur entre les deux cylindres de longueur L est donné par :

$$\varphi = \frac{T_i - T_e}{\ln(r_e/r_i)} \frac{2\pi L \lambda_{eff}}{\quad} \quad (V.48)$$

Avec ' $\lambda_{eff}$ ' la conductivité thermique effective donnée par la corrélation suivante :

$$\lambda_{eff} = 0,386 \lambda \left( \frac{Pr}{0,861 + Pr} \right)^{1/4} Ra_c^{1/4} \quad (V.49)$$

Cette corrélation est applicable pour :  $0,7 \leq Pr \leq 6000$  et  $Ra_c \leq 10^7$

Où  $Ra_c$  est calculé avec la longueur caractéristique  $L_c$  donnée par :

$$L_c = \frac{2 \left[ \ln(r_e/r_i) \right]^{4/3}}{\left( r_i^{-3/5} + r_e^{-3/5} \right)^{5/3}} \quad (\text{V.50})$$

Les propriétés du fluide sont évaluées à la température moyenne  $T_m = (T_i + T_e)/2$

### V.7.2 Sphères concentriques

Pour le cas des sphères concentriques, le flux de chaleur se calcule par :

$$\varphi = \frac{T_i - T_e}{\frac{(1/r_i) - (1/r_e)}{4\pi\lambda_{eff}}} \quad (\text{V.51})$$

Avec ' $\lambda_{eff}$ ' la conductivité thermique effective donnée par la corrélation suivante :

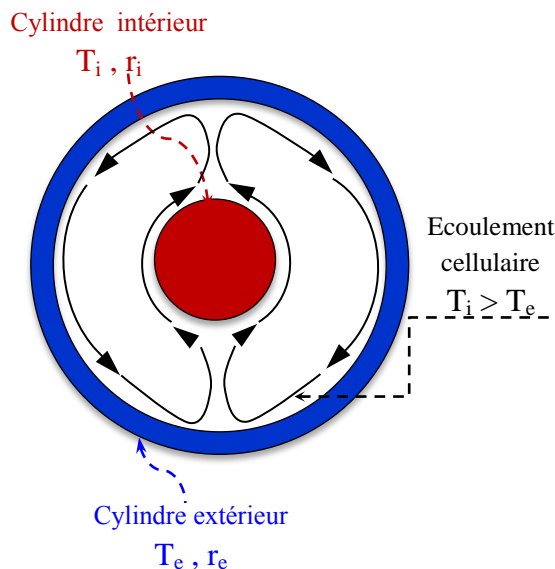
$$\lambda_{eff} = 0,74 \lambda \left( \frac{Pr}{0,861 + Pr} \right)^{1/4} Ra_s^{1/4} \quad (\text{V.52})$$

Cette corrélation est applicable pour :  $0,7 \leq Pr \leq 4000$  et  $Ra_s \leq 10^4$

Où  $Ra_s$  est calculé avec la longueur caractéristique  $L_s$  donnée par :

$$L_s = \frac{\left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e} \right)^{4/3}}{2^{1/3} \left( r_i^{-7/5} + r_e^{-7/5} \right)^{5/3}} \quad (\text{V.53})$$

Les propriétés du fluide sont évaluées à la température moyenne  $T_m = (T_i + T_e)/2$



**Figure V.11 :** Convection libre dans l'espace annulaire entre deux longs cylindres horizontaux concentriques ou entre deux sphères concentriques de rayons intérieur  $r_i$  et extérieur  $r_e$ .

**Remarque :** Puisque le flux de chaleur convectif minimum entre les cylindres ou les sphères concentriques ne doit pas descendre en dessous du flux de chaleur par conduction, alors si la

valeur de  $\lambda_{\text{eff}}$  calculée par les équations V.49 et V.52 est inférieure à  $\lambda$  ( $\lambda_{\text{eff}}/\lambda < 1$ ) on pose ( $\lambda_{\text{eff}} = \lambda$ ).

