Cours déstiné aux étudiants de 1ère année master

Spécialité

Mathématiques

Option : EDP et applications

Intitulé

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES 1

Enseignée par

Halima Meddour

Année Universitaire

2020-2021

TABLE DES MATIÈRES

1

INITIATIONS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

1.1 INTRODUCTION

Une équation différentielle est un modèle destiné à décrire l'évolution, au cours du temps, d'un système physique ou abstrait décrit par un nombre fini de paramètres. On appelle espace d'état X du système l'ensemble dans lequel cet état est à priori autorisé à varier, et dans lequel on le recherche. Cet espace est supposé de **dimension fini**, (par exemple : $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ ou tout espace vectoriel de dimension fini, ou encore tout sous ensemble non vide ouvert de l'un de ces espaces. l'inconnu est une fonction dépendant d'un paramètre temps, à valeurs dans l'esppace des états. Une équation différentielle est une relation entre **dérivées de la fonction inconnue** $t \to x(t)$.
Avant de faire une mise en départ, donnons quelques exemples.

Exemple 1. **(1)** *On modélise la croissance $x(t)$ d'une quantité radioactive dans un espace d'états $X = \mathbb{R}_+$, par l'équation différentielle*

$$x'(t) = -ax(t)$$

.

(2) *La position d'une bille roulant dans un bol sans frottement est modélisé dans un espace d'état X qui est une surface ouverte de* $\mathbb{R}^3$ *(X est la surface du bol), l'équation différentielle est*

$$mx''(t) = -mge_y + R(x(t)),$$

où m *la masse de le bille,* g *la force de gravité,* e_y *le vecteur unitaire verticale et* $R(x)$ *est la réaction exercée par le bol sur la bille.*

On notera par convention t la variable de temps, qui sera une variable réelle qui varie toujours dans **un intervalle** de $\mathbb{R}$.

1.2 DÉFINITIONS

Définition 1.2.1. (équation déterministe) *Une équation est dite déterministe si toute solution* $x(t)$ *de cette équation, définie sur un intervalle de temps* $I =]a, b[$*, est entièrement déterminée par ses valeurs sur un intervalle de temps* $]a, a + \varepsilon[$*, avec* ε *est arbitrairement petit.*

Cela signifie que si $x(t)$ et $\widetilde{x}(t)$ sont deux solutions sur $]a, b[$, telles que

$$x(t) = \widetilde{x}(t), \quad t \in]a, a + \varepsilon[,$$

alors

$$x(t) = \widetilde{x}(t), \quad t \in]a, b[.$$

Par suite on peut dire que **le système est entièrement prédictible à partir de son observation initiale**.

Exemple 2. *Il est facile de vérifier que l'équation* $x'(t) = -ax(t)$ *est déterministe, tandis que l'équation* $|x'(t)| \leq 1$ *n'est pas déterministe.*

De ce fait, on va restreidre notre étude le long de ce cours aux équations différentielles de la forme $x'(t) = f(t, x(t))$ ou $x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$. De telles équations sont dites explicites car la dérivée de plus haut degré de $x(t)$ est donnée comme **une fonction des dérivées de degré inférieur**. Cependant, une définition plus générale autorise des équations implicites.

Définition 1.2.2. **(1)** *Une "EDO", équation différentielle ordinaire, est une équation de la forme*

$$F\big(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(n)}(t)\big) = 0,$$

où n est un entier et $x^{(j)}(\cdot)$ est la dérivée d'ordre j de $x(\cdot)$ par rapport à t. On appelle n l'ordre de l'équation différentielle.

(2) *Une EDO explicite est une EDO de la forme*

$$x^{(n)}(t) = G(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(n-1)}(t)$$

(3) *Une EDO est* **linéaire** *si elle est définie par une fonction F linéaire, et polynomiale si elle est définie par une fonction F polynomiale.*

Exemple 3. **(1)** *L'EDO $x''(t) = (x'(t))^3 + x^2(t) + 1$ est une équation explicite polynomiale non linéaire.*

(2) *L'EDO $(x''(t))^2 x(t) + (x'(t))^2 = 1$ est une équation implicite polynomiale non linéaire.*

Remarque 1. *On peut réecrire toute EDO comme une EDO d'ordre un, d'une manière simple et importante : si l'on a une EDO*

$$F\big(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(n)}(t)\big) = 0,$$

on définit une nouvelle fonction inconnue

$$z(t) = (x(t), x'(t), \cdots, x^{(n-1)}(t).$$

Et si par exemple $x(t)$ varie dans l'espace d'états $X = \mathbb{R}$, alors $z(t)$ varie dans l'espace d'états $Z = \mathbb{R}^n$.

Ainsi, la nouvelles équation prendra la forme

$$F\big(t, z_1(t), z_2(t), \cdots, z_{n-1}(t), z'_{n-1}(t)\big) = 0.$$

Exemple 4. *Soit l'EDO polynomiale*

$$x''(t) = x^3(t) - a^2(t) + 2tx'(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si on pose

$$z(t) = (x(t), x'(t)) \equiv (z_1(t), z_2(t)).$$

Alors

$$\begin{aligned} z'_1(t) &= x'(t) = z_2(t) \\ z'_2(t) &= x''(t) = x^3(t) - a^2(t) + 2tx'(t) = z_1^3(t) - az_1^2(t) + 2tz_2(t). \end{aligned}$$

Donc, si on pose

$$f(t, z_1(t), z_2(t)) = \big(z_2(t) z_1^3(t) - az_1^2(t) + 2tz_2(t)\big),$$

l'EDO aura la forme

$$z'(t) = f(t, z(t)).$$

Il faut remarquer que **l'ordre de l'équation a été réduit de** 2 **à** 1**, mais la dimension de l'espace d'état est passée de** 1 **à** 2. C'est un phénomène général !

