RÉPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MUSTAPHA BEN BOULAID BATNA –2–

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

LABORATOIRE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES

PARTIELLES ET APPLICATIONS, LEDPA

Support Pédagogique

Déstiné à la première année Master

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

Option : EDP et Applications

INTITULÉ

ETUDE QUALITATIVE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Présenté par

HALIMA MEDDOUR

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2021–2022

TABLE DES MATIÈRES

1

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La démarche scientifique cherche à décrire, comprendre et agir sur le monde qui nous entoure. Dans de nombreux cas, cela passe par la prédiction de phénomènes naturels variés : l'orbite d'une planète, la trajectoire d'un boulet de canon ou d'une fusée, le courant qui va s'établir dans un cours d'eau, le champ électrique au sein d'une expérience de physique, $\cdots$. Les mathématiques joue un rôle fondamental dans le traitement de ces questions, qui ont constitué une motivation majeure.

En mathématique, la phase de description passe par l'établissement d'un modèle mathématique, idéalisation ou reflet mathématique abstrait.
L'art de la prédiction a été révolutionné par un évènement majeur de l'histoire des sciences, survenu au milieu du 17 ème siècle : la naissance des **équations diférentielles** et plus généralement des équations d'évolution. Ces équations cherchent à prédire mathématiquement l'évolution de phénomènes en étudiant leurs tendances. Les fondateurs de cette révolution étaient tout à la fois des mathématiciens et physiciens, nous citons à l'instar : Newton, Leibniz, Huygens $\cdots$. Avec eux on put maitriser la trajectoire des boulets de canon, des planètes, et de bien d'autres systèmes mécaniques.

Aujourd'hui, le domaine des équations différentielles reste en expansion rapide, et il s'est imposé dans notre univers : ces équations ont envahi toutes les sciences et toute l'industrie, et elles alimentent également les nouvelles spéculations de la physique théorique.

Ce cours présente une introduction au sujet, ou bien une initiation, tant la matière est vaste. En particulier, ce cours s'articule autour l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires dites autonomes. Plus précisément, ce support pédagogique est composé de cinq Chapitres.

Le premier Chapitre est introductif dans lequel nous allons commencer par un rappel des notions élémentaires autour des équations différentielles.

Dans le second Chapitre, nous allons présenter une théorie fondamentale d'existence et unicité locale des solutions puis une théorie d'existence globale.

Le troisième Chapitre consiste à l'étude qualitative des équations différentielles particulières dites autonomes. Plus précisément, nous allons étudier la stabilté des solutions stationnaires dites points d'équilibres.

Dans le quatrième Chapitre nous allons présenter la théorie de stabilité au sens de Lyapunov pour les équations différentielles autonomes, où le point dorsal sera l'étude des ensembles dites $w-$ limites et leurs relations avec la stabilité des points d'équilibres.

Le dernier Chapitre sera dédié à l'étude qualitative des équations différentielles nommées Sturm-Liouville. En particulier l'objectif sera l'étude de la stabilité des points d'équilibres des équations en question et le développement en séries entières des solutions.

On mentionne que ce cours est déstiné aux étudiants de la première année master en mathématiques, option équations différentielles aux dérivées partielles et applications "EDPA". De plus, chaque chapitre est enrichi par une série d'exercices, dont la majorité d'entre eux est suivi par une solution détaillée.

Finalement, on rappel que ce cours a été réalisé en utilisant les document suivant [1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

2

OUTILS DE BASE POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

2.1 GÉNÉRALITÉS

• Une équation différentielle est un modèle destiné à décrire l'évolution, au cours du temps, d'un système physique ou abstrait décrit par un nombre fini de paramètres.
• On appelle espace d'état X du système, l'ensemble dans lequel cet état est à priori autorisé à varier, et dans lequel on le recherche. Cet espace est supposé de **dimension fini**, (par exemple : $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ ou tout espace vectoriel de dimension fini, ou encore tout sous ensemble non vide ouvert de l'un de ces espaces.
• L'inconnu est une fonction dépendante d'un paramètre temps, à valeurs dans l'espace des états.
• Une équation différentielle est une relation entre les **dérivées de la fonction inconnue** $t \mapsto x(t)$.

Avant de faire une mise en départ, donnons quelques exemples.

Exemple 1. **(1)** *On modélise la croissance $x(\cdot)$ d'une quantité radioactive dans un espace d'états $X = \mathbb{R}_+$, par l'équation différentielle*

$$x'(t) = -ax(t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

(2) *La position d'une bille roulant dans un bol sans frottement est modélisée dans un espace d'état X qui est une surface ouverte de $\mathbb{R}^3$ (X est la surface du bol). L'équation différentielle de ce modèle est donnée par*

$$mx''(t) = -mg\vec{e_y} + R(x(t)),$$

où m est la masse de le bille, g la force de gravité, $\vec{e_y}$ le vecteur unitaire verticale et $R(x)$ est la réaction exercée par le bol sur la bille.

On notera par convention t la variable de temps, qui sera une variable réelle qui varie toujours dans **un intervalle** de $\mathbb{R}$.

2.2 DÉFINITIONS

Définition 2.2.1. (Equation déterministe) *Une équation est dite déterministe si toute solution $x(\cdot)$ de cette équation, définie sur un intervalle de temps $I =]a, b[$, est entièrement déterminée par ses valeurs sur un intervalle de temps $]a, a+\varepsilon[$, avec ε est arbitrairement petit.*

Cela signifie que si $x(\cdot)$ et $\tilde{x}(\cdot)$ sont deux solutions sur $]a, b[$, telles que

$$x(t) = \tilde{x}(t), \quad t \in]a, a+\varepsilon[,$$

alors
$$x(t) = \tilde{x}(t), \quad t \in]a, b[.$$
Par suite on peut dire que **le système est entièrement prédictible à partir de son observation initiale**.

Exemple 2. *Il est facile de vérifier que l'équation $x'(t) = -ax(t)$ est déterministe, tandis que l'équation $|x'(t)| \leq 1$ n'est pas déterministe.*

De ce fait, on va concentrer notre étude le long de ce cours aux équations différentielles de la forme
$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{ou} \quad x''(t) = f(t, x(t), x'(t)).$$
De telles équations sont dites explicites car la dérivée de plus haut degré de $x(t)$ est donnée comme **une fonction des dérivées de degré inférieur**. Cependant, une définition plus générale autorise des équations implicites.

Définition 2.2.2. **(1)** *Une équation différentielle ordinaire "EDO", est une équation de la forme*
$$f\big(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(n)}(t)\big) = 0,$$
où n est un entier et $x^{(j)}(\cdot)$ est la dérivée d'ordre j de $x(\cdot)$ par rapport à t. On appelle n l'ordre de l'équation différentielle.

