

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ MOSTAFA BEN BOULAID BATNA II

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
LABORATOIRE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET
APPLICATIONS
LEDPA

COURS destiné aux Etudiants de Master 1, EDP et Applications

INTITULÉ :

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES :
Etude Qualitative

RÉALISÉ PAR :
MEDDOUR HALIMA

Année Universitaire
2019-2020

TABLE DES MATIÈRES

GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

1.1 DÉFINITIONS

Introduisons ici quelques définitions essentielles concernant les équations différentielles ordinaires, qui seront utiles pour la suite de ce cours.

1.1.1 Différents types d'équations

Une équation différentielle ordinaire, également notée "EDO" d'ordre n est une relation sous la forme :

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0 \quad (1.1.1)$$

où :

t : une variable réelle appartenant à un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x : I &\longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ t &\longmapsto x(t) \end{aligned}$$

une fonction inconnue définie sur $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans une domaine ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), admettant des dérivées jusqu'à l'ordre n , c'est à dire $x^{(n)}(t) = \frac{d^n x}{dt^n}(t)$

Remarque. On rappelle ici que :

(a) Une "EDO" d'ordre 1 est une relation de la forme :

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0$$

ou encore :

$$x'(t) = \frac{d}{dt}x(t) = F(t, x(t)) \quad (1.1.2)$$

ici

$$\begin{aligned} F : I \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (t, x) &\longmapsto F(t, x) \end{aligned}$$

où $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de \mathbb{R} , Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$
c'est dire on peut écrire :

$$x(t) = (x_1(t), x_2, \dots, x_N(t))$$

et

$$F(t, x(t)) = (F_1(t, x_1, \dots, x_N), \dots, F_N(t, x_1, \dots, x_N))$$

Alors l'EDO (1.1.2) peut s'écrire encore sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1(t) = F_1(t, x_1(t), \dots, x_N(t)) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{d}{dt}x_N(t) = F_N(t, x_1(t), \dots, x_N(t)) \end{cases} \quad (1.1.3)$$

On parle donc dans la formule (1.1.3) d'un système d'EDO d'ordre 1.

(b) Si $N = 1$, la fonction F est donc une fonction scalaire, c'est à dire

$$\begin{aligned} F : I \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto F(t, x) \end{aligned}$$

où $I \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} x : I &\longrightarrow \Omega \\ t &\longmapsto x(t) \end{aligned}$$

Définition 1.1.1. On appelle équation différentielle ordinaire normale d'ordre n toute équation sous la forme :

$$x^{(n)}(t) = F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \quad (1.1.4)$$

Définition 1.1.2. On appelle EDO autonome toute équation de la forme :

$$x^{(n)}(t) = F(x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \quad (1.1.5)$$

c'est à dire F ne dépend pas explicitement de la variable t .

Une EDO d'ordre un autonome s'écrit :

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(x(t)) \quad (1.1.6)$$

Remarque. Pour une EDO d'ordre 1 non autonome on peut toujours se ramener par une astuce à une équation autonome. En effet, il suffit de considérer l'équation étendue :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(t, x(t)) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.1.7)$$

Cette approche, parfois utile et malgré tout elle reste artificielle.

1.1.2 Notion de solution

Définition 1.1.3. "Solution"

On appelle solution d'une EDO d'ordre n (1.1.4) sur un certain intervalle I , toute fonction x définie sur cet intervalle I et qui vérifie l'équation (1.1.4)

Définition 1.1.4. "Courbe intégrale, orbite ou trajectoire"

On appelle courbe intégrale ou orbite d'une solution $x(t)$ de l'EDO (1.1.4), l'ensemble suivant :

$$\Theta = \{(t, x(t)) : t \in I, x(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^N\}$$

(Cet ensemble appartenant à \mathbb{R}^{N+1}).

Remarque. Si $N = 2$, alors une courbe intégrale Θ est un ensemble de \mathbb{R}^3 . D'où un point $M \in \Theta$ est de coordonnées $x = x_1(t), y = x_2(t)$ et $Z = t$.

1.1.3 Réduction à l'ordre un

Considérons l'EDO d'ordre n (1.1.4)

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$$

où $x(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}$. On effectuons le changement $Z = (x, x', \dots, x^{(n-1)})$ et on note $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$, on se retrouve alors avec des relations entre les Z_i , c'est à dire

$$\begin{cases} Z_1 = x \\ Z_2 = x' = Z_1' \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_n = x^{(n-1)} = Z_{n-1} \end{cases} \quad (1.1.8)$$

et donc

$$Z'(t) = F(t, Z_1, Z_2, \dots, Z_n, Z_n') \quad (1.1.9)$$

l'équation obtenue (1.1.9) est donc une EDO d'ordre 1.

Remarque. Le long de ce cours, notre étude sera destinée seulement aux des EDO d'ordre un.

1.2 PROBLÈME DE CAUCHY

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1. Problème de Cauchy Toute EDO d'ordre 1 (1.1.6) muni d'une condition initiale sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2.1)$$

où $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, est appelée problème de Cauchy

Remarque. Résoudre le problème de Cauchy (1.2.1) "localement" revient à trouver un intervalle $I_0 \subset I$ contenant t_0 (c'est à dire $t_0 \in I_0 \subset I$), et une fonction

$$\begin{aligned} \Phi : I_0 \subset I &\longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ t &\longmapsto \Phi(t) \end{aligned}$$

de classe C^1 sur I_0 vérifiant :

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = F(t, \Phi(t)) \text{ et } \Phi(t_0) = \Phi_0.$$

Remarque. L'orbite (ou courbe intégrale) de la solution Φ du (1.2.1) est donc l'ensemble des points :

$$\Theta = \{(t, \Phi(t)); t \in I_0, \Phi(t) \in \Omega\}$$

1.2.2 Quelques exemples types

Plusieurs modèles en physique, que se soit de la mécanique, électricité, chimie,...etc s'expriment à l'aide des "EDO".

Citons l'équation de la mécanique des points matériels :

Exemple 1 : Équation de Newton

Dans la mécanique des points matériels, une particule est un point dans l'espace \mathbb{R}^3 dont sa position est donnée par une fonction

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \end{aligned}$$

la variation de x (c'est à dire la dérivée) dex par rapport à la variable t "qui signifie le temps" est appelé la vitesse de la particule ,notée :

$$v = x'(t) \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

et la dérivée de la vitesse de la particule est dite l'accélération .

$$\gamma(t) = v'(t) = \frac{d}{dt}v(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Dans ce modèle la particule bouge (se déplace) sur l'effet d'un champ de force extérieure $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ agissant sur la particule à la position x .

D'après la loi de Newton à chaque point x de l'espace \mathbb{R}^3 , la force agissant sur la particule \vec{f} égale à l'accélération produit la masse de la particule, c'est à dire

$$m \cdot \vec{\gamma} = \vec{f}$$

Or que

$$\gamma(t) = v'(t) = \frac{d}{dt}(x'(t)) = x''(t)$$

il vient que

$$m \cdot x''(t) = f(x(t))$$

ou bien

$$x''(t) = \frac{1}{m}f(x(t))$$

On obtient donc un EDO d'ordre 2 à la variable t et d'inconnue x , ou un système d'EDO d'ordre un. En effet, si on pose

$$\begin{aligned} x'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= \frac{1}{m}f(x(t)) \end{aligned}$$

et si on pose

$$X(t) = \begin{cases} x(t) \\ v(t) \end{cases}$$

on obtient

$$F(t, X(t)) = \begin{cases} v(t) \\ \frac{1}{m}f(x(t)) \end{cases}$$

D'où on aura une EDO d'ordre 1 :

$$\frac{d}{dt}X(t) = F(t, X(t))$$

ici

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

et

$$F(t, X(t)) = \begin{pmatrix} v(t) \\ \frac{1}{m}f(x(t)) \end{pmatrix}$$

Exemple 2

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = x(t), t > 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

une intégrale sur $[0, t]$ nous mène à

$$\int_0^t \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int_0^t 1 dt$$

d'où

$$\ln x(t) - \ln x(0) = t$$

mais $x(0) = 1$ d'où $\ln x(t) = t$ et donc $x(t) = e^t$.

Ici on a une solution est la fonction

$$x(t) = e^t$$

et l'orbite associé à ce problème est

$$\Theta = \{x(t) \in \Omega : t \in I\}$$

$\Omega = \mathbb{R}, I = \mathbb{R}_+$ alors

$$\Theta = \{e^t, t \in \mathbb{R}_+\}$$

d'où

$$\Theta = \mathbb{R}_+^*$$

Exemple 3 : Thermodynamique

Considérons un corps ponctuel de masse m et de température interne T situé dans un environnement de température constante T_e , le transfert de la chaleur entre le corps et l'extérieur peut être décrit par la loi de Stefan-Boltzmann :

$$v(t) = \sigma \gamma s (T^4(t) - T_e^4)$$

ici t : la variable de temps .

σ : une constante dite (de Boltzmann).

γ : la constante d'émissivité du corps .

s : la surface du corps .

v : la vitesse de transfert de la chaleur.

Le taux de variation de l'énergie :

$$E(t) = mCT(t)$$

(ici C est la capacité calorifique du corps) égale, en valeur absolue à la vitesse v , c'est à dire $|E(t)| = v(t)$

Par conséquent, si on pose $T(0) = T_0$ le calcul de la température $T(t)$ nécessite la résolution de l'EDO :

$$T'(t) = -\frac{v(t)}{mC}$$

Remarque. Vous pouvez voir aussi les exemples types du circuits électrique, dynamique des populations, Loi de Hooke (par exemple une corde de guitare quand elle est pincée ou une corde de piano sous l'effet du marteau ...etc).