Soit une EDO explicite du premier ordre

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{1.3.1}$$

Pour chaque état z, le vecteur

$$f(t, z)$$

est la variation de la solution "quand elle prend la valeur z". Par ailleurs la fonction $z \to f(t, z)$ est une fonction à valeurs **vectorielles** ou encore **champ de vecteurs**, on peut donc la représenter comme une famille de vecteurs qui dépendent du temps t, telle que $f(t, z)$ a son origine en z. De plus, imposer une **régularité** sur f, revient à parler de la régularité de la variation de ce vecteur en fonction de z et t. Réciproquement, un champ de vecteurs définit une EDO.

Définition 1.3.1. *(courbe intégrale) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Le champ de vecteurs $(t, x) \to f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ définit une EDO*

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{1.3.2}$$

On dit que les **solutions** *de* (1.3.2) *sont* **les courbes intégrales du champ de vecteurs** $f(t, x)$.

Remarque 2. *Si $f(t, x)$ est un champ de vecteurs, une courbe intégrale $y(t)$ est* **tangente** *en chaque temps t à ce champ de vecteurs. Par suite, la résolution d'une EDO est étroitement liée à un problème que l'on peut formuler en termes purement géométriques.*

Définition 1.3.2. *(équilibre d'une EDO) Soit $f(t, x)$ un champ de vecteurs défini dans $I \times \Omega$. On appelle* **équilibre** *associé à f, tout point $x \in \Omega$ tel que*

$$f(t, x) = 0, \quad \forall t \in I. \tag{1.3.3}$$

Les équilibres sont donc **les états** x **invariants par l'évolution du système** *: c-à-d que si le système est au départ dans l'état* x*, il y reste au cours du temps* t*.*

Définition 1.3.3. *(EDO autonome) Une EDO est dite autonome, si elle est définie par* **un champ stationnaire***, c-à-d indépendant de la variable* t*. On peut érire donc une EDO autonome sous forme*

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{1.3.4}$$

Remarque 3. *Tout EDO est équivalente à une EDO autonome. Cela se montre en introduisant* **un "temps auxilaire"***, que nous allons noter* s*, en considérant la nouvelle variable comme partie des données et en faisant en sorte qu'elle coincide automatiquement, le long de la solution, avec le temps naturel* t*. En effet, soit* $f(t,x)$ *un champ de vecteurs défini sur* $I \times \Omega$ *et introduisons une nouvelle variable que l'on note* s*, et on note* $y = (x,s)$ *la nouvelle inconnue, explicitement, ce sera une fonction* $(x(t), s(t))$*. On définit alors la nouvelle EDO par*

$$x'(s) = f(s, x(s)) \tag{1.3.5}$$

$$s'(t) = 1 \tag{1.3.6}$$

La deuxième équation implique $s(t) = t + c$*, où* c *est une constante. Si l'on impose alors une condition* $s(t_0) = t_0$ *où* t_0 *est un temps quelconque dans l'intervalle* I*, alors* s *et* t *conicideront automatiquement : pour toute solution,* $s(t) = t$*. En posant donc*

$$F(x,s) \equiv (f(s,x), 1),$$

on aura

$x'(t) = f(t, x(t))$ *implique* $y'(t) = F(t)$

Cela vient donc avec **une dimension supplémentaire dans l'espace des états et une condition supplémentaire** $s(t_0) = t_0$*.*

Si toutes les équations peuvent se transformer en équations autonomes du premier ordre, il faut *bien s'attendre à ce que ces dernières* **ne soient en général pas résolubles éxplicitement***. De plus on va voir (dans la suite du cours) que même les équations d'ordre* 1*, explicites, autonomes, en dimension* 1*,* **ne sont pas résolubles explicitement***, par exemple résoudre* $x'(t) = f(x(t))$ *se ramène en dimension* 1*, à calculer une primitive de* $\frac{1}{f}$*, ce qui est en général impossible à faire explicitement.*

Il existe cependant plusieurs exceptions notables : des situations dans lesquelles un calcul explicite est possible. La plus importante est le cas des **équations linéaires à coeffcients constants**, c-à-d des EDO vectorielles prenant la forme $x'(t) = Ax(t)$, où A ou matrice $n \times n$.

Proposition 1.3.4. *Soient A une matrice réelle $n \times n$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors l'EDO*

$$x'(t) = Ax(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.3.7}$$

se résout en

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.3.8}$$

En particulier, la solution est déterminée par sa valeur en t_0, et l'espace des solutions est exactement de dimension n.

Ici la fonction exponentielle matricielle est définie par

$$e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$$

On rappel que si la matrice A est triangulaire inférieure, alors e^A est aussi triangulaire inférieure, et les coefficients de la diagonale sont les exponentielles des coefficients de la diagonale de A. De plus, le déterminant de l'exponentielle coincide avec l'exponentielle de la trace, c-à-d

$$dete^A = e^{tr(A)}.$$

Exemple 5. **(1)** *L'EDO* $x'(t) = \alpha x(t)$*, se résout en* $x(t) = x(t_0)e^{\alpha(t-t_0)}$*.*

(2) *L'EDO* $x''(t) = -x(t)$*, se résout pour* $t_0 = 0$ *sous forme* $x(t) = x(0)\cos t + x'(0)\sin t$*. On peut écrire cette EDO d'ordre deux sous forme d'un système d'EDO d'ordre un, pour ce faire on pose* $z(t) = (x(t), x'(t))$*, d'où on obtient* $z'(t) = Az(t)$ *avec* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ *et une solution est* $z(t) = e^{At}z(0)$*, ce qui donne la formule précédente.*

Dans le cas général, en **l'absence de solution explicite, on se retrouve forcé de faire une étude qualitative des solutions.**

Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continue et $x_0 \in \Omega$.