(2) *Une EDO est dite explicite si elle s'écrit sous la forme*
$$x^{(n)}(t) = g(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(n-1)}(t))$$

(3) *Une EDO est* **linéaire** *si elle est définie par une fonction f linéaire, et polynomiale si elle est définie par une fonction f polynomiale.*

Exemple 3. **(1)** *L'EDO $x''(t) + \alpha x'(t) + \beta x(t) = 0$ est une équation explicite linéaire.*

(1) *L'EDO $x''(t) = (x'(t))^3 + x^2(t) + 1$ est une équation explicite polynomiale non linéaire.*

(3) *L'EDO $(x''(t))^2 x(t) + (x'(t))^2 = 1$ est une équation implicite polynomiale non linéaire.*

Remarque 1. *On peut réecrire toute EDO comme une EDO d'ordre un, d'une manière simple et importante*
Si l'on a une EDO
$$f\big(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(n)}(t)\big) = 0,$$
on définit une nouvelle fonction inconnue
$$z(t) = (x(t), x'(t), \cdots, x^{(n-1)}(t)).$$
Si par exemple $x(\cdot)$ varie dans l'espace d'états $X = \mathbb{R}$, alors $z(\cdot)$ varie dans l'espace d'état $Z = \mathbb{R}^n$. Ainsi, la nouvelle équation prendra la forme
$$f\big(t, z_1(t), z_2(t), \cdots, z_{n-1}(t), z'_{n-1}(t)\big) = 0.$$

Exemple 4. *Soit l'EDO polynomiale*
$$x''(t) = x^3(t) - a^2(t) + 2tx'(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si on pose

$$z(t) = (x(t), x'(t)) \equiv (z_1(t), z_2(t)).$$

Alors

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= x'(t) = z_2(t) \\ z_2'(t) &= x''(t) = x^3(t) - a^2(t) + 2tx'(t) = z_1^3(t) - az_1^2(t) + 2tz_2(t). \end{aligned}$$

Donc, si on pose

$$f(t, z_1(t), z_2(t)) = \big(z_2(t) z_1^3(t) - az_1^2(t) + 2tz_2(t)\big),$$

l'EDO aura la forme

$$z'(t) = f(t, z(t)).$$

Remarque 2. *On remarque que* **l'ordre de l'équation a été réduit de** 2 **à** 1**, mais la dimension de l'espace d'état est passée de** 1 **à** 2. *C'est un phénomène général.*

2.3 NOTIONS ÉLÉMENTAIRES

Soit une EDO explicite du premier ordre

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{2.3.1}$$

Pour chaque état z, le vecteur $f(t, z)$ est la variation de la solution "quand elle prend la valeur z". Par ailleurs la fonction $z \mapsto f(t, z)$ est une fonction à valeurs **vectorielles** ou encore **champ de vecteurs**, on peut donc la représenter comme une famille de vecteurs qui dépendent du temps t, telle que $f(t, z)$ a son origine en z. De plus, imposer une **régularité** sur f, revient à parler de la régularité de la variation de ce champ de vecteurs en fonction de z et t. Réciproquement, un champ de vecteurs définit une EDO.

Définition 2.3.1. *(Courbe intégrale) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Le champ de vecteurs $(t, x) \mapsto f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ définit une EDO*

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{2.3.2}$$

On dit que les **solutions** *de* (2.3.2) *sont* **les courbes intégrales du champ de vecteurs** $f(t, x)$.

Remarque 3. *Si $f(t, x)$ est un champ de vecteurs, une courbe intégrale $y(t)$ est* **tangente** *en chaque temps t à ce champ de vecteurs. Par suite, la résolution d'une EDO est étroitement liée à un problème que l'on peut formuler en termes purement géométriques.*

Définition 2.3.2. *(Point d'équilibre d'une EDO) Soit $f(t, x)$ un champ de vecteurs défini sur $I \times \Omega$. On appelle* **point d'équilibre** *associé à f, tout point $x \in \Omega$ tel que*

$$f(t, x) = 0, \quad \forall t \in I. \tag{2.3.3}$$

Les équilibres sont donc **les états x invariants par l'évolution du système** *: c-à-d que si le système est au départ dans l'état x, il y reste au cours du temps t.*

Définition 2.3.3. *(EDO autonome) Une EDO est dite autonome, si elle est définie par* **un champ stationnaire***, c-à-d indépendant de la variable t. On peut écrire donc une EDO autonome sous la forme*

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{2.3.4}$$

Remarque 4. *Toute EDO est équivalente à une EDO autonome. Cela se montre en introduisant* **un "temps auxilaire"**, *que nous allons noter s, en considérant la nouvelle variable comme partie des données et en faisant en sorte qu'elle coincide automatiquement, le long de la solution, avec le temps naturel t. En effet, soit $f(t,x)$ un champ de vecteurs défini sur $I \times \Omega$ et introduisons une nouvelle variable que l'on note s, et on note $y = (x,s)$ la nouvelle inconnue, explicitement, ce sera une fonction $(x(t), s(t))$. On définit alors la nouvelle EDO par*

$$\begin{cases} x'(s) & = f(s, x(s)) \\ s'(t) & = 1 \end{cases} \tag{2.3.5}$$

La deuxième équation implique que $s(t) = t + c$, où c est une constante. Si l'on impose alors une condition $s(t_0) = t_0$ où t_0 est un temps quelconque dans l'intervalle I, alors s et t conicideront automatiquement : pour toute solution, $s(t) = t$. En posant donc

$$F(x,s) \equiv (f(s,x), 1),$$

on aura $x'(t) = f(t, x(t))$ implique $y'(t) = F(t)$.
Cela vient donc avec **une dimension supplémentaire dans l'espace des états et une condition supplémentaire** $s(t_0) = t_0$.
Si toutes les équations peuvent se transformer en équations autonomes du premier ordre, il faut bien s'attendre à ce que ces dernières **ne soient en général pas résolubles éxplicitement**. *De plus on va voir (dans la suite du cours) que même les équations d'ordre 1, explicites, autonomes, en dimension 1,* **ne sont pas résolubles explicitement**, *par exemple résoudre $x'(t) = f(x(t))$ se ramène en dimension 1, à calculer une primitive de $\frac{1}{f}$, ce qui est en général impossible à faire explicitement.*

Il existe cependant plusieurs exceptions notables : des situations dans lesquelles un calcul explicite est possible. La plus importante est le cas des **équations linéaires à coeffcients constants**, c-à-d des EDO vectorielles prenant la forme $x'(t) = Ax(t)$, où A est une matrice d'ordre n.

Proposition 2.3.4. *Soient A une matrice réelle $n \times n$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors l'EDO*

$$x'(t) = Ax(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.3.6}$$

se résout en

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x(t_0), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.3.7}$$

En particulier, la solution est déterminée par sa valeur en t_0, et l'espace des solutions est exactement de dimension n.

Ici la fonction exponentielle matricielle est définie par

$$e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$$

On rappel que si la matrice A est triangulaire inférieure, alors e^A est aussi triangulaire inférieure, et les coefficients de la diagonale sont les exponentielles des coefficients de la diagonale de A. De plus, le déterminant de l'exponentielle coincide avec l'exponentielle de la trace, c-à-d

$$Det e^A = e^{tr(A)}.$$

Exemple 5. (1) *L'EDO $x'(t) = \alpha x(t)$, se résout en $x(t) = x(t_0)e^{\alpha(t-t_0)}$.*

(2) *L'EDO $x''(t) = -x(t)$, se résout pour $t_0 = 0$ sous forme $x(t) = x(0)\cos t + x'(0)\sin t$. On peut écrire cette EDO d'ordre deux sous forme d'un système d'EDO d'ordre un. Pour ce faire, on pose $z(t) = (x(t), x'(t))$, d'où on obtient $z'(t) = Az(t)$ avec $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Une solution est alors $z(t) = e^{At}z(0)$, ce qui donne la formule précédente.*

Dans le cas général, en **l'absence de solution explicite, on se retrouve forcé de faire une étude qualitative des solutions.**
Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continue et $x_0 \in \Omega$, où Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.3.5. *(Problème de Cauchy) On appelle problème de Cauchy, la recherche d'un intervalle J tel que $t_0 \in J \subset I$ et d'une solution $x : J \to \Omega$ telle que $x(\cdot)$ soit dérivable sur J et*

$$\begin{cases} x'(t) & = f(t, x(t)), \quad t \in J \\ x(t_0) & = x_0. \end{cases} \tag{2.3.8}$$

Proposition 2.3.6. *Le problème de Cauchy (2.3.8) est équivalent à*

$$x(t) = x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \quad \forall t \in J.$$

Démonstration. Comme f est continue et $x(\cdot)$ est dérivable alors $x'(\cdot)$ est continue et donc $x(\cdot)$ est de classe C^1. Ainsi, on peut écrire

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} x'(s)ds.$$

On remplace $x'(s)$ par $f(s, x(s))$, on trouve la formule désirée.
Inversement, il suffit de dériver la formule intégrale pour obtenir $x'(t) = f(t, x(t))$ et on évalue en t_0 pour avoir $x(t_0) = x_0$. $\square$

Quel que soit le sujet mathématique, ce n'est pas la forme particulière de l'équation qui compte, ce sont ses solutions : d'ailleurs il existe souvent de très nombreuses manières de changer l'équation sans changer les solutions. Dans l'optique des équations d'évolution, on observe initialement l'état du système, par exemple en un temps t_0, et on cherche à prédire le futur, disons l'état en un temps $t > t_0$ (ou parfois à reconstituer le passé, soit retrouver l'état en un temps $t < t_0$).