1.2.3 Questions

I y a très peu d'équations différentielles dont on connaît explicitement les solutions, pour cela nous allons dans ce cours s'intéresser à l'existence, l'unicité et à la dépendance des solutions par rapport aux " conditions initiales " :

Sous quelles conditions un problème d'équations différentielles ordinaires est bien posé ? c'est à dire

- Les équations admettent-elles une solution ?
- Cette solution est-elle unique ?
- Cette solution dépend-elle continûment des "données initiales" ?

1.2.4 Résolution des équations différentielles

Dans ce cours, on va s'intéresser à l'existence, à l'unicité et à la dépendance des solutions par rapport aux "conditions initiales" $u(t_0) = u_0$.

On verra des résultats essentiellement théoriques, car il y a très peu d'EDO dont on connaît explicitement les solutions, en dehors des équations linéaires à coefficients constantes (dont les solutions s'expriment à l'aide de l'exponentielle de matrice) et des équations scalaire d'ordre 1 autonomes (dont le calcul des solutions se ramène à un calcul de primitive).

Un lemme indispensable

La théorie des équations différentielles utilise abondamment le lemme de Gronwall. Nous allons le rappeler sous forme intégrale et différentielle.

Lemme 1.2.2. Soient $u, v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues, telle qu'il existe $c > 0$:

$$u(t) \leq c + \int_0^t u(\tau)v(\tau)d\tau; \forall t \in [0, T]$$

Alors

$$u(t) \leq ce^{\int_0^t v(\tau)d\tau}; \forall t \in [0, T]$$

Preuve Posons

$$f(t) = c + \int_0^t u(\tau)v(\tau)d\tau, c > 0$$

$$g(t) = ce^{\int_0^t v(\tau)d\tau}, c > 0$$

On veut démontrer que $f(t) \leq g(t), \forall t \in [0, T]$

Or que $g(t) > 0$ car $c > 0$ et $u, v > 0$ et de plus $f(0) = g(0) = c$.

Il suffit donc de prouver que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{f(t)}{g(t)} \right) \leq 0$$

.

En effet, on a :

$$f'(t) = u(t)v(t) \leq f(t)v(t)$$

par hypothèse

$$u(t) \leq c + \underbrace{\int_0^t u(\tau)v(\tau)d\tau}_{f(t)}, \forall t \in [0, T]$$

,

de plus

$$g'(t) = cv(t)e^{\int_0^t v(\tau)d\tau} = g(t)v(t)$$

donc

$$f'(t)g(t) - f(t)g'(t) \leq f(t)v(t)g(t) - f(t)g(t)v(t) = 0$$

et par suite

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{f(t)}{g(t)} \right) \leq 0.$$

On aboutit alors

$$\frac{f(t)}{g(t)} \leq \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{c}{c} = 1$$

Et en fin

$$f(t) \leq g(t), \forall t \in [0, T]$$

Lemme 1.2.3. Lemme de Gronwall " Forme Différentielle "

Soit $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue, dérivable sur $[0, T]$. Soit $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que :

$$\frac{d}{dt} u(t) \leq v(t)u(t), \forall t \in [0, T]$$

Alors

$$u(t) \leq u(0)e^{\int_0^t v(\tau)d\tau}, \forall t \in [0, T]$$

Preuve :

Il suffit d'écrire

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(\tau)d\tau$$

d'où

$$u(t) \leq u(0) + \int_0^t u(\tau)v(\tau)d\tau$$

et d'après le Lemme précédent (Lemme (1.2.2) de Gronwall); on trouve que

$$u(t) \leq u(0)e^{\int_0^t v(\tau)d\tau}, \forall t \in [0, T]$$

Lemme 1.2.4. Lemme de Gronwall " Version Générale "

Soient $u, v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues et soit $c : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue (à valeur dans \mathbb{R}) telle que :

$$u(t) \leq c(t) + \int_0^t u(\tau)v(\tau)d\tau; \forall t \in [0, T]$$

Alors

$$u(t) \leq c(t)e^{\int_0^t v(\tau)d\tau}; \forall t \in [0, T]$$

 PROBLÈME DE CAUCHY GÉNÉRAL

2.1 INTRODUCTION

Soit Ω un ouvert connexe non vide d'un espace de Banach X sur le corps des réels \mathbb{R} , Soit aussi I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $F : I \times \Omega \longrightarrow X$ une fonction continue .

Définition 2.1.1. On appelle solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(t, x(t)) \quad (1)$$

une fonction x de classe C^1 sur un intervalle $J \subset I$ à valeurs dans Ω , dont la dérivée vérifie, pour tout $t \in J$:

$$x'(t) = F(t, x(t))$$

Définition 2.1.2. On appelle la condition initiale une égalité de la forme :

$$x(t_0) = x_0$$

avec $t_0 \in I, x_0 \in U$

Définition 2.1.3. On appelle problème de Cauchy, le système d'équation :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = F(t, x(t)), t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2)$$

- Remarque.**
1. Résoudre (localement) le problème de Cauchy(2), revient à trouver un intervalle $J \subset I$ contenant t_0 et une fonction x de classe C^1 sur J satisfaisant (2) .
 2. Lorsque F est "seulement" continue et l'espace X est de dimension infinie , on peut rien dire concernant la résolution du problème de Cauchy (2) .
 3. Lorsque F est continue et X de dimension finie, le théorème d'Arzela-Peano affirme que le système de Cauchy (2) admet au moins une solution, pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, mais il n'y a pas unicité en générale .

On suppose dans La suite un peu plus de régularité sur F , de sorte que l'on ait à la fois existence et unicité de solutions locales, puis on traite le cas où F est seulement continue. De plus, on prend l'espace $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

2.2 THÉORIE LOCALE

Dans cette partie, on cherche à résoudre le problème de Cauchy dans un petit intervalle autour du temps initiale t_0 .

Ici, on prend l'espace $X = \mathbb{R}^n, n \geq 1$, Ω un ouvert de \mathbb{R}^n non vide et $F : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction connue supposée régulière. Le problème de Cauchy est donné par :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = F(t, x(t)), (t, x) \in I \times \Omega \\ x(t_0) = x_0, t_0 \in I \end{cases} \quad (3)$$

où $x(\cdot)$ une fonction inconnue de I à valeurs dans Ω .

Définition 2.2.1. On dit que la fonction $F : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable x si :

pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe un voisinage V de (t_0, x_0) et $c > 0$ tels que :

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|; \forall (t, x_i) \in V, i = \overline{1, 2}$$

(ici $\|\cdot\|$ désigne une norme de \mathbb{R}^n)

Remarque. Il est parfois difficile de vérifier la propriété de "Localement-Lipschitzienne" d'une fonction donnée. Pour cela, on va aborder le critère efficace suivant :

Proposition 2.2.2. Soit U un convexe de $I \times \Omega$ ou de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Alors toute fonction F de classe C^1 sur le convexe U est localement lipschitzienne.

On commence par une situation modèle qui va nous permettre de préciser la taille de l'intervalle d'existence J de la solution. Plus précisément on a :

2.2.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz précisé

Théorème 2.2.3. "Théorème de Cauchy-Lipschitz précisé"

Soient a, b deux réels positifs et (t_0, x_0) un point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Posons :

(h.1)

$$Q = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}$$

(dit cylindre de sécurité) dans lequel F est borné et aussi localement lipschitzienne.

(h.2) Supposons que $F : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie :

$$\exists M > 0 : \|F(t, x)\| \leq M; \forall (t, x) \in Q$$

(h.3) et qu'il existe $c > 0$ telle que :

$$\|F(t, x) - F(t, y)\| \leq c\|x - y\|; \forall (t, x), (t, y) \in Q$$

Sous les conditions (h.1), (h.2), (h.3) le problème de Cauchy (3) admet une unique solution $x(\cdot)$ définie sur un intervalle J telles qu'on ait :

- $J = [t_0 - T, t_0 + T]$ avec $T = \min(a, \frac{b}{M})$
- $x(t_0) = x_0$
- $(s, x(s)) \in Q; \forall s \in J$

Ce théorème permet de trouver le résultat suivant :

Corollaire 2.2.4. "Cauchy-Lipschitz"

Soit $F : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Pour tout point $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ il existe une solution unique de l'équation (3) dans un voisinage de t_0 telle que $x(t_0) = x_0$.

Avant de prouver ces résultats, faisons quelques remarques utiles :

Remarque. 1. La précision du temps d'existence de la solution donnée par le théorème (2.2.2) est intéressante. Supposons par exemple qu'on a une suite de fonction (F_ϵ) telle que

$$\|F_\epsilon(t, x)\| \leq M; \forall (t, x) \in Q, \forall \epsilon > 0$$

Pour chaque ϵ on a une solution x_ϵ du problème (3). Le théorème (2.2.2) de Cauchy-Lipschitz nous dit que l'intervalle d'existence de x_ϵ est indépendant de ϵ , en particulier il ne se change pas lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

2. On voit aussi que ce temps d'existence ne dépend pas de la constante de Lipschitz de F .
3. Nous allons voir que le temps T donné dans le théorème (2.2.2) est assez bon en générale.
4. L'intérêt du cylindre de sécurité Q dans lequel F est bornée et localement lipschitzienne sera notamment d'empêcher la solution construite de sortir du domaine $I \times \Omega$ de définition de F .