Définition 1.3.5. *(problème de Cauchy) On appelle problème de Cauchy, la recherche d'un intervalle* J *tel que* $t_0 \in J \subset I$ *et d'une solution* $x : J \to \Omega$ *telle que* $x(\cdot)$ *soit dérivable sur* J *et*

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), \quad t \in J \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{PC}$$

Proposition 1.3.6. *Le problème de Cauchy* (PC) *est équivalent à*

$$x(t) = x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \quad \forall t \in J. \tag{1.3.9}$$

Démonstration. Comme f est continue et $x(\cdot)$ est dérivable alors $x'(\cdot)$ est continue et donc $x(\cdot)$ est de classe C^1. Ainsi, on peut écrire

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} x'(s)ds.$$

On remplace $x'(s)$ par $f(s, x(s))$, on trouve la formule désirée.

Inversement, il suffit de dériver la formule intégrale pour obtenir $x'(t) = f(t, x(t))$ et on évalue en t_0 pour avoir $x(t_0) = x_0$. $\square$

Définition 1.3.7. *(solution locale) Un couple $(J, x(\cdot))$ est appelé solution locale du problème de Cauchy* (PC) *si et seulement si $t_0 \in J \subset I$, $x \in C^1(J)$, J un voisinage de t_0 dans I et pour tout $t \in J$: $x'(t) = f(t, x(t))$ et $x(t_0) = x_0$.*

Définition 1.3.8. *(prolongement de solution) Soient $(J_1, x_1(\cdot))$ et $(J_2, x_2(\cdot))$ deux solutions de* (PC)*. On dit que $(J_1, x_1(\cdot))$ prolonge $(J_2, x_2(\cdot))$ si et seulement si $J_2 \subset J_1$ et $x_1(t) = x_2(t), \quad \forall t \in J_2$.*

Définition 1.3.9. *(solution maximale) Une solution locale est dite maximale si tous ses prolongements lui sont égaux.*

Définition 1.3.10. *(solution globale) Une solution est dite globale si $J = I$.*

Lemme 1.3.11. *Si f est de classe C^k sur $I \times \Omega$, alors toute solution locale $x(\cdot)$ est de classe C^{k+1} sur J*

Démonstration. La preuve se fait par réccurence sur k en utilisant l'EDO dans (PC). □

Exemple 6. **(1)** *Soit le problème de Cauchy*

$$x'(t) = -2tx^2(t), \quad t \in \mathbb{R}$$
$$x(0) = 1$$

En supposant que $x(t) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = -2t$$

En intégrant par rapport à t on trouve

$$-\frac{1}{x(t)} + -\frac{1}{x(0)} = -t^2.$$

Alors une solution s'écrit

$$x(t) = \frac{x(0)}{1 + t^2 x(0)}.$$

Mais $x(0) = 1$, *d'où*

$$x(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

On remarque que $x(\cdot)$ *est bien définie sur* $\mathbb{R}$, *d'où* $J = \mathbb{R}$, *c-à-d la solution est globale.*

(2) *Le problème de Cauchy*

$$x'(t) = 2tx^2(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x(0) = 1$$

admet une solution (faire une démarche analogue au premier exemple), sous forme

$$x(t) = \frac{1}{1-t^2}, \quad t \in J =]-1, 1[$$

cette solution est maximale mais non globale ($J \neq \mathbb{R}$).

Lemme 1.3.12. *(lemme de Gronwall) Soient* $u, v : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *deux fonctions continues, telle qu'il existe une constante* $c > 0$ *avec*

$$u(t) \leq c + \int_0^t u(\tau)v(\tau)d\tau; \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$u(t) \leq ce^{\int_0^t v(\tau)d\tau}; \forall t \in [0, T].$$

Démonstration. Posons

$$f(t) = c + \int_0^t u(\tau)v(\tau)d\tau, \quad c > 0,$$

$$g(t) = ce^{\int_0^t v(\tau)d\tau}, \quad c > 0.$$

On veut démontrer que $f(t) \leq g(t), \forall t \in [0,T]$. On remarque que $g(t) > 0$ et que $f(0) = g(0) = c$. Il suffit donc de prouver que

$$\frac{d}{dt}(\frac{f(t)}{g(t)}) \leq 0$$

Pour cela, on a

$$f'(t) = u(t)v(t) \leq f(t)v(t),$$

mais par hypothèse

$$u(t) \leq c + \underbrace{\int_0^t u(\tau)v(\tau)d\tau}_{f(t)}, \forall t \in [0,T],$$

et

$$g'(t) = cv(t)e^{\int_0^t v(\tau)d\tau} = g(t)v(t),$$

donc

$$f'(t)g(t) - f(t)g'(t) \leq f(t)v(t)g(t) - f(t)g(t)v(t) = 0,$$

par suite

$$\frac{d}{dt}(\frac{f(t)}{g(t)}) \leq 0.$$

Il vient que

$$\frac{f(t)}{g(t)} \leq \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{c}{c} = 1,$$

d'où le résultat

$$f(t) \leq g(t), \forall t \in [0,T].$$

□

On donne aussi deux autre formes de ce lemme (on les cites sans démonstration).

Lemme 1.3.13. *(lemme de Gronwall : forme Différentielle)*

Soit $u : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction continue , dérivable sur* $[0, T]$*. Soit* $v : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction continue telle que*

$$\frac{d}{dt}u(t) \leq v(t)u(t), \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$u(t) \leq u(0)e^{\int_0^t v(\tau)d\tau}, \forall t \in [0, T].$$

Lemme 1.3.14. *(lemme de Gronwall : version générale) Soient* $u, v : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *deux fonctions continues et soit* $c : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$u(t) \leq c(t) + \int_0^t u(\tau)v(\tau)d\tau; \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$u(t) \leq c(t)e^{\int_0^t v(\tau)d\tau}; \forall t \in [0, T].$$

1.4 EXERCICES

Exercice 1.