Définition 2.3.7. *(Solution locale) Un couple $(J, x(\cdot))$ est appelé solution locale du problème de Cauchy (2.3.8) si et seulement si $t_0 \in J \subset I$, $x \in C^1(J)$, J un voisinage de t_0 dans I et pour tout $t \in J$: $x'(t) = f(t, x(t))$ et $x(t_0) = x_0$.*

Définition 2.3.8. *(Prolongement de solution) Soient $(J_1, x_1(\cdot))$ et $(J_2, x_2(\cdot))$ deux solutions de (2.3.8). On dit que $(J_1, x_1(\cdot))$ prolonge $(J_2, x_2(\cdot))$ si et seulement si $J_2 \subset J_1$ et $x_1(t) = x_2(t), \quad \forall t \in J_2$.*

Définition 2.3.9. *(Solution maximale) Une solution locale est dite maximale si tous ses prolongements lui sont égaux.*

Définition 2.3.10. *(Solution globale) Une solution est dite globale si $J = I$.*

Lemme 2.3.11. *Si f est de classe C^k sur $I \times \Omega$, alors toute solution locale $x(\cdot)$ est de classe C^{k+1} sur J*

Démonstration. La preuve se fait par réccurence sur k en utilisant l'EDO dans (2.3.8). □

Exemple 6. **(1)** *Soit le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) &= -2tx^2(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ x(0) &= 1 \end{cases}$$

On suppose que $x(t) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$, d'où on peut écrire $\frac{x'(t)}{x^2(t)} = -2t$. En intégrant par rapport à t on trouve $-\frac{1}{x(t)} + -\frac{1}{x(0)} = -t^2$.
Alors une solution s'écrit $x(t) = \frac{x(0)}{1+t^2 x(0)}$. Mais $x(0) = 1$, d'où $x(t) = \frac{1}{1+t^2}$.
On remarque que $x(\cdot)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, d'où $J = \mathbb{R}$, c-à-d la solution est globale.

(2) *Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) &= 2tx^2(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ x(0) &= 1 \end{cases}$$

admet une solution (faire une démarche analogue au premier exemple), sous forme

$$x(t) = \frac{1}{1-t^2}, \quad t \in J =]-1, 1[.$$

Cette solution est maximale mais non globale ($J \neq \mathbb{R}$).

Lemme 2.3.12. *(Lemme de Gronwall) Soient $u, v : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues, telle qu'il existe une constante $c > 0$ avec*

$$u(t) \leq c + \int_0^t u(\tau)v(\tau)d\tau; \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$u(t) \leq c e^{\int_0^t v(\tau)d\tau}; \forall t \in [0, T].$$

Démonstration. Posons

$$f(t) = c + \int_0^t u(\tau)v(\tau)d\tau, \quad c > 0,$$

$$g(t) = c e^{\int_0^t v(\tau)d\tau}, \quad c > 0.$$

On veut démontrer que $f(t) \leq g(t), \forall t \in [0, T]$. On remarque que $g(t) > 0$ et que $f(0) = g(0) = c$. Il suffit donc de prouver que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) \leq 0$$

Pour cela, on a $f'(t) = u(t)v(t) \leq f(t)v(t)$. Mais par hypothèse

$$u(t) \leq \underbrace{c + \int_0^t u(\tau)v(\tau)d\tau}_{f(t)}, \forall t \in [0, T],$$

et
$$g'(t) = cv(t)e^{\int_0^t v(\tau)d\tau} = g(t)v(t).$$
Donc $f'(t)g(t) - f(t)g'(t) \leq f(t)v(t)g(t) - f(t)g(t)v(t) = 0$. Par suite $\frac{d}{dt}(\frac{f(t)}{g(t)}) \leq 0$. Il vient que
$$\frac{f(t)}{g(t)} \leq \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{c}{c} = 1.$$
D'où le résultat
$$f(t) \leq g(t), \forall t \in [0, T].$$

□

On donne aussi deux autre formes de ce lemme (on les cites sans démonstration).

Lemme 2.3.13. *(Lemme de Gronwall : forme Différentielle)*
Soit $u : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue , dérivable sur $[0, T]$. Soit $v : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que
$$\frac{d}{dt}u(t) \leq v(t)u(t), \forall t \in [0, T].$$
Alors
$$u(t) \leq u(0)e^{\int_0^t v(\tau)d\tau}, \forall t \in [0, T].$$

Lemme 2.3.14. *(Lemme de Gronwall : version générale) Soient $u, v : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues et soit $c : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que*
$$u(t) \leq c(t) + \int_0^t u(\tau)v(\tau)d\tau; \forall t \in [0, T].$$
Alors
$$u(t) \leq c(t)e^{\int_0^t v(\tau)d\tau}; \forall t \in [0, T].$$

3

THÉORÈMES FONDAMENTALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

3.1 EXISTENCE ET UNICITÉ LOCALE

L'essentiel de la théorie des équations différentielles est fondé sur l'existence et l'unicité locale des solutions pour le problème dit "problème de Cauchy", c'est-à- dire une équation différentielle assortie d'une "condition initiale". En effet, considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) &= f(t, x(t)), \quad t \in I \subset \mathbb{R} \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

ici I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $x : I \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ une fonction inconnue définie sur I à valeurs dans Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, et $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction connue.

3.1.1 *Theorème de Cauchy -Lipschitz*

Théorème 1. *(Theorème de Cauchy -Lipschitz) Soient f une fonction continue sur $I \times \Omega$ et $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. On suppose qu'il existe un voisinage de $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ et $l > 0$ telle que pour tous (t, x_1) et (t, x_2) de ce voisinage on a*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq l\|x_1 - x_2\|.$$

Alors on a les propriétés suivantes

- **(i)** *Existence : il existe $\tau > 0$ et $x(\cdot)$ de classe C^1 sur $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ à valeurs dans Ω solution du problème (3.1.1).*
- **(ii)** *Unicité : si $\phi(\cdot)$ est une autre solution de (3.1.1), alors elle coincide avec $x(\cdot)$ sur un intervalle d'intérieur non vide inclus dans $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.*
- **(iii)** *Régularité : si de plus, f est de classe C^k, $k \geq 1$ alors $x(\cdot)$ est de classe C^{k+1}.*

Remarque 5. *Si f est de classe C^1 sur Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ ou si la différentielle de f $D_x f$ est continue en (t, x), alors f est est localement lipschitzienne en x par rapport à t sur tout compact et convexe K inclus dans Ω.*

Démonstration. Pour simplifier la preuve, on va démontrer le résultat sur un intervalle $[t_0, t_+]$ avec $t_+ = t_0 + \tau$ et le cas de l'intervalle $[t_0 - \tau, t_0]$ se déduit par changement de variable $t \longrightarrow 2t_0 - t$ et cela pour éviter des valeurs absolues.
On commence par choisir un voisinage de (t_0, x_0), (appelé **cylindre de sécurité**)

$$C(t_+, r) = [t_0, t_+] \times \bar{B}(x_0, r) \subset I \times \Omega,$$

où $t_+ > t_0$ et $r > 0$ et $\bar{B}(x_0, r)$ est la boule fermée de centre x_0 et rayon r dans laquel f est bornée, disons par une constante M et aussi f est lipschitzienne dans cet voisinage, c-à-d