On va tester le cylindre de sécurité dans l'exemple suivant :

Exemple 1 Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = (x(t))^2; t \geq 0 \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases} \quad (4)$$

On veut calculer le vrai intervalle d'existence.

En effet, comme $x'(t) \geq 0$ et $x_0 > 0$ on aura $x(t) > 0, \forall t \geq 0$

de sorte que (4) peut s'écrire $\frac{x'(t)}{x^2(t)} = 1$

d'où, en intégrant entre 0 et t :

$$t = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} < \frac{1}{x_0} \quad (5)$$

et

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}; t < \frac{1}{x_0} \quad (6)$$

La fonction $x(\cdot)$ ci-dessus est la solution du problème (4) dans $[0, \frac{1}{x_0}[$.

En fait (6) définit une fonction de classe C^1 sur $] -\infty, \frac{1}{x_0}[$ que l'on vérifie aisément être la solution de (4).

Que dit le théorème (2.2.2) ?

Nous allons voir que $T = \frac{1}{4x_0}$. En effet, prenons $a = \frac{1}{4x_0}, b = x_0$ c'est à dire

$$Q = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t| \leq \frac{1}{4x_0}, |x - x_0| \leq x_0\}$$

et $F(x) = x^2$. Alors :

$$\begin{cases} |F(x)| = x^2 \leq (x_0 + (x - x_0))^2 \leq 4x_0^2, & M = 4x_0^2 \\ \forall x \in Q \end{cases}$$

Donc

$$T = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \min\left(\frac{1}{4x_0}, \frac{x_0}{4x_0^2}\right) = \frac{1}{4x_0}$$

Exercice 1 : Tester le théorème (2.2.2) sur le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = (x(t))^{2k}; t \geq 0 \\ x(0) = x_0 > 0, k \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad (7)$$

- Revenons à la preuve des résultats :

Preuve du corollaire (2.2.2) Soit $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. Ils existent a et b positifs tels que :

$$Q = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \geq b \subseteq V_{(t_0, x_0)} = V\}$$

où V est le voisinage de (t_0, x_0) dans lequel F est lipschitzienne par rapport à x .

Comme F est continue sur $I \times \Omega$ alors elle est bornée sur Q par $M > 0$.

D'où les conditions (h.2) et (h.3) du théorème (2.2.2) sont satisfaites. Il suffit donc d'appliquer le théorème (2.2.2) de Cauchy-Lipschitz précisé.

Preuve du théorème (2.2.2) "Cauchy-Lipschitz" Soit $T = \min(a, \frac{b}{M})$, définissons la suite de fonctions $x_k(\cdot)$ par :

$$\begin{cases} x_0(t) \equiv x_0 \\ x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, x_{k-1}(s)) ds; k \geq 1, |t - t_0| \leq T \end{cases} \quad (8)$$

Point a) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $|s - t_0| \leq T$ on ait : $(s, x_k(s)) \in Q$.

Par récurrence sur k :

Pour $k = 0$: $(t_0, x_0) \in Q$ c'est vrai.

Supposons que la relation est vraie pour $k - 1$ c'est à dire : $(s, x_{k-1}(s)) \in Q$, alors :

$$\begin{aligned} \|x_k(t) - x_0\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|F(s, x_{k-1}(s))\| ds \right| \\ \|x_k(t) - x_0\| &\leq M \int_{t_0}^t ds \|x_k(t) - x_0\| = M|t - t_0| \\ \|x_k(t) - x_0\| &\leq M \cdot T \\ \|x_k(t) - x_0\| &\leq M \cdot \frac{b}{M} \\ \|x_k(t) - x_0\| &\leq b \end{aligned} \quad (9)$$

D'où $(t, x_k(t)) \in Q$

Point b) On a :

$$\|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| \leq M \frac{c^{k-1} |t - t_0|^k}{k!}; \forall t : |t - t_0| \leq T \quad (10)$$

Cela est vraie pour $k = 1$, d'après la relation (9).

Supposons la relation (10) est vraie pour l'indice $k - 1$. Alors d'après (h.3) "c'est à dire F est localement lipschitzienne " on a :

$$\begin{aligned} \|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|F(s, x_{k-1}(s)) - F(s, x_{k-2}(s))\| ds \right| \\ &\leq C \left| \int_{t_0}^t \|x_{k-1}(s) - x_{k-2}(s)\| ds \right| \\ &\leq C \left| \int_{t_0}^t M \cdot C^{k-2} \frac{|s - t_0|^k}{(k-1)!} ds \right| \\ &\leq M \cdot C^{k-1} \frac{|t - t_0|^k}{k!} \end{aligned}$$

C'est à dire la relation (10) est vérifiée.

Point c) On déduit de (10) que pour tout t tel que $|t - t_0| \leq T$:

$$\|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| \leq M \cdot c^{k-1} \frac{T^k}{k!}$$

c'est à dire

$$\|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| \leq \frac{M (CT)^k}{C k!}$$

Sachant que la série de terme général $\frac{(CT)^k}{k!}$ est convergente, il vient que la suite de fonction $(x_k(t))$ converge uniformément sur l'intervalle $J = [t_0 - T, t_0 + T]$ vers une fonction $x(\cdot)$ continue telle que : $\|x(t) - x_0\| \leq b$ (d'après (9)).

Il résulte de (h.3) que la suite $F(s, x_k(s))$ converge uniformément vers $F(s, x(s))$ sur J .

On peut donc passer à la limite dans (8), et on trouve que $x(\cdot)$ vérifie :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, x(s)) ds$$

Il s'ensuit que la fonction $x(\cdot)$ est de classe C^1 sur J , que $x(t_0) = x_0$ et que $x(\cdot)$ solution du problème de Cauchy(3) .

Point d) Montrons l'unicité. Pour cela, soit $y(\cdot)$ une autre solution du problème de Cauchy (3) dans J telle que $y(t_0) = x_0$ et que $(t, y(t)) \in Q, \forall t \in J$.

Alors on remarque que pour tout $t : |t - t_0| \leq T$

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|F(s, x(s)) - F(s, y(s))\| ds \right| \\ &\leq C \int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\| ds \end{aligned}$$

On applique le lemme de Gronwall (ici on prend $c = 0, v(t) = 1, u(t) = \|x(t) - y(t)\|$) il vient que :

$$\begin{aligned}\|x(t) - y(t)\| &\leq 0e^{c \int_{t_0}^t 1 ds} = 0e^{t-t_0} \\ \|x(t) - y(t)\| &\leq 0\end{aligned}$$

Alors $\|x(t) - y(t)\| = 0$, d'où pour tout $t : |t - t_0| \leq T$

$$x(t) = y(t)$$

2.2.2 Cas où F est seulement continue : "Théorème d'Arzela-Peano"

Nous allons voir que si F est seulement continue, on a encore existence locale d'une solution mais on peut perdre l'unicité.

On procède de la même manière que pour le théorème de Cauchy-Lipschitz, c'est à dire on commence par la situation modèle.

Théorème 2.2.5. Soient $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, a et b deux réels positifs et

$$Q = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}$$

et soit F une fonction continue sur Q et $M > 0$ tels que :

$$\sup \|F(t, x)\| \leq M$$

et $(t, x) \in Q$.

Alors, le problème de Cauchy (3) admet une solution (x, J) où $J = [t_0 - T, t_0 + T]$ avec $T = \min(a, \frac{b}{M})$, telle que $x(t_0) = x_0$

Corollaire 2.2.6. Soit $F : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Pour tout point $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ il existe une solution du problème (3) au voisinage de (t_0, x_0) telle que $x(t_0) = x_0$.

- Le corollaire (2.2.5) est une conséquence immédiate du théorème (2.2.4).

Avant de démontrer le théorème (2.2.4), nous allons remarquer que :

Remarque. Il y a une différence entre les théorèmes (2.2.2) et (2.2.4). Le théorème (2.2.2) de Cauchy-Lipschitz reste valable dans le cas où F est une fonction de $I \times X$ où X un espace de Banach (donc de dimension infinie).

Par contre, le théorème (2.2.4) d'Arzela-Peano est en général faux si on remplace \mathbb{R}^n par un espace de dimension infinie. Cela se verra au niveau de la preuve, lorsqu'on utilisera le fait que la boule unité fermée de \mathbb{R}^n est compacte, ce qui est toujours faux pour un espace de Banach de dimension infinie.

Preuve du théorème d'Arzela-Peano (Voir la séance de TD).

Exemple 2 Voici quelques exemples pour lesquels on perd effectivement l'unicité :

a) Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = 3x^{\frac{2}{3}}, t \geq 0 \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Ce problème admet deux solutions sur le même intervalle de temps J :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0, & J &= \mathbb{R} \\ x_2(t) &= t^3, & J &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

D'où le problème (11) n'admet pas de solution unique sur \mathbb{R} .

b) Considérons le problème :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = 2|x|^{\frac{1}{2}}, t \geq 0 \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

On peut vérifier que les fonctions $x_\lambda(\cdot)$ pour $\lambda > 0$, données par :

$$x_\lambda(t) = \begin{cases} (t - \lambda)^2 & \text{si } t \geq \lambda \\ 0 & \text{si } t < \lambda \end{cases}$$

sont des fonctions C^1 sur \mathbb{R} , solutions du problème (12).