1. Déterminer $x(\frac{3}{4})$ si $x(\cdot)$ est solution du problème de Cauchy

$$x'(t) = x^3(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x(0) = 1.$$

2. Déterminer $x(\frac{1}{4})$ si $x(\cdot)$ est solution du problème de Cauchy

$$x'(t) = x^{\frac{1}{3}}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x(\frac{1}{2}) = 0$$

Exercice 2.

Montrer que l'EDO

$$x'(t) = (\frac{1}{1+t^2})e^{-x^2 \sin^2 t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

admet une solution unique qui vérifie la condition initiale $x(0) = 1$. Puis vérifier que cette solution est globale (c-à-d $J = \mathbb{R}$).

Exercice 3.

Soit l'EDO du second ordre suivante

$$x''(t) + q(t)x(t) = 0, \quad t \in J \subset \mathbb{R}, \quad x(t) \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

où $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée.

(1) Discuter le domaine de définition d'une solution maximale de (1).

(2) Soit $x(\cdot)$ une solution de (1). Montrer que si $x(\cdot)$ s'annule, alors ses zéros sont isolés ou bien $x(\cdot)$ est identiquement nulle.

(3) Ecrire l'EDO (1) sous forme d'un système d'EDO d'ordre un sous forme

$$z'(t) = A(t)z(t). \tag{2}$$

(1.1) Rappeler la notion de résolvante $R(t,s)$ associée à (2) ainsi que ses propriétés.

(1.2) Déterminer la valeur du déterminant de la résolvante en $s = 0$: $\det R(t,0)$.

(1.3) Montrer que la résolvante $R(t,0)$ admet une valeur propre λ telle que $|\lambda| \leq 1$.

2

THÉORÈMES D'EXISTENCE ET UNICITÉ DES SOLUTIONS

2.1 EXISTENCE ET UNICITÉ LOCALE

L'essentiel de la théorie des équations différentielles est fondé sur l'existence et l'unicité locale des solutions pour le problème dit "problème de Cauchy", c-à-d une équation différentielle assortie d'une "condition initiale". En effet, considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) &= f(t, x(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R} \\ x(t_0) &= x_0, t_0 \end{cases} \tag{2.1.1}$$

ici I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $x : I \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ une fonction inconnue définie sur I à valeurs dans Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, et $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction donnée.

Théorème 1. *(Theorème de Cauchy -Lipschitz) Soient f une fonction continue sur $I \times \Omega$ et $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. On suppose qu'il existe un voisinage de $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ et $l > 0$ telle que pour tous (t, x_1) et (t, x_2) de e voisinage on a*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq l\|x_1 - x_2\|.$$

Alors on a les propriétés suivantes

(i) *Existence : il existe $\tau > 0$ et $x(\cdot)$ de classeC^1 sur $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ à valeurs dans Ω solution du problème (2.1.1).*

(ii) *Unicité : Si $\phi(\cdot)$ est une autre solution de (2.1.1), alorselle coincide avec $x(\cdot)$ sur un intervalle d'intérieur non vide inclus dans $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.*

(iii) *Régularité : Si de plus, f est de classe C^k, $k \geq 1$ alors $x(\cdot)$ est de classe C^{k+1}.*

Remarque 4. *Si f est de classe C^1 sur Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ ou si la différentielle de f $D_x f$ est continue en (t, x), alors f est est localement lipschitzienne en x par rapport àt sur tout compact et convexe K inclus dans Ω.*

Démonstration. Pour simplifier la peuve, on va démontrer le résultat sur un intervalle $[t_0, t_+]$ avec $t_+ = t_0 + \tau$ et le cas de l'intervalle $[t_0 - \tau, t_0]$ se déduit par changement de variable $t \longrightarrow 2t_0 - t$ et cela pour éviter des valeurs absolues.
On commence par choisir un voisinage de (t_0, x_0), (appelé **cylindre de sécurité**)

$$C(t_+, r) = [t_0, t_+] \times \bar{B}(x_0, r) \subset I \times \Omega,$$

où $t_+ > t_0$ et $r > 0$ et $\bar{B}(x_0, r)$ est la boule fermée de centre x_0 et rayon r dans laquel f est bornée, disons par une constante M et aussi f est lipschitzienne dans cet voisinage, c-à-d

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq l\|x_1 - x_2\|, \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in C(t_+, r)$$

(ici $\|\cdot\|$ représente la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$).
L'utilité du cylindre $C(t_+, r)$ intervienne dans le fait d'empecher la solution construite de sortir du domaine de définition $I \times \Omega$ de f .
On va en effet montrer que, quitte à diminuer t_+, le problème de Cauchy (2.1.1) admet une solution $x(\cdot)$ telle que

$$(t, x(t)) \in C(t_+, r), \quad \forall t \in [t_0, t_+].$$

L'idée est de résoudre l'équation intégrale

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \tag{2.1.2}$$

avec $x(t_0) = x_0$.

En effet, si $x(\cdot)$ est une solution continue de cette équation, alors le second membre est de classe C^1, donc $x(\cdot)$ l'est aussi, et en dérivant les deux membres de (2.1.2) on voit qu'elle est solution du problème de Cauchy (2.1.1). Plus généralement, on montre par une récurrence immédiate que si f est de classe $C^k, \quad k \geq 1, alors$x$(\cdot)$ est de classe C^{k+1}. Pour résoudre (2.1.2), on peut invoquer le théorème du point fixe de Banach-Picard. Donc, on construit la solution par la méthode de Picard, qui sera une limite de la suite $(x^n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x^0(\cdot) \equiv x_0$ et

$$x^{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x^n(s))ds. \tag{2.1.3}$$

(1) Etape1. On montre tout d'abord que $x^n(\cdot)$ est une suite de fonctions **continues** sur $[t_0, t_+]$ et à valeurs dans $\bar{B}(x_0, r)$, du moins pour t_+ assez proche de t_0. En effet par récurrence sur n