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq l\|x_1 - x_2\|, \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in C(t_+, r),$$

où $\|\cdot\|$ représente la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$).
L'utilité du cylindre $C(t_+, r)$ intervienne dans le fait d'empêcher la solution construite de sortir du domaine de définition $I \times \Omega$ de f. En effet, on va montrer que, quitte à diminuer t_+, le problème de Cauchy (3.1.1) admet une solution $x(\cdot)$ telle que

$$(t, x(t)) \in C(t_+, r), \quad \forall t \in [t_0, t_+].$$

L'idée repose sur la résolution de l'équation intégrale

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \tag{3.1.2}$$

avec $x(t_0) = x_0$.
En effet, si $x(\cdot)$ est une solution continue de cette équation, alors le second membre est de classe C^1, donc $x(\cdot)$ l'est aussi, et en dérivant les deux membres de (3.1.2) on voit qu'elle est solution du problème de Cauchy (3.1.1). Plus généralement, on montre par récurrence que si f est de classe $C^k, \quad k \geq 1, alors$x$(\cdot)$ est de classe C^{k+1}.
Pour résoudre (3.1.2), on peut invoquer **le théorème du point fixe de Banach-Picard**. Donc, on construit la solution par la méthode de Picard, qui sera une limite de la suite $(x^n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x^0(\cdot) \equiv x_0$ et

$$x^{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x^n(s))ds. \tag{3.1.3}$$

(1) Etape1. On montre tout d'abord que $x^n(\cdot)$ est une suite de fonctions **continues** sur $[t_0, t_+]$ et à valeurs dans $\bar{B}(x_0, r)$, du moins pour t_+ assez proche de t_0. En effet par récurrence sur n :
• La fonction $x^0 \equiv x_0$ ($x_0 \in \Omega$) est trivialement continue et à valeurs dans $\bar{B}(x_0, r)$.
• Supposons que l'on a construit $x^n(\cdot)$ continue sur $[t_0, t_+]$ et à valeurs dans $\bar{B}(x_0, r)$. Alors la formule de récurrence définit ci-dessus est continue et telle que

$$\begin{aligned}\|x^{n+1}(t) - x_0\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x^n(s))\|ds \\ &\leq (t_+ - t_0)M,\end{aligned}$$

pour tout $t \in [t_0, t_+]$. Or que $(t_+ - t_0)M \leq r$, alors la fonction $x^{n+1}(\cdot)$ est bien à valeurs dans $\bar{B}(x_0, r)$.

(2) Etape 2. On montre que la suite $x^n(\cdot)$ est une suite de Cauchy et donc convergente dans l'espace $C([t_0, t_+]; \mathbb{R}^n)$, (muni de la norme sup). En effet, par récurrence sur n, on a

$$\begin{aligned}\|x^{n+1}(t) - x^n(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x^n(s)) - f(s, x^{n-1}(s))\| ds \\ &\leq l \int_{t_0}^{t} \|x^n(s) - x^{n-1}(s)\| ds \\ &\leq \cdots \\ &\leq \frac{l^n (t_+ - t_0)^n}{n!} \sup_{t\in[t_0,t_+]} \|x^1(t) - x_0\|.\end{aligned}$$

D'où

$$sup_{t\in[t_0,t_+]} \|x^{n+p}(t) - x^n\| \leq \sum_{j=n}^{n+p-1} \frac{l^j (t_+ - t_0)^j}{j!} sup_{t\in[t_0,t_+]} \|x^1(t) - x_0\|.$$

Ce qui tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$, car la série $\sum_n \frac{l^n a^n}{n!}$ est convergente (ici $a = [t_0, t_+]$).
Donc, $x^n(\cdot)$ est une suite de Cauchy dans $C([t_0, t_+]; \mathbb{R}^n)$, d'où elle est convergente et on note sa limite par $x(\cdot)$. De plus, par passage à la limite dans l'expression (3.1.3) on voit que $x(\cdot)$ vérifie

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds$$

D'où $x(\cdot)$ est solution du problème de Cauchy (3.1.1).

(3) Etape 3. Montrons l'unicité "locale"de telle solution. Pour faire, supposons que (3.1.1) admet une autre solution $\phi(\cdot)$ définie sur un intervalle $[t_0, t_1] \subset [t_0, t_+]$ et à valeurs dans $\bar{B}(x_0, r)$. ($\phi(\cdot)$ **est différente de** $x(\cdot)$ **mais de même donnée initiale** $\phi(t_0) = x(t_0) = x_0$). On a par définition, pour tout $t \in [t_0, t_1]$

$$x(t) - \phi(t) = \int_{t_0}^{t} \big(f(s, x(x)) - f(x, \phi(s))\big) ds,$$

d'où

$$\|x(t) - \phi(t)\| \leq l \int_{t_0}^{t} \|x(s) - \phi(x)\| ds.$$

D'où par application du lemme de Gronwall, on aboutit que

$$\|x(t) - \phi(t)\| \leq e^{lt} \|x(t_0) - \phi(t_0)\| = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Ce qui implique

$$x(t) = \phi(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

□

3.1.2 *Solutions maximales*

Soit $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement lischitzienne en tout point $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ (**ceci nous permettra d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz qui assure l'existence d'une solution unique localement en temps** t). Cela nous guide d'introduire les notions de solution maximale ainsi que solution glabale.
Avant de commencer, on rappel le lemme suivant qui est **un résultat d'unicité globale**.

Lemme 3.1.1. *Sous les hypothèses du théorème 1, si $x_1(\cdot) \in C^1(J_1; \Omega)$ et $x_2(\cdot) \in C^1(J_2; \Omega)$ sont deux solutions de (3.1.1) sur les intervalles J_1 et J_2 respectivement, et s'il existe $t_0 \in J_1 \cap J_2$ telle que $x_1(t_0) = x_2(t_0)$, alors*

$$x_1(t) = x_2(t), \quad \forall t \in J_1 \cap J_2.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que l'intervalle $J_1 \cap J_2$ est un connexe non vide. Pour cela, par définition on voit que $J_1 \cap J_2$ est un intervalle non vide. De plus, d'après l'unicité locale des solutions on a l'ensemble

$$\{t \in J_1 \cap J_2 : x_1(t) = x_2(t)\}$$

est un ouvert. De plus, cet ensemble est fermé par continuité de $x_1(\cdot)$ et $x_2(\cdot)$. Donc $J_1 \cap J_2$ est connexe non vide. □

Remarque 6. *Une conséquence fondamentale de ce lemme est* **qu'il existe un plus grand intervalle** J **sur lequel le problème de Cauchy** (3.1.1) **admet une solution**. *Cette unique solution sur l'intervalle J est appelée* **solution maximale**, *c-à-d*

Définition 3.1.2. *(Solution maximale) Une solution du problème de Cauchy (3.1.1) sur un intervalle $J \in I$ est dite maximale si on ne peut pas la prolonger à I/J.*

Par suite, J est nécessairement **ouvert**. Sinon en appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz à son extrémité on prolongerait la solution.

Définition 3.1.3. *(Solution globale) Lorsque $J = I$, on dit que cette solution est globale.*

Remarque 7. *La question naturelle qui se pose à ce stade est de savoir* **à quelles conditions une solution maximale est globale.**

Exemple 7. **(1)** *Soit l'EDO $x'(t) = x^2(t)$, où $I = \mathbb{R}, \Omega = \mathbb{R}$. D'une part, la fonction nulle $x(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ est solution. D'autre part, si $x(\cdot)$ ne s'annule pas, on peut écrire*

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = 1.$$

Par intégration par rapport à t, on obtient une solution

$$x(t) = \frac{-1}{t + C}$$

Cette formule définie deux solutions, définies respectivement sur $]-\infty, -C[$ et sur $]-C, +\infty[$. Ces solutions sont maximales mais non globales. Dans cette exemple, la seule solution globale est la fonction nulle.