2.2.3 Dépendance par rapport aux paramètres et aux conditions initiales

Continuité

Comme au paragraphe précédant, on se place dans la situation modèle.

Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On pose :

$$Q = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}$$

Soit aussi $\lambda_0 \in \mathbb{R}^n$. On note :

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : \|\lambda - \lambda_0\| \leq c\}$$

On considère la fonction : $F : Q \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$, et on suppose que :

(h.4) L'application $(t, x; \lambda) \mapsto F(t, x; \lambda)$ est continue sur $Q \times \Lambda$

(h.5) Soit $M > 0$ telle que

$$\sup_Q \|F\| \leq M$$

(h.6) Il existe $c > 0$ telle que :

$$\|F(t, x_1; \lambda) - F(t, x_2; \lambda)\| \leq c\|x_1 - x_2\|$$

$$\forall (t, x_i; \lambda) \in Q \times \Lambda, i = \overline{1, 2}$$

Alors on a :

Théorème 2.2.7. *Sous les hypothèses (h.1), (h.2), (h.3), pour tout $\lambda \in \Lambda$ le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = F(t, x(t); \lambda) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution notée $x(t, \lambda)$ dans l'intervalle $J = [t_0 - T, t_0 + T]$ où $T = \min(a, \frac{b}{M})$. En outre, l'application $(t, \lambda) \mapsto x(t, \lambda)$ est continue sur $J \times \Lambda$.

2.3 THÉORIE GLOBALE

Les théorèmes précédents fournissent des solutions pour des temps t petits autour du temps initiale t_0 .

La question que nous allons aborder maintenant est celle de l'évolution de cette solution au cours du temps t :

Que devient-elle lorsque le temps augmente? Existe-t-elle pour tout temps t ? Sinon, que se passe-t-il? Nous allons répondre à ces questions dans les paragraphes qui suivent :

2.3.1 Existence et unicité de la solution maximale

Avant de définir la solution maximale, nous allons aborder le théorème suivant dit "de recollement" que l'unicité des solutions du théorème de Cauchy-Lipschitz "locale" permet de le démontrer. Plus précisément on a :

Théorème 2.3.1. *"Théorème d'unicité globale ou lemme de recollement" Soit l'EDO :*

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(t, x(t)) \quad (13)$$

où $F : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable x . Soient $x_1(\cdot)$ et $x_2(\cdot)$ deux solutions de l'EDO (13) sur les intervalles J_1 et J_2 telles que $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$.

S'il existe $t_0 \in J_1 \cap J_2$ telle que

$$x_1(t_0) = x_2(t_0) = x_0$$

Alors

$$x_1(t) = x_2(t), \forall t \in J_1 \cap J_2$$

Remarque. 1) *De ce théorème, on peut voir que la fonction :*

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) & \text{si } t \in J_1 \\ x_2(t) & \text{si } t \in J_2 \end{cases}$$

est une solution de l'EDO (13) sur $J_1 \cup J_2$ avec $x(t_0) = x_0$.

2) *Cela nous montre qu'il existe un plus grand intervalle J sur lequel le problème de Cauchy (3) admet une solution et que cette solution est unique. Cette solution sera appelée : solution maximale. Par définition, on ne peut pas la prolonger à I/J et lorsque $I = J$ on dit que cette solution est globale.*

3) *La question naturelle est ensuite de savoir à quelles conditions une solution maximale est globale?*

Preuve du théorème 2.3.1 Soit $t_0 \in J_1 \cap J_2$ telle que $x_1(t_0) = x_2(t_0)$. Notons :

$$E = \{t \in J_1 \cap J_2 : x_1(t) = x_2(t)\}$$

Supposons que : $E \neq J_1 \cap J_2$

Par exemples il existe un élément

$$t^* = \inf\{t > t_0 : x_1(t) \neq x_2(t)\}$$

Alors

$$x_1(t) = x_2(t) \quad \forall t_0 < t < t^*$$

Or que $x_1(\cdot)$ et $x_2(\cdot)$ sont continues alors

$$x_1(t^*) = x_2(t^*) = x^*$$

et de plus $(t^*, x^*) \in I \times \Omega$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz , il existe un voisinage de (t^*, x^*) pour lequel, il existe une solution unique locale sur

$$[t^* - T, t^* + T]$$

Il vient que $x_1(t) = x_2(t)$ pour tout $t \in [t^* - T, t^* + T]$, Cela contredit la définition de t^* .

Définition 2.3.2. Prolongement de solution

Soient $(x_1(\cdot), J_1), (x_2(\cdot), J_2)$ deux solutions de l'EDO : $x'(t) = F(t, x(t))$.

On dit que $(x_2(\cdot), J_2)$ prolonge $(x_1(\cdot), J_1)$ si :

- (a) $J_1 \subset J_2$
- (b) $x_1(t) = x_2(t); \forall t \in J_1$

Définition 2.3.3. Solution maximale

Soit $(x(\cdot), J)$ une solution locale de l'EDO $x'(t) = F(t, x(t))$.

On dit que $(x(\cdot), J)$ est une solution maximale si elle n'admet aucun prolongement de solution sur I/J .

Théorème 2.3.4. Existence d'une solution maximale

Soit $F : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Par tout point (t_0, x_0) de $I \times \Omega$, il passe une solution maximale $(x(\cdot), J)$, où J est un intervalle ouvert dans I c'est à dire $J =]T_*; T^*[$.

Si de plus F est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable x , cette solution maximale est unique .

2.3.2 Solution globale

Une question naturelle est de savoir sous quelles conditions une solution maximale est globale ?

On commence par un cas particulier très fréquent dans les applications :

Cas où F est définie sur $I \times \Omega$ avec $I =]a, b[$ et $\Omega = \mathbb{R}^n$

Théorème 2.3.5. Soit $(x(\cdot), J)$ une solution maximale du problème de Cauchy (3) avec $J =]T_*, T^*[$. Alors :

$$\begin{cases} T^* = b \\ \text{ou } T^* < b \text{ et } \lim_{t \rightarrow T^*} \|x(t)\| = +\infty \end{cases}$$

de même

$$\begin{cases} T_* = a \\ \text{ou } T_* > a \text{ et } \lim_{t \rightarrow T_*} \|x(t)\| = +\infty \end{cases}$$

Cas où F est définie sur $]a, b[\times \Omega$

Théorème 2.3.6. Soit $(x(\cdot), J)$ une solution maximale du problème de Cauchy (3) avec $J =]T_*, T^*[$, alors :

$$\begin{cases} T^* = b \\ \text{ou } T^* < b \end{cases}$$

et pour tout compact $k \subset \Omega$, il existe $t < T^*$ tel que : $x(t)$ n'appartient pas à k .
même énoncé pour T_*

2.4 LE FLOT

Définition 2.4.1. Soit $F : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz .

L'application définie sur $I \times \Omega$ et qui à (t_0, x_0) associe la solution maximale $\Phi_{(t_0, x_0)}$ du problème de Cauchy (3) prenant la valeur x_0 en t_0 est appelée : Flot associé à F .

Notation Il sera parfois commode de considérer le flot comme une fonction de trois variables plutôt que comme une famille de fonctions dépendant des paramètres t_0 et x_0 .
On notera alors :

$$\phi(t, t_0, x_0) = \Phi_{(t_0, x_0)}(t)$$

Remarque. On peut voir qu'il existe un voisinage de x_0 telle que l'application $x \longmapsto \phi(t, t_0, x)$ soit bijective . Le théorème d'inversion locale assurent en fait que cette application est un difféomorphisme .

Plus précisément on a le résultat suivant .

Théorème 2.4.2. Soit $F : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et différentiable par rapport à sa variable x telle que DF_x soit continue sur $I \times \Omega$. Alors le flot associé à F est différentiable par rapport à x , et sa matrice jacobienne $D\phi_x(\cdot, t_0, x_0)$ vérifie l'équation différentielle (à valeurs matricielles) linéaire suivante sur l'intervalle de définition de $\phi_{(t_0, x_0)}$:

$$\begin{cases} \phi' = DF_x(t, \phi_{(t_0, x_0)}(t)) \cdot \phi \\ \phi|_{t=t_0} = I_n \end{cases}$$

Remarque. Plus généralement , si F est de classe C^k sur son domaine de définition alors le flot est également de classe C^k par rapport aux trois variables (t, t_0, x_0) .

ÉTUDE QUALITATIVE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AUTONOMES

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude qualitative des EDO autonomes, c'est à dire sous la forme :

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(x(t)) \quad (*)$$

où F est une fonction connue définie d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Ici, nous allons supposé que F est de classe C^1 et que Ω est un convexe de \mathbb{R}^n , d'où les théories d'existence locale et globale développées au chapitre précédent s'appliquent.

La particularité d'un tel système (*) est que la fonction F ne dépend que de $x(t)$ et non pas de t . Cela a pour conséquence de la propriété de translation : c'est à dire si $\phi(t)$ est une solution maximale de (*) sur un intervalle I telle que $\phi(t_0) = x_0$ alors la fonction ψ définie sur $I - t_0$ par :

$$\psi(t) = \phi(t - t_0)$$

est la solution maximale de (*) telle que $\psi(0) = x_0$.

(Preuve : utiliser la propriété d'unicité des solutions du théorème de Cauchy-Lipschitz).