- la fonction $x^0 \equiv x_0$ ($x_0 \in \Omega$) est trivialement continue et à valeurs dans $\bar{B}(x_0, r)$.
- supposons que l'on a construit $x^n(\cdot)$ continue sur $[t_0, t_+]$ et à valeurs dans $\bar{B}(x_0, r)$. Alors la formule de récurrence définit ci-dessus est continue et telle que

$$\begin{aligned} \|x^{n+1}(t) - x_0\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x^n(s))\|ds \\ &\leq (t_+ - t_0)M, \end{aligned}$$

pour tout $t \in [t_0, t_+]$. Or que $(t_+ - t_0)M \leq r$, alors la fonction $x^{n+1}(\cdot)$ est bien à valeurs dans $\bar{B}(x_0, r)$

(2) **Etape 2.** On montre que la suite $x^n(\cdot)$ est une suite de Cauchy et donc convergente dans l'espace $C([t_0, t_+]; \mathbb{R}^n$ (muni de la norme sup).

En effet, par récurrence sur n, on a

$$\begin{aligned} \|x^{n+1}(t) - x^n(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x^n(s)) - f(s, x^{n-1}(s))\| ds \\ &\leq l \int_{t_0}^{t} \|x^n(s) - x^{n-1}(s)\| ds \\ &\leq \cdots \leq \frac{l^n (t_+ - t_0)^n}{n!} sup_{t \in [t_0, t_+]} \|x^1(t) - x_0\|. \end{aligned}$$

D'où

$$sup_{t \in [t_0, t_+]} \|x^{n+p}(t) - x^n\| \leq \sum_{j=n}^{n+p-1} \frac{l^j (t_+ - t_0)^j}{j!} sup_{t \in [t_0, t_+]} \|x^1(t) - x_0\|.$$

Ce qui tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$, car la série $\sum_n \frac{l^n a^n}{n!}$ est convergente (ici $a = [t_0, t_+]$).

Donc, $x^n(\cdot)$ est une suite de Cauchy dans $C([t_0, t_+]; \mathbb{R}^n)$, d'où elle est convergente de limite notée $x(\cdot)$. De plus, par passage à la limite dans l'expression (2.1.3) on voit que $x(\cdot)$ vérifie alors

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds$$

D'où $x(\cdot)$ est solution du problème de Cauchy (2.1.1).

(3) **Etape 3.** Prouvons l'unicité "locale"de telle solution. Pour faire supposons que (2.1.1) admet une autre solution $\phi(\cdot)$ définie sur un intervalle $[t_0, t_1] \subset [t_0, t_+]$ et à valeurs dans $\bar{B}(x_0, r)$ (**différente de** $x(\cdot)$ **mais de meme donnée initiale** $\phi(t_0) =$

$x(t_0) = x_0$).)

On a par définition, pour tout $t \in [t_0, t_1]$

$$x(t) - \phi(t) = \int_{t_0}^{t} \big(f(s, x(x)) - f(x, \phi(s))\big) ds,$$

doù

$$\|x(t) - \phi(t)\| \leq l \int_{t_0}^{t} \|x(s) - \phi(x)\| ds$$

D'où par application du lemme de Gronwall, on aboutit que

$$\|x(t) - \phi(t)\| \leq e^{lt} \|x(t_0) - \phi(t_0)\| = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Cela implique que

$$x(t) = \phi(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

□

2.2 SOLUTIONS MAXIMALES

Soit $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contininue et localement lischitzienne en tout point $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ (**ceci nous permettra d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz qui assure l'existence d'une solution unique localement en temps** t). Cela nous guide d'introduire les notions de solution maximale ainsi que glabale. Avant de commencer, lessons nous tout d'abord citer le lemme suivant qui est**un résultat d'unicité globale**.

Lemme 2.2.1. *Sous les hypothèses du théorème 1, si $x_1(\cdot) \in C^1(J_1;\Omega)$ et $x_2(\cdot) \in C^1(J_2;\Omega)$ sont deux solutions de (2.1.1) sur les intervallesJ_1 et J_2 respectivement, et s'il existe $t_0 \in J_1 \cap J_2$ telle que $x_1(t_0) = x_2(t_0)$, alors*

$$x_1(t) = x_2(t), \quad \forall t \in J_1 \cap J_2.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que l'intervalle $J_1 \cap J_2$ est un connexe non vide. Pour cela, par définition on voit que $J_1 \cap J_2$ est un intervalle non vide. De plus, d'après l'unicité locale des solutions on a l'ensemble

$$\{t \in J_1 \cap J_2 : x_1(t) = x_2(t)\}$$

est un ouvert. De plus, cet ensemble est fermé par continuité de $x_1(\cdot)$ et $x_2(\cdot)$. Donc $J_1 \cap J_2$ est connexe non vide. □

Remarque 5. *Une conséquence fondamentale de ce lemme est* **qu'il existe un plus grand intervalle J sur lequel le problème de Cauchy** (2.1.1) **admet une solution**. *Cette unique solution sur l'intervalle J est appelée* **solution maximale**, *c-à-d*

Définition 2.2.2. *(solution maximale) Une solution du problème de Cauchy* (2.1.1) *sur un intervalle $J \in I$ est dite maximale si on ne peut pas la prolonger à I/J.*

Par suite, J est nécessairement **ouvert** (sinon en appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz à son extrémité on prolongerait la solution).

