

Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Équations différentielles 2
Master 1 : EDP et applications
2019-2020

Devoir

Exercice 1. 1. Déterminer une solution générale pour chacune des EDO suivantes

$$\begin{aligned}y''(x) - 4y'(x) + 7y(x) &= e^x, \\xy''(x) - y'(x) &= 3x^2, \\x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) &= x - 1.\end{aligned}$$

2. Pour chacune des paires de solutions suivantes, trouver une équation différentielle correspondante sous forme $a_0y''(x) + a_1y'(x) + a_2y(x) = 0$, où a_0, a_1, a_2 sont des constantes à déterminer dans chaque cas.

$$\begin{aligned}x, \quad \frac{1}{x}, \\1, \quad \log x, \\e^{-x}\cos 2x, \quad e^{-2x}\sin 2x.\end{aligned}$$

Exercice 2. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $q_1, q_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I telle que

$$q_1(x) \geq q_2(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (\text{E-1})$$

Soient $\alpha < \beta$ deux zéros d'une solution non nulle de l'EDO

$$y''(x) + q_2(x)y(x) = 0. \quad (\text{E-2})$$

1. Montrer que toute solution non nulle de l'EDO $y''(x) + q_1(x)y(x) = 0$ s'annule sur $[\alpha, \beta]$.

2. Application : Considérons l'EDO

$$y''(x) + e^x y(x) = 0, \quad I = \mathbb{R}_+. \quad (\text{E-3})$$

Montrer que toute solution non nulle de l'EDO (E-3) admet une infinité dénombrable de zéros que l'on peut ordonner en une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$x_n \sim \frac{\pi^2 n^2}{4}.$$

Exercice 3. Parmi les équations différentielles suivantes, déterminer celles qui admettent des solutions oscillantes

$$\begin{aligned}y''(x) + (\sin^2 x + 1)y(x) &= 0, \\y''(x) - x^2 y(x) &= 0, \\y''(x) + \frac{1}{x}y(x) &= 0.\end{aligned}$$

Exercice 4. Considérons l'équation de Bessel d'ordre λ suivante

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right)y(x), \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (\text{E-4})$$

1. On pose $u(x) = \sqrt{x}y(x)$. Montrer que l'EDO (E-4) s'écrit alors sous la forme équivalente :

$$u''(x) + \left(1 - \frac{4\lambda^2}{4x^2}\right)u(x) = 0. \quad (\text{E-5})$$

2. En comparant l'EDO (E-5) avec l'EDO $u''(x) + u(x) = 0$, déterminer le nombre des zéros des solutions non nulles de (E-5) en fonction de λ . Conclure les résultats obtenus auparavant, pour l'équation de Bessel (E-4).

3. (3) On prend $\lambda = \frac{1}{2}$. Trouver une solution générale pour (E-4) dans ce cas, puis déterminer les zéros de chaque solution indépendante.