De ce fait, on se limitera dans ce qui suit à l'étude du problème de Cauchy en $t_0 = 0$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = F(x(t)), t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

où $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction connue de classe C^1 sur Ω à valeurs dans \mathbb{R}^n . L'approche qualitative consiste au lieu de s'intéresser à la solution de (1) pour une donnée initiale fixée, à considérer les courbes décrites par les solutions de (1) dans leur ensemble. L'étude sera donc géométrique : c'est la fonction F vue comme un champ de vecteurs dans Ω un ouvert de \mathbb{R}^n (l'étude reste valable pour des espaces de dimension infinie).

3.1 CHAMPS DE VECTEURS

Définition 3.1.1. *Un champ de vecteur réel, sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n , est une application X qui à tout point x de Ω fait correspondre un opérateur différentiel*

$$X = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

où $a_i(\cdot)$ sont des fonctions de Ω dans \mathbb{R} . Le champ X est dit C^k , $k \geq 1$ si les $a_i(\cdot)$ sont de classe C^k .

Remarque. *Le champ de vecteurs X est non nul en un point x_0 de Ω si l'un des $a_i(\cdot)$ est non nul en x_0 . Cela se traduit par*

$$\sum_{i=1}^n \|a_i(x_0)\| \neq 0$$

Un résultat important est le suivant :

Théorème 3.1.2. *(Redressement des champs de vecteurs réels) Soit X un champ de vecteurs de classe C^1 , dans un voisinage d'un point x_0 de \mathbb{R}^n , non nul en x_0 . Il existe des coordonnées $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ au voisinage de x_0 dans lesquelles X s'écrit $\frac{\partial}{\partial y_1}$.*

Voici ce que signifie le résultat de ce théorème : Il existe un voisinage U de x_0 , un ouvert V de \mathbb{R}^n , un difféomorphisme $\phi : V \rightarrow U$ tels que pour tout $u \in C^1(U, \mathbb{R})$ on a

$$Xu(x) = \frac{\partial}{\partial y_1}(u(\phi(y))), \quad \forall x \in U, \quad \phi(y) = x$$

(On a noté x les coordonnées de U , et y les coordonnées de V).

Remarque. (a) *Si on pose $\hat{X}(x) = X(x + x_0)$ on se ramène au cas $x_0 = 0$. De plus puisque l'un des $a_i(\cdot)$ ne s'annule pas en x_0 , on peut supposer que $a_1(0) \neq 0$. On peut donc considérer le système d'EDO*

$$\frac{dz}{dt}(t) = a(z(t)), \quad z(0) = (0, y_2, \dots, y_n), \quad (2)$$

et on montre qu'il admet une solution unique $z(t) = \phi(t, y)$.

(b) *On voit que :*

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(\phi(t, y))) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(\phi(t, y)) \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(t, y) = \sum_{i=1}^n (a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(\phi(t, y))) = Xu(x)$$

où $x = \phi(t, y)$. C'est exactement le résultat du théorème avec $t = y_1$.

(c) *Les solutions de (2) (lorsque y varie) s'appellent : les courbes intégrales du champ X . Ce sont des courbes $t \mapsto z(t)$ dans \mathbb{R}^n telles qu'en tout point de la courbe, le champ X est tangent à la courbe, c'est-à-dire le vecteur $a(z(t))$ est le vecteur tangent à la courbe (en effet $a(z(t)) = z'(t)$).*

- (d) Le théorème de redressement permis donc de remplir un voisinage de zéro à l'aide de telles courbes, c'est-à-dire par chaque point d'un voisinage de zéro passe une telle courbe et une seule. Les nouvelles coordonnées que l'on a trouvé sont : le temps t mis par la courbe pour atteindre x en partant du point $(0, y)$ et le point y d'où l'on est parti.
- (e) Dans ces nouvelles coordonnées (t, y) , les courbes intégrales deviennent les droites horizontales (t, y) où y est fixé et $t \in [-T, T]$ et le champ qui est tangent à ces courbes est alors $\frac{\partial}{\partial t}$. On dit qu'on a redressé les courbes intégrales du champ X d'où le titre du théorème.

Il résulte de ce théorème que pour toute fonction F continue au voisinage de x_0 , l'équation $Xu = F$ admet une solution $u \in C^1$ dans un voisinage de x_0 . De plus, on peut considérer que

- (a) F est un champ de vecteurs sur l'ouvert Ω de \mathbb{R}^n de classe C^1 sur Ω .
- (b) On dit que le champ de vecteurs F est complet si toutes les solutions maximales de l'EDO : $x'(t) = F(x(t))$ sont globales.

On peut donc donner la définition d'une courbe intégrale comme suit :

Définition 3.1.3. Courbes intégrales

Le sous ensemble de \mathbb{R}^n de la forme : $\{x(t), t \in I\}$ où $x(\cdot)$ est une solution maximale de l'EDO : $x'(t) = F(x(t))$ sur I , est appelé "courbe intégrale" du champ de vecteurs F .

Définition 3.1.4. Intégrale première

On appelle intégrale première pour l'EDO $x'(t) = F(x(t))$, toute fonction $E : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur Ω constante le long des courbes intégrales, c'est à dire :
Pour toute solution maximale $x(\cdot)$ sur I on a : $E(x(t)) = \text{constante}$ (c'est à dire $E \circ x(\cdot)$ est indépendante de t).

Remarque. Or que $(E \circ x)(t) = \text{constante}$, il vient que E est une intégrale première si :

$$\nabla E(x) \cdot F(x) = 0, \forall x \in \Omega \quad (3)$$

(c'est à dire $\sum_{j=1}^n \frac{\partial E(x)}{\partial x_j} \cdot F_j(x) = 0, \forall x \in \Omega$.)

Exemple 1 Soit l'EDO du second ordre suivante :

$$x''(t) + a^2(1 + bx^2(t))x(t) = 0$$

Montrons que la fonction :

$$E(x(t), x'(t)) = \frac{1}{2}(x'(t))^2 + \frac{a^2}{2}x^2(t) + \frac{a^2b}{4}x^4(t)$$

est une intégrale première pour cette EDO.

Tout d'abord on transforme cette EDO à un système d'EDO d'ordre un en posant : $x_1(t) = x(t)$ et $x_2(t) = x'(t)$. Il vient que $x_1'(t) = x'(t) = x_2(t)$ et $x_2'(t) = x''(t)$, c'est à dire :

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= -a^2(1 + bx_1^2(t))x_1(t) \end{aligned}$$

Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ et $F(X(t)) = F(x_1(t), x_2(t)) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -a^2(1 + bx_1^2(t))x_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix}$

Alors, pour que E soit une intégrale première, il suffit que E soit de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et qu'elle vérifie :

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial E(X)}{\partial x_j} \cdot F_j(X) = 0$$

C'est à dire :

$$\frac{\partial E(x_1, x_2)}{\partial x_1} \cdot F_1(x_1, x_2) + \frac{\partial E(x_1, x_2)}{\partial x_2} \cdot F_2(x_1, x_2) = 0$$

Remarque. La connaissance d'intégrale première est cruciale pour espérer résoudre explicitement une EDO. Elle est toujours utile pour montrer des propriétés qualitatives (géométriques) de cette équation.

Remarque. Soit l'EDO du second ordre de la forme générale : $x''(t) + h(x(t)) = 0$, où h est une fonction régulière connue. Pour déterminer l'intégrale première pour cette EDO, on multiplie l'équation par $x'(t)$, on aura :

$$x''(t)x'(t) + x'(t)h(x(t)) = 0$$

c'est à dire :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x'(t))^2 + \frac{d}{dt} \int_0^{x(t)} h(\tau) d\tau = 0$$

D'où une intégrale première associée à cette EDO est

$$E(x(t), x'(t)) = \frac{1}{2} (x'(t))^2 + \int_0^{x(t)} h(\tau) d\tau$$

ou bien

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_2^2(t) + \int_0^{x_1} h(\tau) d\tau$$

où $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = x'(t)$.

Remarque. Parfois, on appelle l'intégrale première : "loi de conservation" ou "l'invariant". Donc la recherche des "invariants" ou de "loi de conservation" est souvent l'une des premières tâches que l'on se fixe dans l'étude d'une équation différentielle, que ce soit en mécanique classique ou physique moderne des hautes énergies.

Exemple 2 : Loi de conservation ou la fonction d'énergie d'un système de mouvement d'une particule matériel en mécanique classique, c'est à dire un système de la forme :

$$x''(t) = F(x(t))$$

où $x(\cdot)$ est à valeurs dans \mathbb{R}^n (par exemple penser à F comme une force, la masse étant supposée fixée égale à $m = 1$).

Dans le cas où F dérive d'une fonction $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ c'est à dire $F(x) = -\nabla(x)P$.

La fonction P (supposée de classe C^1) est appelée : le potentiel, ou encore $F_j(x) = -\frac{\partial P(x)}{\partial x_j}, j = \overline{1, n}$, d'où l'équation sera $x''(t) = -\nabla P(x(t))$.

Définissons la fonction $E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$E(x, v) = \frac{\|v\|^2}{2} + P(x)$$

où $v(t) = x'(t)$ la vitesse de la particule. Le premier terme $\frac{\|v\|^2}{2}$ est appelé : "énergie cinétique" et le second $P(x)$: "énergie potentielle" et on appelle E souvent : "énergie totale".