Définition 2.2.3. *(solution globale) Lorsque $J = I$ on dit que cette solution est globale.*

Remarque 6. *La question naturelle qui se pose à ce stade est de savoir* **à quelles conditions une solution maximale est globale.**

Théorème 2. *(théorème des bouts) Sous les hypothèses du yhéorème de Cauchy-Lipschitz 1, soit $x(\cdot) \in C^1(J;\Omega)$ une solution maximale de* (2.1.1). *Soit b la borne supérieure de I et $\beta \leq b$ la* *borne supérieure de J. Alors, ou bien $\beta = b$ ou bien "$x(\cdot)$ sort de tout compact K de Ω, c-à-d pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $\lambda < \beta$ telle que*

$$x(t) \in \Omega/K, \quad \forall t \geq \lambda, \text{avec} t \in J.$$

Pour la démonstration, on aura besoin du lemme suivant

Lemme 2.2.4. *Supposons que f soit continue, bornée et Lipschitzienne par rapport à x dans $\bar{t}2\bar{s}, \bar{t} + 2\bar{s}] \times \bar{B}(\bar{x}, 2r)$ pour $\bar{t} > 0$ et $r > 0$. Alors il existe $s \in]0, \bar{s}]$ telle que pour tout $(t_0, x_0) \in [\bar{t}\bar{s}, \bar{t} + \bar{s}] \times \bar{B}(\bar{x}, r)$, la solution maximale du problème de Cauchy (2.1.1) soit définie sur un intervalle contenant $[\bar{t}2\bar{s}, \bar{t} + 2\bar{s}] \times \bar{B}(\bar{x}, 2r)$.*

Démonstration. Supposons $\beta < b$ et raisonnons par l'absurde. S'il existe un compact K et une suite t_n tendant vers β telle que $x(t_n) \in K, \forall n$, quitte à en extraire une sous-suite, on pourrait supposer qu'elle converge vers $\bar{x} \in K$. Soient $\bar{t} > 0$ et $r > 0$ tel que f soit bornée et Lipschitzienne par rapport à x dans $[\beta 2\bar{t}, \beta + 2\bar{t}] \times \bar{B}(x, 2R)$. Alors, d'après le lemme 2.2.4, il existe $s \leq \bar{t}$ telle que pour tout $(t_0, x_0) \in [\beta s, \beta + s] \times \bar{B}(\bar{x}, r)$ la solution maximale du problème de Cauchy (2.1.1) est définie sur un intervalle contenant $[t_0 s, t_0 + s]$. Or, pour n assez grand, $(t_n, x(t_n)) \in [\beta s, \beta + s] \times \bar{B}(\bar{x}, r)$ et$t_n + s > \beta$. Ceci contredit le fait que $x(\cdot)$ soit une solution maximale. D'où le théorème est prouvé. □

Remarque 7. *(explosion en temps fini) Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, le théorème précédent, s'exprime comme suit : Pour une solution maximale non globale $x(\cdot) \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$, on a*

- *si $\beta \equiv supJ < supI$, alors*

$$im_{t \to \beta^+} \|x(t)\| = +\infty$$

- *si $\alpha \equiv infJ > infI$, alors*

$$im_{t \to \alpha_-} \|x(t)\| = +\infty$$

Remarque 8. *Ce phénomène est indépendant de la régularité de la fonction$f$.*

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$ et f est globalement lipschitzienne, c-à-d qu'il existe $l > 0$ telle que pour tout (t, x_1) et (t, x_2) dans $I \times \mathbb{R}^n$:

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq l\|x_1 - x_2\|,$$

il n'y a pas de risque de sortir de son domaine de définition ni du domaine de validité de sa constante de Lipschitz. On aura donc le résultat global suivant

Théorème 3. *Soit f une fonction continue sur $I \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et globalement lipschitzienne par rapport à x. Alors pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, il existe une solution unique $x(\cdot) \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ du problème (2.1.1).*

Remarque 9. *On peut dire que ce théorème est très restrictif en utilisation, il ne s'applique pas,* **en général**, *à des problèmes dont f est non linéaires. En revanche, il s'applique aux fonctions f affines. D'où, on a le théorème suivant*

Théorème 4. *Considérons le problème de Cauchy affine*

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + b(t), \tag{2.3.1}$$

où $A(\cdot)$ est continue sur I à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ (l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans lui meme) et $b(\cdot)$ est continue sue I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Alors, toute solution maximale de (2.3.1) est globale.

Un autre cas où la remarque précédante est applicable, est le théorème suivant

Théorème 5. *Supposons que f est uniformément bornée sur $I \times \mathbb{R}^n$, alors toute solution maximale du problème de Cauchy (2.1.1) est globale.*

Exercice 1.

Soit F une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$lim_{\|x\|\to+\infty}F(x) = +\infty$$

et soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) & = -\nabla F(x(t)), \quad t \in \mathbb{R} \\ x(t_0) & = x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.4.1}$$

(1) Montrer que (2.4.1) admet une solution unique maximale définie sur un intervalle $]T_-, T_+[$ de $\mathbb{R}$.

(2) Vérifier que F est décroissante puis déduire que

$$T_+ = +\infty.$$

(3) Prenons $n = 1$ et $F(x) = \frac{x^4}{4}$. Montrer que dans ce cas qu'on peut avoir $T_- > -\infty$.

Solution

(1 Comme F est de classe C^2 alors $\nabla F(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_{j=\overline{1,n}}$ est de classe C^1. De plus, ici $\Omega = \mathbb{R}^n$ qui est convexe. D'où ∇F est localement lipschitzienne en x uniformément par rapport à t. Donc, par le biais du théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème (2.4.1) admet une solution unique maximale locale définie sur un intervalle $J =]T_-, T_+[$ de $\mathbb{R}$.

(2) Pour tout $t \in]T_-, T_+[$ et pour tout $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ solution de (2.4.1) sur $]T_-, T_+[$, on a

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(x(t))}{\partial x_j} \frac{dx_j(t)}{dt},$$

mais $\frac{dx_j(t)}{dt} = -\frac{\partial F(x(t))}{\partial x_j}$ car $x'(t) = -\nabla(F(x(t))$. D'où

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) = -\sum_{j=1}^{n} |\frac{\partial F(x(t))}{\partial x_j}|^2 \leq 0.$$

Cela signifie que F est décroissante. Par conséquent, pour tout $t \geq t_0$, on a $F(x(t)) \leq F(x_0)$.