(2) *Soit le problème de Cauchy* $x'(t) = -x^2(t), \quad x(0) = 1$, *où* $I = \mathbb{R}, \Omega = \mathbb{R}$. *On voit que la fonction nulle* $x(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ *est solution. De plus, si* $x(\cdot)$ *ne s'annule pas, on peut écrire*

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = -1.$$

Par intégration par rapport à t et en tenant compte de la condition initiale, on obtient une solution

$$x(t) = \frac{1}{t+1}$$

qui est une solution maximale définie sur $J =]-1, +\infty[$ *mais non globale. Ce problème n'admet pas de solutions globales.*

3.1.3 *Théorème des bouts*

Théorème 2. *(Théorème des bouts) Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz 1, soit* $x(\cdot) \in C^1(J; \Omega)$ *une solution maximale de (3.1.1). Soit* b *la borne supérieure de* I *et* $\beta \leq b$ *la borne supérieure de* J. *Alors*

$$\beta = b \text{ ou bien } x(\cdot) \text{ sort de tout compact } K \text{ de } \Omega,$$

c-à-d pour tout compact $K \subset \Omega$, *il existe* $\lambda < \beta$ *telle que*

$$x(t) \in \Omega / K, \quad \forall t \geq \lambda \quad , \text{avec} \quad t \in J.$$

Pour la démonstration, on aura besoin du lemme suivant

Lemme 3.1.4. *Supposons que* f *soit continue, bornée et lipschitzienne par rapport à* x *dans* $\bar{t}2\bar{s}, \bar{t} + 2\bar{s}] \times \bar{B}(\bar{x}, 2r)$ *pour* $\bar{t} > 0$ *et* $r > 0$. *Alors il existe* $s \in]0, \bar{s}]$ *telle que pour tout* $(t_0, x_0) \in [\bar{t}\bar{s}, \bar{t} + \bar{s}] \times \bar{B}(\bar{x}, r)$, *la solution maximale du problème de Cauchy (3.1.1) soit définie sur un intervalle contenant* $[\bar{t}2\bar{s}, \bar{t} + 2\bar{s}] \times \bar{B}(\bar{x}, 2r)$.

Démonstration. Supposons $\beta < b$ et raisonnons par l'absurde. S'il existe un compact K et une suite t_n tendant vers β telle que $x(t_n) \in K, \forall n$, quitte à en extraire une sous-suite, on pourrait supposer qu'elle converge vers $\bar{x} \in K$. Soient $\bar{t} > 0$ et $r > 0$ tel que f soit bornée et lipschitzienne par rapport à x dans $[\beta 2\bar{t}, \beta + 2\bar{t}] \times \bar{B}(x, 2R)$. Alors, d'après le lemme 3.1.4, il existe $s \leq \bar{t}$ telle que pour tout $(t_0, x_0) \in [\beta s, \beta + s] \times \bar{B}(\bar{x}, r)$ la solution maximale du problème de Cauchy (3.1.1) est définie sur un intervalle contenant $[t_0 s, t_0 + s]$. Or, pour n assez grand, $(t_n, x(t_n)) \in [\beta s, \beta + s] \times \bar{B}(\bar{x}, r)$ et $t_n + s > \beta$. Ceci contredit le fait que $x(\cdot)$ soit une solution maximale. D'où le théorème est prouvé. □

3.1.4 *Explosion en temps fini*

Remarque 8. *(Explosion en temps fini) Si* $\Omega = \mathbb{R}^n$, *le théorème précédent, s'exprime comme suit :*
Pour une solution maximale non globale $x(\cdot) \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$, *on a*

(1) *Si* $\beta \equiv supJ < supI$, *alors*

$$\lim_{t \to \beta^+} \|x(t)\| = +\infty$$

(2) *Si* $\alpha \equiv \inf J > \inf I$, *alors*

$$\lim_{t \to \alpha_-} \|x(t)\| = +\infty$$

Remarque 9. *Ce phénomène est indépendant de la régularité de la fonction* f.

3.2 EXISTENCE GLOBALE

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$ et f est globalement lipschitzienne, c-à-d qu'il existe $l > 0$ telle que pour tout (t, x_1) et (t, x_2) dans $I \times \mathbb{R}^n$:

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq l\|x_1 - x_2\|,$$

il n'y a pas de risque de sortir de son domaine de définition ni du domaine de validité de sa constante de Lipschitz. On aura donc le résultat global suivant

3.2.1 *Théorèmes d'existence globale*

Théorème 3. *Soit* f *une fonction continue sur* $I \times \mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *et globalement lipschitzienne par rapport à* x. *Alors pour tout* $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, *il existe une solution unique* $x(\cdot) \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ *du problème* (3.1.1).

Remarque 10. *On peut dire que ce théorème est très restrictif en utilisation, il ne s'applique pas, en général, à des problèmes dont* f *est non linéaires. En revanche, il s'applique aux fonctions* f *affines. D'où, on a le théorème suivant*

Théorème 4. *Considérons le problème de Cauchy* **affine**

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + b(t), \tag{3.2.1}$$

où $A(\cdot)$ *est continue sur* I *à valeurs dans* $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *(l'espace des applications linéaires de* $\mathbb{R}^n$ *dans lui même) et* $b(\cdot)$ *est continue sur* I *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$. *Alors, toute solution maximale de* (3.2.1) *est* **globale**.

Un autre cas où la remarque précédante est applicable, est le théorème suivant

Théorème 5. *Supposons que* f *est* **uniformément bornée** *sur* $I \times \mathbb{R}^n$, *alors toute solution maximale du problème de Cauchy* (3.1.1) *est globale.*

3.3 CAS OÙ f EST SEULEMENT CONTINUE : "THÉORÈME D'ARZELA-PEANO"

Nous allons voir que si f est seulement continue, on a encore existence locale d'une solution mais on peut perdre l'unicité. On procède de la même manière que pour le théorème de Cauchy -Lipschitz, c'est à dire on commence par la situation modèle.

Théorème 6. *Soient* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, *a et b deux réels positifs et*

$$Q = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}$$

Soit f *une fonction continue sur* Q *et* $M > 0$ *telle que*

$$\sup \|f(t, x)\| \leq M, \quad (t, x) \in Q.$$

Alors, le problème de Cauchy (3.1.1) *admet une solution* (x, J) *où* $J = [t_0 - T, t_0 + T]$ *et* $T = \min(a, \frac{b}{M})$*, telle que* $x(t_0) = x_0$.

Corollaire 3.3.1. *Soit* $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction continue. Pour tout point* $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ *il existe une solution du problème* (3) *au voisinage de* (t_0, x_0) *telle que* $x(t_0) = x_0$ *.*

Remarque 11. *Il y a une différence entre les théorèmes de Cauchy-Lipschitz et d'Arzela- Peano. Le théorème de Cauchy-Lipschitz reste valable dans le cas où* f *est une fonction définie de* $I \times X$ *où* X *un espace de Banach (donc de dimension infinie). Par contre, le théorème d'Arzela-Peano est en général faux si on remplace* $\mathbb{R}^n$ *par un espace de dimension infinie. Cela se verra au niveau de la preuve, lorsqu'on utilisera le fait que la boule unité fermé de* $\mathbb{R}^n$ *est compacte, ce qui est toujours faux pour un espace de Banach de dimension infinie.*

Démonstration. Pour une démonstration de ce théorème, on peut consulter par exemple les références suivantes [1, 3, 4].