Soit maintenant $x(\cdot)$ une solution de l'EDO : $x''(t) = F(x(t)) = -\nabla P(x(t))$. On réécrit l'EDO sous forme d'un système d'ordre un en posant $x'(t) = v(t), v'(t) = -\nabla P(x(t))$ alors :

$$\frac{d}{dt}E(x(t), x'(t)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\|x'(t)\|^2}{2} + P(x)\right) = 0$$

D'où E est une intégrale première (ou bien loi de conservation de l'énergie) pour la loi de la mécanique classique.

3.2 ORBITES ET FLOTS

Le but dans ce paragraphe est d'étudier l'allure des courbes dans $\mathbb{R}^n : t \mapsto x(t)$ où $x(\cdot)$ est une solution maximale de l'EDO $x'(t) = F(x(t))$. Ces courbes sont appelées : orbites ou trajectoires du système d'EDO. Cet aspect des choses peut avoir un but pratique. En effet, supposons que $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ soient des quantités physiques dépendant du temps t , alors connaître séparément chaque fonction $t \mapsto x_i(t)$ permet de deviner l'évolution de chaque quantité en fonction du temps. Par contre, connaître l'allure de la courbe $t \mapsto x(t)$ permet en particulier de décrire le comportement des quantités les unes par rapport aux autres.

Définition 3.2.1. (Orbites ou trajectoires)

Pour $x_0 \in \Omega$, la courbe intégrale passant par le point x_0 est appelée : "orbite de x_0 " pour le champ de vecteurs F .

Remarque. a) D'après l'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz, on peut dire que deux courbes intégrales passant par le même point se coïncident. D'où, on voit que deux orbites ayant un point commun se coïncident aussi.

b) Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que pour tout point $x_0 \in \Omega$, il existe une orbite de F passant par le point x_0 . En conséquence, l'ensemble des orbites correspondant au champ de vecteurs F constitue une partition de l'ouvert Ω où F est définie.

Cette partition sera appelée : "portrait de phase".

c) Lorsque l'on ne sait pas résoudre explicitement l'EDO, il est souvent quand même possible d'obtenir des informations très précises sur les orbites (et donc sur les solutions).

- d) Si l'on dispose d'une intégrale première E , alors toute orbite est inclus dans un ensemble de niveau de E c'est à dire si une orbite passant par un point x_0 , alors cette orbite est portée par la courbe à niveau de $E : E(x) = E(x_0)$.

Définition 3.2.2. (Le flot)

Soit F un champ de vecteurs sur l'ouvert Ω de \mathbb{R}^n . On appelle flot associé à F l'application ϕ qui à tout $x \in \Omega$ associe la solution maximale ϕ_x de l'EDO : $x'(t) = F(x(t))$ telle que $\phi_x(0) = x$.

Remarque. D'après cette définition ϕ est le flot associé au champ de vecteurs F si l'on a :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi_x(t) = F(\phi_x(t)), & x \in \Omega, \quad t \geq 0 \\ \phi_x(0) = x, \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Remarque. Suivant que l'on s'intéresse à la solution issue de x ou à sa dépendance par rapport à x ou à l'instant t , on utilisera les notations coïncidant :

$$\phi_x(t) = \phi_t(x) = \phi(t, x)$$

Dans la définition suivante, nous décrivons quatre type d'orbites particulières que l'on rencontre souvent.

Définition 3.2.3. Quelques types des orbites

Soit F un champ de vecteurs sur l'ouvert Ω de \mathbb{R}^n , x_0 un point de Ω et $(\phi_t(x_0))_{t \in \mathbb{R}}$ une orbite passant par le point x_0 et définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- On dit que x_0 est un point stationnaire (ou critique, ou fixe, ou point d'équilibre) du champ de vecteurs F si la fonction : $t \mapsto \phi_t(x_0)$ est constante.
- On dit que l'orbite $(\phi_t(x_0))_{t \in \mathbb{R}}$ est un cycle si la fonction $t \mapsto \phi_t(x_0)$ est périodique.
- On dit que l'orbite $(\phi_t(x_0))_{t \in \mathbb{R}}$ est hétérocline si elle relie deux points stationnaires distincts a et b (c'est à dire la courbe intégrale relie deux points stationnaires différents en $-\infty$ et $+\infty$. (cela veut dire que $F(a) = F(b) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x_0) = a$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x_0) = b$).
- Si $a = b$ dans la définition précédente (c), on dit que l'orbite est homocline (c'est à dire La courbe intégrale relie le même point fixe en $-\infty$ et $+\infty$).

La proposition suivante décrit les définitions précédentes :

Proposition 3.2.4. Soit F un champ de vecteurs sur l'ouvert Ω de \mathbb{R}^n . Alors

- (a) point $x_0 \in \Omega$ est stationnaire si et seulement si :

$$F(x_0) = 0 \tag{3}$$

- (b) L'orbite $(\phi_t(x))_{t \in \mathbb{R}}$ est périodique si et seulement s'ils existent deux temps distincts t_1 et t_2 tels que : $\phi_{t_1}(x) = \phi_{t_2}(x)$. Dans ce cas, l'orbite du point x est une courbe fermée simple appelée "cycle".

Exercice

- Montrer que pour l'EDO $x''(t) + x(t) = 0$, tout point (x_0, x'_0) est un cycle, et que si $(x_0, x'_0) = (0, 0)$ se cycle se réduit à un point stationnaire.
- Déterminer les points d'équilibres pour l'EDO : $x'(t) = x^2(t) - x(t)$.

Exemple 4 : "Oscillateur harmonique"

Le mouvement d'un oscillateur harmonique est décrit par l'EDO d'ordre deux : $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$, où ω une constante. Considérons les conditions initiales $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ et $x'(0) = x'_0 \in \mathbb{R}$.

Le polynôme caractéristique associé à l'EDO est $\lambda^2 + \omega^2 = 0$. D'où on aura deux racines imaginaires $\lambda = \pm i\omega$. Par suite, une solution pour l'EDO a la forme

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}.$$

D'après les conditions initiales : $x(0) = c_1 + c_2 = x_0$ et $x'(0) = ic_1\omega - ic_2\omega = x'_0$, il vient que :

$$\begin{cases} c_1 = \frac{i\omega x_0 + x'_0}{2i\omega} \\ c_2 = \frac{i\omega x_0 - x'_0}{2i\omega} \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{i\omega x_0 + x'_0}{2i\omega} e^{i\omega t} + \frac{i\omega x_0 - x'_0}{2i\omega} e^{-i\omega t} \\ &= x_0 \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} + \frac{x'_0}{\omega} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2} \end{aligned}$$

c'est à dire

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{x'_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

et

$$x'(t) = -x_0\omega \sin(\omega t) + x'_0 \cos(\omega t)$$

D'où

$$(x(t))^2 + \frac{1}{\omega^2} (x'(t))^2 = x_0^2 + \frac{1}{\omega^2} x_0'^2$$

D'où l'énergie est conservée. La dernière équation représente un ellipse de centre $(0, 0)$ de petit axe ω et grand axe ω .

Si $\omega = 1$ alors $x^2 + (x')^2 = x_0^2 + (x'_0)^2$, d'où les orbites sont des cercles centrées à l'origine.

Définition 3.2.5. Pour les EDO du second ordre, le plan $(0, x, x')$ est appelé : "plan de phase".

Exemple 5 :

$$\begin{cases} x''(t) - x(t) = 0 \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0 \end{cases}$$

Ici le polynôme caractéristique $\lambda^2 - 1 = 0$ implique que $\lambda = \pm 1$, d'où une solution s'écrit sous forme : $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$, mais

$$\left. \begin{aligned} x(0) = x_0 &= c_1 + c_2 \\ x'(0) = x'_0 &= c_1 - c_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{x_0 + x'_0}{2} \\ c_2 = \frac{x_0 - x'_0}{2} \end{cases}$$

Il vient que

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{x_0 + x'_0}{2} e^t + \frac{x_0 - x'_0}{2} e^{-t} \\x(t) &= x_0 \frac{e^t + e^{-t}}{2} + x'_0 \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right) \\x(t) &= x_0 \operatorname{ch} t + x'_0 \operatorname{sh} t \\x'(t) &= x_0 \operatorname{sh} t + x'_0 \operatorname{ch} t\end{aligned}$$

Il vient que

$$x^2(t) - (x'(t))^2 = x_0^2 - (x'_0)^2$$

Alors l'énergie est conservée. De plus les orbites dans le plan de phase $(0, x, x')$ sont des hyperboles et $(0, 0)$ est un point stationnaire.

3.3 STABILITÉ DES POINTS D'ÉQUILIBRES

3.3.1 Définitions et propriétés

Dans le premier paragraphe de ce cours, on a interprété les courbes $x(t)$ comme les courbes intégrales du champ de vecteurs $X = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$. Le théorème de redressement des champs de vecteurs montre qu'au voisinage de tout point x_0 où $a_i(x_0) \neq 0$ ces courbes intégrales, dans d'autres coordonnées, sont des droites parallèles et donc, dans les coordonnées originelles, les images de ces droites par un même difféomorphisme. Donc, si $a_i(x_0)$ s'annule la situation sera différente.

L'objectif de ce paragraphe, est l'étude de la stabilité des points d'équilibre. Pour l'EDO autonome $x'(t) = F(x(t))$, on dit que x_0 est un point d'équilibre si $F(x_0) = 0$.