Pour démontrer que $T_+ = +\infty$, on suppose le contraire, c-7à-d $T_+ < +$. D'après la remarque 7. du cours (explosion en temps fini : ici $J =]T_-, T_+[, \quad \beta = supJ = T_+, \quad I = \mathbb{R}, \quad supI = +\infty$, si $< supI$ alors $lim_{t \to \beta_+} \|x(t)\| = +\infty$, donc ici $T_+ < +\infty$ implique que $lim_{t \to T_+} \|x(t)\| = +\infty$ ce qui donne une contradiction car par hypothèse F vérifie $lim_{\|x\| \to +\infty} F(x) = +\infty$. Il résulte que $T_+ = +\infty$.

(3) Pour $n = 1$, $F(x) = \frac{x^4}{4}, \quad x \in \mathbb{R}$ d'où $F'(x) = x^3$, on aura donc le problème de Cauchy

$$x'(t) = -x^3(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x(t_0) = x_0 \neq 0$$

On peut ici prendre $t_0 = 0$ sans perdre de généralité. D'après la question (1), ce problème admet une solution unique maximale $x(\cdot)$ définie sur un intervalle $]T_-, T_+[$ (avec $T_- < t_0 = 0$) à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ici $n = 1$) et d'après la question (2) $T_+ = +\infty$. S'ilexiste un point $t_1 \in]T_-, +\infty[$ vérifiant $x(t_1) = 0$ alors par unicité globale on aura $x(t) = 0, \forall t \in]T_-, +\infty[$ et cala contredit le fait que $x_0 \neq 0$, d'où $x(t) \neq 0, \quad \forall t \in]T_-, +\infty[$. On peut donc écrire

$$\frac{x'(t)}{x^3(t)} = -1$$

Si on intègre par rapport à t, on trouve

$$-\frac{1}{2x^2(t)} + \frac{1}{2x_0^2} = -t + t_0$$

Il vient que $t_0 - t < \frac{1}{2x_0^2}$, c-à-d $t > t_0 - \frac{1}{2x_0^2}$.

Dans ce cas la solution unique vérifie

$$x^2(t) = \frac{x_0^2}{1 + 2x_0^2(t - t_0)}, \quad t > t_0 - \frac{1}{2x_0^2}$$

mais $x(t)$ est définie sur $]T_-, +\infty[$. Par suite $T_- = t_0 - \frac{1}{2x_0^2}$.

Exercice 2.

Considérons l'équation de Riccati

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) & = x^2(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ x(0) & = x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.4.2}$$

(1) Montrer que (2.4.2) admet une solution maximale définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ contenent $t_0 = 0$.

(2) Soit $y(\cdot)$ une fonction continue définie sur J vérifiant

$$y(t) \leq e^{\int_0^t y(s)ds}, \quad \forall t \in J.$$

En utilisant la question (1), montrer que

$$y(t) \leq \frac{1}{1-t}, \quad \forall t \in J.$$

(3) Considérons maintenent l'équation de Riccati non homogène

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) & = x^2(t) + t^2, \quad t \in \mathbb{R} \\ x(0) & = 0 \end{cases} \tag{2.4.3}$$

(3.1) Soit $x(\cdot)$ la solution maximale de (2.4.3). Posons

$$z(t) = e^{-\int_0^t x(s)ds}.$$

Ecrire une équation différentielle d'ordre deux pour $z(\cdot)$ et montrer que $z(0) = z''(0) = z^{(3)}(0) = 0$.

(3.2) Désoudre l'équation différentielle en $z(\cdot)$ en cherchant une solution sous forme de série entière.

(3.3) Déduire que $x(\cdot)$ est définie sur un intervalle $]-a, a[$ avec $a \in]2, +\infty[$.

Solution

(1) L'xistence d'une solution unique unique maximale $x(t)$ de (2.4.2) sur un intervalle J est assuré par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Déterminons l'intervalle d'existence J. Pour cela, on remarque tout d'abord que l'équation de Riccati dans (2.4.2) est une EDO autonome (ici $f(x(t)) = x^2(t), \quad t \in \mathbb{R}$ et $\Omega = \mathbb{R}$), donc seule la solution nulle est globale, par suite $x(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. On peut écrire alors

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = 1$$

Par intégration en t, on trouve

$$-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x(t_0)} = t - t_0,$$

ou bien

$$\frac{1}{x(t)} = \frac{1}{x_0} - (t - t_0)$$

Donc $t - t_0 < \frac{1}{x_0}$, c-à-d $t < t_0 + \frac{1}{x_0}$. et $lim_{t \to t_0 + \frac{1}{x_0}} |x(t)| = +\infty$ Dans cet exercice $t_0 = 0$, par suite si $x_0 < 0$ alors la solution maximale $x(t)$ est définie sur $[\frac{1}{x_0}, +\infty[$ et si $x_0 > 0$ alors la solution maximale est définie sur $]-\infty, \frac{1}{x_0}[$.

(2) Si on pose $h(t) = e^{\int_0^t y(s)ds}, onvoitque$h$estbiendfiniecar$y$estcontinuesur$J$.Deplus$h$estdrivableet$h'(t) $\leq h^2(t)$. Comme h ne s'annule pas, alors

$$\frac{h'(t)}{h^2(t)} \leq 1$$

Si on intègre en t, on trouve (en remarquant que $h(0) = 1$)

$$-\frac{1}{h(t)} + 1 \leq t$$

D'où $h(t) \leq \frac{1}{1-t}$, avec $t < 1$ car h est positive par définition. Finalement, par hypothèse $y(t) \leq h(t)$, donc $y(t) \leq \frac{1}{1-t}$.