3.3.1 *Exemples d'existence et non unicité*

Voici quelques exemples pour lesquels on perd effectivement l'unicité

Exemple 8. **(1)** *Soit le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = 3x^{\frac{2}{3}}, t \geq 0 \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Ce problème admet deux solutions sur le même intervalle de temps J *:*

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0, \quad J = \mathbb{R} \\ x_2(t) &= t^3, \quad J = \mathbb{R} \end{aligned}$$

D'où le problème (3.3.1) *n'admet pas de solution unique sur* $\mathbb{R}$.

(2) *Considérons le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = 2|x|^{\frac{1}{2}}, t \geq 0 \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{3.3.2}$$

On peut vérifier que les fonctions $x_\lambda(\cdot)$ *pour* $\lambda > 0$*, données par*

$$x_\lambda(t) = \begin{cases} (t-\lambda)^2 & \text{si} \quad t \geq \lambda \\ 0 & \text{si} \quad t < \lambda \end{cases}$$

sont des fonctions C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *solutions du problème* (3.3.2).

3.4.1 *Continuité*

Comme au paragraphe précédant, on se place dans la situation modèle. Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On pose

$$Q = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}.$$

Pour $\lambda_0 \in \mathbb{R}^n$, on note :

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : \|\lambda - \lambda_0\| \leq c\}.$$

On considère la fonction : $f : Q \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et on suppose que

(h.4) L'application $(t, x; \lambda) \longmapsto f(t, x; \lambda)$ est continue sur $Q \times \Lambda$

(h.5) Soit $M > 0$ telle que

$$\sup_Q \|f\| \leq M$$

(h.6) Il existe $c > 0$ telle que

$$\|f(t, x_1; \lambda) - f(t, x_2; \lambda)\| \leq c\|x_1 - x_2\|$$

$\forall (t, x_i; \lambda) \in Q \times \Lambda, i = \overline{1, 2}$

Alors on a

Théorème 7. *Sous les hypothèses* $(h.4), (h.5), (h.6)$, *pour tout* $\lambda \in \Lambda$ *le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t); \lambda) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.4.1}$$

admet une unique solution notée $x(t, \lambda)$ *dans l'intervalle* $J = [t_0 - T, t_0 + T]$, *où* $T = \min(a, \frac{b}{M})$. *En outre, l'application* $(t, \lambda) \longmapsto x(t, \lambda)$ *est continue sur* $J \times \Lambda$.

On termine cette section par la dépendance par rapport aux données initiales, en introduisant tout d'abord la notion de flot.

3.4.2 *Notion de flot*

Définition 3.4.1. *Soit* $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. L'application* Φ *définie sur* $I \times \Omega$ *et qui à* (t_0, x_0) *associe la solution maximale* $\Phi_{(t_0,x_0)}$ *du problème de Cauchy* (3.1.1) *prenant la valeur* x_0 *en* t_0 *est appelée :* **le flot** *associe à* f.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Phi(t, x) = f(t, \Phi(t, x)) \\ \Phi(t_0, x) = x \end{cases} \tag{3.4.2}$$

Notation : Il sera parfois commode de considérer le flot comme une fonction de trois variables plutôt comme une famille de fonctions dépendant des paramètres t_0 et x_0. On notera alors

$$\phi(t, t_0, x_0) = \phi_{(t_0,x_0)}(t).$$

Remarque 12. *On peut voir qu'il existe un voisinage de x_0 telle que l'application $x \longmapsto \phi(t, t_0, x)$ soit bijective. Le théorème d'inversion locale assurent en fait que cette application est un difféomorphisme. Plus précisément ,on a le résultat suivant*

Théorème 8. *Soit $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et différentiable par rapport à la variable x telle que sa différentielle Df_x soit continue sur $I \times \Omega$. Alors le flot Φ associe à f est différentiable par rapport à x et sa matrice jacobienne $D\Phi_x(\cdot, t_0, x_0)$ vérifie l'équation différentielle (à valeurs matricielles) linéaire suivante sur l'intervalle de définition de $\Phi_{(t_0,x_0)}$:*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} D\Phi_x(t,x) = Df_x(t, \phi_{(t_0,x_0)}(t)) \cdot \Phi(t,x) \\ \Phi|_{t=t_0} = I_n \end{cases} \tag{3.4.3}$$

Remarque 13. *Plus généralement, si f est de classe C^k sur son domaine de définition alors le flot est également de classe C^k par rapport aux trois variables (t, t_0, x_0) .*

3.5 EXERCICES

Exercice 1. Soit F une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$lim_{\|x\| \to +\infty} F(x) = +\infty$$

et soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) & = -\nabla F(x(t)), \quad t \in \mathbb{R} \\ x(t_0) & = x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.5.1}$$

(1) Montrer que (3.5.1) admet une solution unique maximale définie sur un intervalle $]T_-, T_+[$ de $\mathbb{R}$.

(2) Vérifier que F est décroissante puis déduire que

$$T_+ = +\infty.$$

(3) Prenons $n = 1$ et $F(x) = \frac{x^4}{4}$. Montrer que dans ce cas qu'on peut avoir $T_- > -\infty$.

Solution

(1 Comme F est de classe C^2 alors $\nabla F(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_{j=\overline{1,n}}$ est de classe C^1. De plus, ici $\Omega = \mathbb{R}^n$ qui est convexe. D'où ∇F est localement lipschitzienne en x uniformément par rapport à t. Donc, par le biais du théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème (3.5.1) admet une solution unique maximale locale définie sur un intervalle $J =]T_-, T_+[$ de $\mathbb{R}$.

(2) Pour tout $t \in]T_-, T_+[$ et pour tout $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ solution de (3.5.1) sur $]T_-, T_+[$, on a

$$\frac{d}{dt} F(x(t)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(x(t))}{\partial x_j} \frac{dx_j(t)}{dt},$$

mais $\frac{dx_j(t)}{dt} = -\frac{\partial F(x(t))}{\partial x_j}$ car $x'(t) = -\nabla(F(x(t))$. D'où

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) = -\sum_{j=1}^{n} |\frac{\partial F(x(t))}{\partial x_j}|^2 \leq 0.$$

Cela signifie que F est décroissante. Par conséquent, pour tout $t \geq t_0$, on a $F(x(t)) \leq F(x_0)$.
Pour démontrer que $T_+ = +\infty$, on suppose le contraire, c-à-d $T_+ < +$. D'après la remarque 7. du cours (explosion en temps fini : ici $J =]T_-, T_+[$, $\quad \beta = supJ = T_+$, $\quad I = \mathbb{R}$, $\quad supI = +\infty$, si $< supI$ alors $lim_{t \to \beta_+} \|x(t)\| = +\infty$, donc ici $T_+ < +\infty$ implique que $lim_{t \to T_+} \|x(t)\| = +\infty$ ce qui donne une contradiction car par hypothèse F vérifie $lim_{\|x\| \to +\infty} F(x) = +\infty$. Il résulte que $T_+ = +\infty$.

(3) Pour $n = 1$, $F(x) = \frac{x^4}{4}$, $\quad x \in \mathbb{R}$ d'où $F'(x) = x^3$, on aura donc le problème de Cauchy

$$x'(t) = -x^3(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x(t_0) = x_0 \neq 0.$$

On peut ici prendre $t_0 = 0$ sans perdre de généralité. D'après la question (1), ce problème admet une solution unique maximale $x(\cdot)$ définie sur un intervalle $]T_-, T_+[$ (avec $T_- < t_0 = 0$) à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ici $n = 1$) et d'après la question (2) $T_+ = +\infty$. S'il existe un point $t_1 \in]T_-, +\infty[$ vérifiant $x(t_1) = 0$ alors par unicité globale on aura $x(t) = 0, \forall t \in]T_-, +\infty[$ et cala contredit le fait que $x_0 \neq 0$, d'où $x(t) \neq 0, \quad \forall t \in]T_-, +\infty[$. On peut donc écrire

$$\frac{x'(t)}{x^3(t)} = -1$$

Si on intègre par rapport à t, on trouve

$$-\frac{1}{2x^2(t)} + \frac{1}{2x_0^2} = -t + t_0$$

Il vient que $t_0 - t < \frac{1}{2x_0^2}$, c-à-d $t > t_0 - \frac{1}{2x_0^2}$.
Dans ce cas la solution unique vérifie

$$x^2(t) = \frac{x_0^2}{1 + 2x_0^2(t - t_0)}, \quad t > t_0 - \frac{1}{2x_0^2}$$

mais $x(t)$ est définie sur $]T_-, +\infty[$. Par suite $T_- = t_0 - \frac{1}{2x_0^2}$.