### V.8 Convection mixte, forcée et libre

Lorsque nous avons étudié la convection forcée, nous avons ignoré les effets de la convection libre. De même, nous avons supposé que la convection forcée était négligeable en traitant la convection libre. En réalité, il existe des situations où les effets des deux types de convection libre et forcée sont comparables, dans ce cas il est inapproprié de négliger l'une ou l'autre de ces convections. En effet :

- La convection libre est négligeable si  $(Gr_L / Re_L^2) \ll 1$ .
- La convection forcée est négligeable si  $(Gr_L / Re_L^2) \gg 1$ .
- La convection mixte (convection libre et forcée) est obtenue pour :  $(Gr_L / Re_L^2) \approx 1$ .

L'effet de la force de flottabilité sur le transfert de chaleur dans une convection forcée est fortement influencé par la direction de cette force par rapport à la direction de l'écoulement. Trois cas particuliers existent correspondant aux mouvements induits par la force flottabilité et aux mouvements forcés :

- 1- Mouvements ayant les mêmes directions (Ecoulement d'aide ou assistant). Exemple : mouvement de convection forcée vers le haut sur une plaque verticale chaude.
- 2- Mouvements ayant des directions opposées (Ecoulement opposé). Exemple : mouvement de convection forcée vers le bas sur une plaque verticale chaude.
- 3- Mouvements ayant des directions perpendiculaires (Ecoulement transversal). Exemple : mouvement de convection forcée horizontal sur un cylindre chaud, une sphère ou une plaque horizontale.

Dans l'écoulement d'aide (ou d'assistance) et l'écoulement transversal, la force de flottabilité fait augmenter le taux de transfert de chaleur associé à la convection forcée pure. Par contre pour l'écoulement opposé, la force de flottabilité agit pour diminuer ce taux de transfert de chaleur.

Les corrélations utilisées pour le transfert de chaleur par convection mixte pour les écoulements externes et internes sont de la forme :

$$Nu^n = Nu_F^n \pm Nu_N^n \quad (\text{V.54})$$

- Les nombres de Nusselt  $Nu_F$  et  $Nu_N$  sont déterminés à partir des corrélations existantes pour la convection forcée pure et naturelle (libre) pure, respectivement.

- Le signe ‘+’ s'applique aux écoulements d'aides et transversaux, tandis que le signe ‘-’ s'applique aux écoulements opposés.
- La meilleure corrélation est souvent obtenue pour  $n = 3$ , bien que  $n = 3,5$  est mieux adaptées aux écoulements transversaux impliquant des plaques horizontales et  $n = 4$  aux écoulements transversaux impliquant des cylindres (ou sphères).

**Remarque** : Il faut noter que, bien que les effets de la force de flottabilité puissent améliorer le transfert de chaleur pour les écoulements de convection forcée laminaire, l'amélioration est généralement négligeable si la convection forcée est turbulente.

## Références bibliographiques

- [1] Fundamentals of Heat and Mass Transfer. Theodore L. Bergman, Frank P. Incropera, David P. DeWitt, Adrienne S. Lavine. John Wiley & Sons, 2011.
- [2] Heat Transfer A Practical Approach. Yunus A. Çengel. McGraw-Hill, 2002.
- [3] Heat and Mass Transfer. Frank Kreith et al. CRC Press LLC, 1999.
- [4] Initiation aux Transferts Thermiques. J.F. SACADURA. Edition Tec & Doc, 2009.
- [5] Principles of Heat Transfer. Mc. ADAMS. Mc GRAW-HILL, 1989.
- [6] Introduction aux transferts d'énergie, cours et exercices d'application. Jean Taine, Franck Enguehard, Estelle Lacona. Dunod, 2014.
- [7] Introduction aux transferts thermiques, cours et exercices corrigés, Jean-Luc Battaglia, Andrzej Kusiak, Jean-Rodolphe Puiggali. Dunod, 2010.
- [8] Heat and Mass Transfer: Fundamentals and Applications. Yunus A. Cengel and F. Ghajar. McGraw-Hill, 2014.
- [9] Heat conduction. Özisik M. N. John Wiley & Sons Inc., 1993.
- [10] Transferts thermique. Yves Jannot, Edilivre 2014.