3.1 Comme $z(t) = e^{-\int_0^t x(s)ds}$ où $x(\cdot)$ est solution maximale de (2.4.3) (c-à-d $x'(t) = x^2(t) + t^2, \quad x(0) = 0$), alors

$$z'(t) = -x(t)z(t), \quad z''(t) - x'(t)z(t) + x^2(t)z(t) = -t^2 z(t), \quad z^{(3)}(t) = -2tz(t) - t^2 z(t)$$

L'équation différentielle d'ordre deux en $z(\cdot)$ est

$$\frac{d^2}{dt^2} z(t) = -t^2 z(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

De plus $z(0) = 1, \quad z'(0) = 0, \quad z''(0) = 0, \quad z^{(3)}(0) = 0$.

(3.1) On cherche une solution pour l'EDO $z''(t) = -t^2 z(t)$, sous les conditions initiales $z(0) = 1, \quad z'(0) = 0$ sous forme d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad t \in]-R, R[$, avec

R le rayon de convergence de la série et les coefficients sont données par la relation $a_k = \frac{z^{(k)}(0)}{k!}$.

On voit que $a_0 = z(0) = 1, \quad a_1 = z'(0) = 0, \quad a_2 = \frac{z''(0)}{2} = 0, \quad a_3 = \frac{z'^{(3)}(0)}{6} = 0.$

De plus, pour tout $t \in]-R, R[$ on a

$$\begin{aligned} z''(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}t^n \\ &= -t^2 z(t) = -t^2 (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n) \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+2}) \\ &= -\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} t^n. \end{aligned}$$

Par identification, on trouve $a_{n+2} = \frac{a_{n-2}}{(n+1)((n+2)}$ ou bien $a_n = \frac{a_{n-4}}{n(n-1)}$, avec $n \geq 4$.

Cette dernière relation montre que les coefficients a_n sont nulle si $n \neq 4k, \quad k \in \mathbb{N}^*$.

Pa suite, on peut écrire

$$a_{4k} = \frac{(-1)^k}{4k(4k-1)(4k-4)(4k-5)\cdots \times 4 \times 3}$$

En particulier, $|a_{4k}| \leq \frac{1}{k!4^k}$, d'où

$$\sum_k |a_{4k} t^{4k}| \leq e^{\frac{t^4}{4}}.$$

D'où $R = +\infty$.

Exercice 3.

Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) & = 2te^{-t^2} + \frac{x^5(t)}{1+x^4(t)} cos(te^{x(t)}), \quad t \in \mathbb{R} \\ x(0) & = 1 \end{cases} \tag{2.4.4}$$

(1) Montrer que (2.4.4) admet une solution unique maximale $x(\cdot)$ définie sur un intervalle $]T_-, T_+[$ de $\mathbb{R}$ contenant $t_0 = 0$.

(2) Soit $\phi(\cdot)$ la solution maximale de (2.4.4). En utilisant la formule intégrale de (2.4.4), montrer que

$$|\phi(t)| \leq 2 + |\int_0^t |\phi(s)|, \quad \forall t \in J$$

(3) Déduire que $\phi(t) \leq 2e^{|t|}, \quad \forall t \in J$.

(4) Montrer que la solution est globale c-à-d $J = \mathbb{R}$.

Solution

(1) Posons $f(t,x) = 2te^{-t^2} + \frac{x^5}{1+x^4} cos(te^x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2$. On voit que f est bien définie et de classe C^1 sur le convexe $\mathbb{R}^2$, donc elle est localement lipschitzienne par rapport à x uniformement en t. D'où par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème (2.4.4) admet une solution unique maximale définie sur $J =]T_-, T_+[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec $t_0 = 0 \in J$. De plus cette solution est de classe C^2 car f est de classe C^1, d'où cette solution est de classe C^1.

(2) Pour tout $t \in [0, T_+[$, on a

$$\phi(t) = \phi(0) + \int_0^t \phi'(s)ds = 1 + \int_0^t f(s, \phi(s))ds$$

(car ϕ solution de (2.4.4) donc $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$ et $\phi(0) = 1$). Alors

$$|\phi(t)| \leq 1 + \int_0^t 2se^{-s^2} ds + \int_0^t \frac{\phi^5(s)}{1+\phi^4(s)} ds$$

En utilisant le fait que $\frac{|a|^5|}{1+a^4} \leq |a|$, on trouve

$$|\phi(t)| \leq 1 + [-e^{-s^2}]_0^t + \int_0^t |\phi(s)| ds \leq 2 + \int_0^t |\phi(s)| ds.$$

De la même façon sur l'intervalle $t \in]T_-, 0]$, seulement ici $|\int_0^t f(s, \phi(s)| \leq 1 + \int_t^0 |\phi(s)| ds$. Donc, pour tout $t \in]T_-, T_+[$ on a

$$|\phi(t)| \leq 2 + |\int_0^t |\phi(s)| ds|.$$

(3) On appliquons le lemme de Gronwall sur l'expression $|\phi(t)| \leq 2 + |\int_0^t |\phi(s)| ds|.$, on trouve

$$|\phi(t)| \leq 2e^{|\int_0^t ds|}$$

d'où le résultat.

(4) Par l'absurde, supposons que $T_+ < +\infty$. Donc par le critère d'explosion en temps fini on aura forcément que $lim_{t \to T_+} |\phi(t)| = +\infty$. Mais d'après la question (3) on a $|\phi(t)| \leq 2e^{|t|}$, ce qui donne $lim_{t \to T_+} |\phi(t)| \leq lim_{t \to T_+} 2e^{|t|} = 2e^{T_+} < +\infty$. D'où la contradiction. Par suite, on obtient que

$$T_+ = +\infty$$

De la même façon, on arrive à

$$T_- = -\infty$$

Donc $J = \mathbb{R}$, c-à-d la solution maximale de (2.4.4) est globale.