Exercice 2. Considérons l'équation de Riccati

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) & = x^2(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ x(0) & = x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.5.2}$$

(1) Montrer que (3.5.2) admet une solution maximale définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ contenent $t_0 = 0$.

(2) Soit $y(\cdot)$ une fonction continue définie sur J vérifiant

$$y(t) \leq e^{\int_0^t y(s)ds}, \quad \forall t \in J.$$

En utilisant la question (1), montrer que

$$y(t) \leq \frac{1}{1-t}, \quad \forall t \in J.$$

(3) Considérons maintenent l'équation de Riccati non homogène

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) & = x^2(t) + t^2, \quad t \in \mathbb{R} \\ x(0) & = 0 \end{cases} \tag{3.5.3}$$

(3.1) Soit $x(\cdot)$ la solution maximale de (3.5.3). Posons

$$z(t) = e^{-\int_0^t x(s)ds}.$$

Ecrire une équation différentielle d'ordre deux pour $z(\cdot)$ et montrer que

$$z(0) = z''(0) = z^{(3)}(0) = 0.$$

(3.2) Résoudre l'équation différentielle en $z(\cdot)$ en cherchant une solution sous forme d'une série entière.

(3.3) Déduire que $x(\cdot)$ est définie sur un intervalle $]-a, a[$ avec $a \in]2, +\infty[$.

Solution

(1) L'existence d'une solution unique maximale $x(t)$ de (3.5.2) sur un intervalle J est assurée par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Déterminons l'intervalle d'existence J. Pour cela, on remarque tout d'abord que l'équation de Riccati dans (3.5.2) est une EDO autonome (ici $f(x(t)) = x^2(t), \quad t \in \mathbb{R}$ et $\Omega = \mathbb{R}$), donc seule la solution nulle est globale, par suite $x(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. On peut écrire alors

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = 1$$

Par intégration en t, on trouve

$$-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x(t_0)} = t - t_0,$$

ou bien

$$\frac{1}{x(t)} = \frac{1}{x_0} - (t - t_0)$$

Donc $t - t_0 < \frac{1}{x_0}$, c-à-d $t < t_0 + \frac{1}{x_0}$. et $lim_{t \to t_0 + \frac{1}{x_0}} |x(t)| = +\infty$. Dans cet exercice $t_0 = 0$, par suite si $x_0 < 0$ alors la solution maximale $x(t)$ est définie sur $[\frac{1}{x_0}, +\infty[$ et si $x_0 > 0$ alors la solution maximale est définie sur $]-\infty, \frac{1}{x_0}[$.

(2) Si on pose $h(t) = e^{\int_0^t y(s)ds}$, on voit que h est bien définie car y est continue sur J. De plus h est dérivable et $h'(t) = y(t)h(t) \leq h^2(t)$. Comme h ne s'annule pas, alors

$$\frac{h'(t)}{h^2(t)} \leq 1.$$

Si on intègre en t, on trouve (en remarquant que $h(0) = 1$)

$$-\frac{1}{h(t)} + 1 \leq t$$

D'où $h(t) \leq \frac{1}{1-t}$, avec $t < 1$ car h est positive par définition. Finalement, par hypothèse $y(t) \leq h(t)$, donc $y(t) \leq \frac{1}{1-t}$.

3.1 Comme $z(t) = e^{-\int_0^t x(s)ds}$ où $x(\cdot)$ est solution maximale de (3.5.3) (c-à-d $x'(t) = x^2(t) + t^2, \quad x(0) = 0$), alors

$$z'(t) = -x(t)z(t), \quad z''(t) - x'(t)z(t) + x^2(t)z(t) = -t^2 z(t), \quad z^{(3)}(t) = -2tz(t) - t^2 z(t)$$

L'équation différentielle d'ordre deux en $z(\cdot)$ est

$$\frac{d^2}{dt^2} z(t) = -t^2 z(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

De plus $z(0) = 1, \quad z'(0) = 0, \quad z''(0) = 0, \quad z^{(3)}(0) = 0.$

(3.1) On cherche une solution pour l'EDO $z''(t) = -t^2 z(t)$, sous les conditions initiales $z(0) = 1, \quad z'(0) = 0$ sous forme d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad t \in]-R, R[$, avec R le rayon de convergence de la série et les coefficients sont données par la relation

$$a_k = \frac{z^{(k)}(0)}{k!}.$$

On voit que

$$a_0 = z(0) = 1, \quad a_1 = z'(0) = 0, \quad a_2 = \frac{z''(0)}{2} = 0, \quad a_3 = \frac{z'^{(3)}(0)}{6} = 0.$$

De plus, pour tout $t \in]-R, R[$ on a

$$\begin{aligned} z''(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n \\ &= -t^2 z(t) = -t^2 (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n) \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+2}) \\ &= -\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} t^n. \end{aligned}$$

Par identification, on trouve $a_{n+2} = \frac{a_{n-2}}{(n+1)((n+2)}$ ou bien $a_n = \frac{a_{n-4}}{n(n-1)}$, avec $n \geq 4$. Cette dernière relation montre que les coefficients a_n sont nulle si $n \neq 4k, \quad k \in \mathbb{N}^*$. Pa suite, on peut écrire

$$a_{4k} = \frac{(-1)^k}{4k(4k-1)(4k-4)(4k-5)\cdots \times 4 \times 3}.$$

En particulier $|a_{4k}| \leq \frac{1}{k!4^k}, d'o \sum_k |a_{4k}t^{4k}| \leq e^{\frac{t^4}{4}}. Cequiimpliqueque$R=+∞.

Exercice 3. Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) & = 2te^{-t^2} + \frac{x^5(t)}{1+x^4(t)}cos(te^{x(t)}), \quad t \in \mathbb{R} \\ x(0) & = 1 \end{cases} \tag{3.5.4}$$

(1) Montrer que (3.5.4) admet une solution unique maximale $x(\cdot)$ définie sur un intervalle $]T_-, T_+[$ de $\mathbb{R}$ contenant $t_0 = 0$.

(2) Soit $\phi(\cdot)$ la solution maximale de (3.5.4). En utilisant la formule intégrale de (3.5.4), montrer que

$$|\phi(t)| \leq 2 + |\int_0^t |\phi(s)|, \quad \forall t \in J.$$

(3) Déduire que

$$\phi(t) \leq 2e^{|t|}, \quad \forall t \in J.$$

(4) Montrer que la solution est globale c'est-à-dire que $J = \mathbb{R}$.

Solution

(1) Posons $f(t,x) = 2te^{-t^2} + \frac{x^5}{1+x^4}cos(te^x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2$. On voit que f est bien définie et de classe C^1 sur le convexe $\mathbb{R}^2$, donc elle est localement lipschitzienne par rapport à x uniformement en t. D'où par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème (3.5.4) admet une solution unique maximale définie sur $J =]T_-, T_+[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec $t_0 = 0 \in J$. De plus cette solution est de classe C^2 car f est de classe C^1, d'où cette solution est de classe C^1.