Ici, on suppose que F est un champ de vecteurs complet de classe C^1 défini sur l'ouvert Ω de \mathbb{R}^n (c'est à dire toute solution maximale associée au système $x'(t) = F(x(t))$ est globale).

Définition 3.3.1. Soit x_0 un point stationnaire de F (c'est à dire $F(x_0) = 0$). On dit que x_0 est :

a) **Stable** : si toute solution maximale issue d'un point proche de x_0 est définie sur \mathbb{R}^+ et reste proche de x_0 pour tout temps positif, c'est à dire :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $x(\cdot)$ est une solution de l'EDO :

$\frac{d}{dt}x(t) = F(x(t))$ qui à un instant t_0 vérifie $\|x(t_0) - x_0\| < \delta$, on a :

(i) $x(\cdot)$ est définie pour tout $t \geq t_0$,

(ii) $\|x(t) - x_0\| < \varepsilon$, pour tout $t \geq t_0$.

(Autrement dit : toute solution qui au temps $t = t_0$ est assez proche de x_0 le point stationnaire de F , reste proche de x_0 pour tout les temps ultérieurs).

Remarque. Comme le système d'EDO est autonome, on peut prendre toujours $t_0 = 0$ car si $x(t)$ solution alors $x(t - t_0)$ est aussi solution

b) **Instable** : si x_0 n'est pas stable.

c) **Asymptotiquement stable** : s'il existe $\delta > 0$, tel que si $x(\cdot)$ est une solution de l'EDO $\frac{d}{dt}x(t) = F(x(t))$, qui à l'instant t_0 vérifie $|x(t_0) - x_0| < \delta$ on a :

(i) $x(\cdot)$ est définie pour tout $t \geq t_0$,

(ii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0$.

Remarque. Il est clair que la stabilité asymptotique implique la stabilité.

Remarque. (a) Soit x_0 est un point stationnaire pour l'EDO $\frac{d}{dt}x(t) = F(x(t))$. On posons : $\tilde{x}(t) = x(t) - x_0$ et $G(x(t)) = F(x(t) + x_0)$, on se ramène au cas $x_0 = 0$ (c'est à dire l'origine est un point stationnaire).

(b) Si l'origine est un point stationnaire du système, au voisinage, la fonction F est approximée par premier terme de son développement de Taylor c'est à dire $F'(0) \cdot x(t)$ où $F'(0)$ est la matrice jacobienne de F à l'origine.

D'où, Il est tout à fait naturel de commencer par étudier ce cas. Nous nous limiterons dans ce qui suit au cas $n = 2$.

3.3.2 Étude qualitative des systèmes linéaires dans \mathbb{R}^2

Ici on considère le système différentiel linéaire à coefficient constant suivant :

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \quad (4)$$

Ici $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ et A une matrice inversible constante 2×2 à coefficients réels.

L'allure des trajectoires (ou orbites) du système dépendra de la nature des valeurs propres de la matrice A .

On trouvera ci-dessous, dans chacun des cas, l'allure des trajectoires ainsi que le nom attribué à l'unique point stationnaire qui est zéro.

Cas 1 : A admet deux valeurs propres réelles distinctes λ_1, λ_2 :

- $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$: nœud stable,
- $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$: nœud instable.

- $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$: point sel (ou col).

Cas 2 : A admet deux valeurs propres non réelles, conjuguées $\lambda = \alpha \pm i\beta$:

- $Re\lambda < 0$: foyer stable,
- $Re\lambda > 0$: foyer instable.

- $Re\lambda = 0$: point centre.

Cas 3 : A admet une valeur propre réelle double λ :

- $\lambda < 0, \dim E_\lambda = 2$: puits,
- $\lambda > 0, \dim E_\lambda = 2$: source.

- $\lambda < 0, \dim E_\lambda = 1$: nœud dégénéré stable,

- $\lambda > 0, \dim E_\lambda = 1$: nœud dégénéré instable.

Explications et indications de preuve Dans tous ces dessins le sens des flèches désigne le sens des t croissants (de $-\infty$ à $+\infty$, c'est à dire le sens dans lequel le point $x(t)$ se déplace lorsque t croît de $-\infty$ à $+\infty$).

Donnons une indication de preuve du premier cas, c'est à dire A admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 réelles :

Soient v_1 et v_2 deux vecteurs propres de A correspondant aux valeurs propres λ_1 et λ_2 . Ils forment une base de \mathbb{R}^2 , soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2) . Si on note $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$, alors les coordonnées d'un point dans ces deux bases, on a : $x = Py$.

D'autre part on sait que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ alors le système d'EDO $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \frac{d}{dt}(Py(t)) \\ &= P\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) \\ &= Ax(t) \\ &= APy(t) \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= P^{-1}APy(t) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} y(t) \end{aligned}$$

où $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$. Cela est équivalent aux deux EDO :

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t) \end{cases}$$

d'où les solutions sont les fonctions :

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1(0)e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = y_2(0)e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

pour toutes les valeurs de $(y_1(0), y_2(0)) \neq (0, 0)$.

Les trajectoires décrites dans les figures sont les courbes données en coordonnées paramétriques par $y_1 = y_0 e^{\lambda_1 t}$, $y_2 = y_0 e^{\lambda_2 t}$.

Ces courbes $(y_1(t), y_2(t))$ sont tangentes au vecteur propre correspondant à la valeur propre de plus petit module et elles ont une direction parabolique dans la direction du vecteur propre correspondant à la valeur propre de plus grand module (Pour cela il faut examiner $\frac{y_1}{y_2}$).

3.3.3 Étude des systèmes non linéaires au voisinage d'un point d'équilibre

Supposons que l'origine est un point d'équilibre pour le système autonome non linéaire :

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(x(t)) \quad (5)$$

Comme $F(0) = 0$ on peut écrire pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) + F'(0) \cdot x + G(x) \\ &= F'(0) \cdot x + G(x) \end{aligned}$$

G est de classe C^1 avec $G(x) = 0(\|x\|); \|x\| \rightarrow 0$

Le système peut s'écrire :

$$\frac{d}{dt}x(t) = F'(0)x(t) + G(x(t)) \quad (6)$$

$$G \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), G(x) = 0(\|x\|), \|x\| \rightarrow 0 \quad (7)$$

Théorème 3.3.2. (Stabilité des solutions)

Soient (λ_k) les valeurs propres de $F'(0)$ et supposons que $Re(\lambda_k) < 0, \forall k$. Alors pour tout μ tel que : $0 < \mu < \min(Re(-\lambda_k))$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $x(\cdot)$ est une solution de (6) qui à un instant t_0 vérifie $\|x(t_0)\| \leq \delta$, alors :

(a) $x(\cdot)$ existe pour tout $t \geq t_0$.

(b) $\|x(t)\| \leq \varepsilon e^{-\mu t}; \forall t \geq t_0$

En particulier, l'origine est asymptotiquement stable.

Théorème 3.3.3. (Théorème de linéarisation)

Soient (λ_k) les valeurs propres de $F'(0)$. Supposons que : $Re(\lambda_k) \neq 0, \forall k$. Alors, il existe un voisinage U de zéro et un homéomorphisme θ de U dans un voisinage V de zéro qui envoie une trajectoire du système (6) sur une trajectoire du système linéaire $x'(t) = F'(0)x(t)$ en conservant le sens du temps.

Remarque. Par exemple en dimension $n = 2$, les trajectoires du système non linéaire ressembleront à celles décrites au paragraphe (3.3.1) (cas linéaire $x'(t) = Ax(t)$) dans tous les cas à l'exception du cas du centre ($Re\lambda = 0$) pour lequel le théorème (3.3.3) est faux.

Voici un exemple :

Exemple 7 : Soit le système d'EDO non linéaire en dimension $n = 2$:

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - x(x^2 + y^2) \\ x - y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

Ici $F(x, y) = (-y - x(x^2 + y^2)), F(0, 0) = (0, 0)$ d'où $(0, 0)$ l'origine est un point d'équilibre.

On écrit le système linéaire $X'(t) = F'(0)X(t) + G(X)$ alors le système linéaire est $X'(t) = F'(0)X(t)$ où $F'(x, y) = \begin{pmatrix} -3x^2 & -1 \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}$ d'où $F'(0, 0) = F'(0_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ d'où les valeurs propres sont $\lambda = \pm i$ ici $Re\lambda = 0$.

Du paragraphe (3.3.1), l'origine $(0, 0)$ est un centre pour le système linéaire $X'(t) = F'(0)X(t)$ et les orbites sont des cercles centrés en zéro.

Que se passe pour le système non linéaire ?

Passons en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \\ y(t) = \rho(t) \sin \theta(t) \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} x'(t) &= \rho'(t) \cos \theta(t) - \rho(t) \theta'(t) \sin \theta(t) \\ y'(t) &= \rho'(t) \sin \theta(t) + \rho(t) \theta'(t) \cot \theta(t) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = \rho(t)\rho'(t) \\ x(t)y'(t) - x'(t)y(t) = \rho^2(t)\theta'(t) \end{cases}$$

Il vient que

$$\begin{aligned} \rho(t)\rho'(t) &= -xy - x^2(x^2 + y^2) + xy - y^2(x^2 + y^2) = -\rho^4(t) \\ \rho^2(t)\theta'(t) &= x^2 - xy(x^2 + y^2) + y^2 + xy(x^2 + y^2) = \rho^2(t) \end{aligned}$$

Ce qui donne pour $\rho \neq 0$ (c'est à dire pour une trajectoire issue d'un point non nul) :

$$\begin{cases} \rho'(t) = -\rho^3(t) \\ \theta'(t) = 1 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int \frac{\rho'(t)}{\rho^3(t)} dt &= - \int 1 dt \\ \frac{-1}{2} \int \left(\frac{1}{\rho^2(t)} \right) dt &= - \int 1 dt \\ \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{\rho^2(t)} - \frac{1}{\rho^2(0)} \right) &= -t \\ \frac{1}{\rho^2(t)} &= 2t + \frac{1}{\rho^2(0)} \\ &= \frac{2t\rho^2(0) + 1}{\rho^2(0)} \end{aligned}$$

On obtient pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{cases} \rho(t) = \left(\frac{\rho^2(0)}{1 + 2t\rho^2(0)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \theta(t) = \theta(0) + t \end{cases}$$

Ce qui montre que quand $t \rightarrow +\infty$ alors $\theta(t) \rightarrow +\infty$ et $\rho(t) \rightarrow 0$.

D'où la trajectoire de la solution du système non linéaire, au voisinage de l'origine $(0, 0)$, est une spirale qui converge vers l'origine (c'est un ensemble non compact), tandis que la trajectoire du système linéaire $(x'(t) = F'(0)x(t) + G(x))$ est un cercle (qui est un ensemble compact).

Par conséquent, ces trajectoires ne peuvent être images l'une de l'autre par un homéomorphisme.

3.3.4 Méthode d'étude des systèmes en dimension $n = 2$

Dans ce paragraphe, nous allons donner quelques éléments qui forment un protocole d'étude géométriques des systèmes différentielles autonomes de dimension $n = 2$.

Considérons alors un tel système sous la forme

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases} \quad (5)$$

où f et g sont des fonctions de classe C^1 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

Protocole d'étude

(1) ON DÉTERMINE LES POINTS D'ÉQUILIBRES : On étudie leur nature (nœud, col, foyer, ...). Les résultats du paragraphe précédent ainsi que le théorème de linéarisation nous donnent (sauf le cas de centre) une idée de l'allure des trajectoires au voisinage de ces points.

Pratiquement si $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$, il est commode de poser $X = x - x_0, Y = y - y_0$. Alors $f(x, y) = aX + bY + O(X^2 + Y^2), g(x, y) = cX + dY + O(X^2 + Y^2)$. Le linéarisé du système en (x_0, y_0) a pour matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(2) ON TRACE LES ISOCLINES : Une isocline est une courbe du plan le long de laquelle la pente des trajectoires est constante. Si $m \in \overline{\mathbb{R}}$ on pose

$$I_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = m\}.$$

Le long de I_m on a $\frac{x'(t)}{y'(t)} = m$. Si $m = 0, I_0$ est l'isocline où la pente de la trajectoire est horizontale. Si $m = \infty, I_\infty$ est l'isocline où la pente de la trajectoire est verticale. On a :

$$\begin{cases} I_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\} \\ I_\infty = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\} \end{cases}$$

(3) ON RÉGIONNE LE PLAN SUIVANT LE SENS DU CHAMP : On détermine pour cela les régions où $f(x, y) > 0, f(x, y) < 0$ de même pour g .

$$\begin{array}{cccc} f > 0, g > 0 & f > 0, g < 0 & f < 0, g > 0 & f < 0, g < 0 \\ \nearrow & \searrow & \swarrow & \nwarrow \end{array}$$

(4) ON EXAMINE LES SYMÉTRIES : Les orbites peuvent être symétriques par rapport à (ox) , (oy) où l'origine. Soient Γ_1 et Γ_2 deux trajectoires symétriques. On dit qu'elles sont parcourues dans le même sens si, en tous points symétriques, les vecteurs orientés sont symétriques.

Symétrie par rapport à (ox) : elle est vérifiée dans l'un des deux cas suivant :

Cas1.

$$\begin{cases} f(x, -y) = f(x, y) \\ g(x, -y) = -g(x, y) \end{cases}$$

Cas2.

$$\begin{cases} f(x, -y) = -f(x, y) \\ g(x, -y) = g(x, y) \end{cases}$$

En effet, dans le cas1., si $(x(t), y(t))$ est une solution pour l'EDO (5), pour $t \in (a, b)$, alors $(x_1(t), y_1(t))$ où $x_1(t) = x(t)$ et $y_1(t) = -y(t)$, $t \in (a, b)$ est aussi une solution.

Les deux orbites sont alors parcourues dans le même sens, les vecteurs tangents étant symétriques :

Dans le cas2., les orbites sont parcourues en sens inverse :

Symétrie par rapport à (oy) : elle est vérifiée dans l'un des deux cas suivant :

Cas1.

$$\begin{cases} f(-x, y) = -f(x, y) \\ g(-x, y) = g(x, y) \end{cases}$$

Cas2.

$$\begin{cases} f(-x, y) = f(x, y) \\ g(-x, y) = -g(x, y) \end{cases}$$

Ici, dans le cas1., les orbites symétriques sont parcourues dans le même sens, et les vecteurs tangents étant symétriques :

et dans le cas2., les sens sont opposés :

Symétrie par rapport à l'origine : on a deux cas :

Cas1.

$$\begin{cases} f(-x, -y) = -f(x, y) \\ g(-x, -y) = -g(x, y) \end{cases}$$

Cas2.

$$\begin{cases} f(-x, -y) = f(x, y) \\ g(-x, -y) = g(x, y) \end{cases}$$

Dans le cas1., les orbites sont symétriques par rapport à l'origine, et le sens de parcours des orbites symétriques dans ce cas est le même :

par contre dans le cas 2., le sens est inversé :

(5) ON DÉTERMINE LES ZONES PIÈGES : Une zone piège est une partie du plan telle que toute trajectoire qui y entre, ne peut pas plus en ressortir. C'est le cas par exemple si le champ est rentrant sur tous les cotés de la zone.

Affinement du protocole

- (1) Le théorème de Cauchy Lipschitz nous dit que par tout point du plan passe une et une seule solution du système (5). En particulier, deux trajectoires du système ne se coupent jamais.
- (2) Au voisinage des points (x_0, y_0) où $f(x_0, y_0) \neq 0$, les trajectoires du système (5) se coïncident avec le graphes des solutions de l'équation différentielle $y'(x) = \frac{g(x, y(x))}{f(x, y(x))}$. En particulier, les trajectoires sont des courbes $y = \phi(x)$. Ceci peut aussi servir à déterminer la concavité des trajectoires. Pour cela, on peut calculer $y''(x)$ à partir de l'équation ci-dessus et étudier son signe.
De même, si on a $g(x_0, y_0) \neq 0$ au voisinage de (x_0, y_0) . Dans ce cas, les trajectoires du système (5) se coïncident avec le graphes des solutions de l'équation différentielle $x'(y) = \frac{f(x(y), y)}{g(x(y), y)}$. En particulier, ici les trajectoires sont des fonctions $x = \psi(y)$.

(3) A propos des isoclines :

Si une isocline I_m est une droite de pente m , alors c'est une solution particulière de notre système.

(4) Trajectoires monotones :

On dit qu'une trajectoire est monotone si dans le plan elle est le graphe d'une fonction $y = \phi(x)$ croissante ou décroissante. On peut dire alors que :

Si une trajectoire est monotone, alors elle sort de tout compact qui ne contient pas de points d'équilibres. (Cela montre que si $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$ alors (x_0, y_0) est un point d'équilibre.

EXERCICE 2. Considérons le système d'EDO

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t)(1 + y(t)) \end{cases}$$

(1) Étudier les points d'équilibres et leurs natures, déterminer les isoclines I_0, I_∞ , les solutions particulières ainsi que le sens du champ.

(2) On considère dans ce qui suit

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y < -1\}$$

et on considère une trajectoire issue de A .

(2.1) Montrer qu'elle est monotone et qu'elle est définie par une fonction $y = y(x)$

(2.2) Montrer que cette trajectoire n'admet pas d'asymptotes verticale et horizontale. En déduire que sur cette trajectoire $x \rightarrow +\infty$ et $x \rightarrow -\infty$.

(2.3) On pose $u(x) = \frac{y(x)}{x}$. Montrer qu'on a : $u'(x) + \frac{1}{x}u(x) = -1 - \frac{1}{y}$, et déduire que $u(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.

(2.4) Tracer les trajectoires dans la région A .

3.3.5 Equations différentielles $y'' + py' + qy = r$

Définitions et rappels

Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} , $p(\cdot), q(\cdot), r(\cdot)$ trois fonctions réelles continues sur I et $x_0 \in I$. On va s'intéresser aux solutions (réelles ou complexes) des deux équations différentielles linéaire et affine :

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{E}$$

et

$$y'' + py' + qy = r \tag{F}$$

Ici le corps $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ et V (respectivement W) l'espace vectoriel des solutions réelles (ou complexes) de (E) ; ainsi, si on ne précise pas le corps de base, on note $X = V$ si $K = \mathbb{R}$ et $X = W$ si $K = \mathbb{C}$. On a le théorème d'existence des solutions suivant :

(1) Pour tout $x_0 \in I$, pour tout $(a_0, a_1) \in K^2$, l'EDO (E) ou (F) admet une solution maximale unique, définie sur I tout entier, à valeurs dans K , telle que $y(x_0) = a_0$ et $y'(x_0) = a_1$.

(2)