(2) Pour tout $t \in [0, T_+[$, on a

$$\phi(t) = \phi(0) + \int_0^t \phi'(s)ds = 1 + \int_0^t f(s, \phi(s))ds$$

(car ϕ solution de (3.5.4) donc $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$ et $\phi(0) = 1$). Alors

$$|\phi(t)| \leq 1 + \int_0^t 2se^{-s^2}ds + \int_0^t \frac{\phi^5(s)}{1+\phi^4(s)}ds.$$

En utilisant le fait que $\frac{|a|^5|}{1+a^4} \leq |a|$, on trouve

$$|\phi(t)| \leq 1 + [-e^{-s^2}]_0^t + \int_0^t |\phi(s)|ds \leq 2 + \int_0^t |\phi(s)|ds.$$

De la même façon sur l'intervalle $t \in]T_-, 0]$, seulement ici $|\int_0^t f(s, \phi(s)| \leq 1 + \int_t^0 |\phi(s)|ds$. Donc, pour tout $t \in]T_-, T_+[$ on a

$$|\phi(t)| \leq 2 + |\int_0^t |\phi(s)|ds|.$$

(3) On appliquons le lemme de Gronwall sur l'expression $|\phi(t)| \leq 2 + |\int_0^t |\phi(s)|ds|$, on trouve

$$|\phi(t)| \leq 2e^{|\int_0^t ds|}$$

d'où le résultat.

(4) Par l'absurde, supposons que $T_+ < +\infty$. Donc par le critère d'explosion en temps fini on aura forcément que

$$lim_{t \to T_+} |\phi(t)| = +\infty.$$

Mais d'après la question (3) on a

$$|\phi(t)| \leq 2e^{|t|},$$

ce qui donne

$$lim_{t \to T_+} |\phi(t)| \leq lim_{t \to T_+} 2e^{|t|} = 2e^{T_+} < +\infty.$$

D'où la contradiction. Par suite, on obtient que $T_+ = +\infty$.
De la même façon, on arrive à $T_- = -\infty$.
Donc $J = \mathbb{R}$, c'est-à-dire la solution maximale de (3.5.4) est globale.

Exercice 4.

(1) Donner les solutions maximales des problèmes de Cauchy suivants

$$x'(t) = x^3(t), x(0) = 0 \quad \text{et} \quad x'(t) = \frac{1}{x(t)}, x(0) = 1$$

(2) Montrer que toute solution maximale du problème de Cauchy

$$x'(t) = t\sqrt{t^2 + x^2(t)}, \quad x(t_0) = x_0$$

est globale.

Solution

(1) Donner les solutions maximales des problèmes de Cauchy suivants

$$x'(t) = x^3(t), x(0) = 0 \quad \text{et} \quad x'(t) = \frac{1}{x(t)}, x(0) = 1$$

— La fonction $f(x) = x^3$ est localement lipschitzienne, par conséquent le problème de Cauchy associé admet une solution unique maximale $x(t)$, $t \in J \subset \mathbb{R}$. Supposons que cette solution ne s'annule pas pour tout t, alors

$$\frac{x'(t)}{x^3(t) = 1}.$$

Par intégration sur $[t_0, t]$, on trouve

$$\frac{-1}{2x^2(t)} + \frac{1}{2x^2(t_0)} = t - t_0.$$

Alors

$$x^2(t) = \frac{x^2(t_0)}{1 - 2x^2(t_0)(t - t_0)}.$$

D'après la condition initiale $x(0) = 0$, in vient que $x^2(t) = 0$.
Par suite, la fonction nulle $x(t) = 0, \forall t$ est la solution maximale unique vérifiant la condition initiale $x(0) = 0$.

— La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est localement lipschitzienne, par conséquent le problème de Cauchy associé admet une solution unique maximale $x(t), t \in J \subset \mathbb{R}$. Supposons que cette solution ne s'annule pas pour tout t, alors

$$x'(t)x(t) = 1.$$

Par intégration sur $[t_0, t]$, on trouve

$$x^2(t) - x^2(t_0) = t - t_0$$

D'où

$$x^2(t) = x^2(t_0) + 2(t - t_0).$$

Mais $x(0) = 1$, donc $x(t) = \sqrt{1 + 2t}$ est la solution unique maximale de ce problème de Cauchy avec $x(0) = 1$.

(2) Montrer que toute solution maximale du problème de Cauchy

$$x'(t) = t\sqrt{t^2 + x^2(t)}, \quad x(t_0) = x_0$$

est globale.

— Posons $f(t, x) = t\sqrt{t^2 + x^2}$ et montrons que cette fonction est globalement lipschitzienne. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on ait

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| = |t(\sqrt{t^2 + x^2} - \sqrt{t^2 + y^2})| &\leq |t| \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{t^2 + x^2} + \sqrt{t^2 + y^2}} \\ &\leq |t| \frac{|x| + |y|}{\sqrt{t^2 + x^2} + \sqrt{t^2 + y^2}} |x - y| \\ &\leq |t||x - y|. \end{aligned}$$

Cela veut dire que f est globalement lipschitzienne de rapport de lipschitz $k(t) = |t|, \forall t \in \mathbb{R}$.

Par le biais du thèorème de Cauchy Lipschitz (des solutions globales), le problème ci-dessus admet une solution unique globale.

Exercice 5. Considérons l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1. Supposons que ϕ et ψ sont deux solutions de cette équation telle qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ avec

$$\phi(t_0) < \psi(t_0)$$

Montrer alors que

$$\phi(t) < \psi(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Indication : Utiliser le raisonnement par absurde.

Solution

— Supposons quil existe $a \in \mathbb{R}$ telle que

$$\phi(a) \geq \psi(a)$$

Comme les deux solutions ϕ et psi sont continues (en effet elle sont de classe C^2 car f est de classe C^1)., alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $b \in \mathbb{R}$ telle que

$$\phi(b) = \psi(b).$$

Mais on déduit l'unicité de solution au problème de Cauchy au point b d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (qui s'applique car $f \in C^1$ sur le convexe $\mathbb{R}^2$).
Il vient que

$$\phi(t) = \psi(t), \forall t$$

Ce qui est absurde car $\phi(t_0) < \psi(t_0)$.

Exercice 6. Considérons l'équation différentielle

$$x'(t) = (a - x(t))(b - x(t)),$$

où a et b sont deux constantes réelles avec $a \leq b$.

(1) Montrer que pour toute donnée initiale $x_0 \in \mathbb{R}$ fixée, cette équation admet une solution unique maximale $x(\cdot)$ telle que $x(0) = x_0$.

(2) que vaut cette solution si $x_0 = a$ ou $x_0 = b$?

(3) Supposons que $a = b$.
Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle. Tracer l'allure de ces solutions en fonctions de a et x_0.

(4) Supposons que $a = 1$, $b = 2$, $x_0 \neq a$ et $x_0 \neq b$.
Déterminer dans cas la solution en fonction de $x(0) = x_0$ puis tracer l'allure de la solution en fonction de x_0.

Solution

Considérons l'équation différentielle

$$x'(t) = (a - x(t))(b - x(t)),$$

où a et b sont deux constantes réelles avec $a \leq b$.

(1) Montrer que pour toute donnée initiale $x_0 \in \mathbb{R}$ fixée, cette équation admet une solution unique maximale $x(\cdot)$ telle que $x(0) = x_0$.
   — On pose $f(x) = (a - x)(b - x)$. Il est clair que f est continue et de classe C^1 sur le convexe $\mathbb{R}$. Donc, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique, c-à-d, ce problème admet une solution nunique maximale $x(t), t \in \mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale $x(0) =_0$, avec $x_0 \in \mathbb{R}$.

(2) que vaut cette solution si $x_0 = a$ ou $x_0 = b$?
   — Si $x_0 = a$ ou $x_0 = b$ alors, la solution est la fonction constante

$$x(t) = x_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(3) Supposons que $a = b$. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle. Tracer l'allure de ces solutions en fonctions de a et x_0.
   — Si $a = b$ alors $x'(t) = (a - x(t))^2$. On peut diviser par (a-x(t))^2 car si $x_0 \neq a$ alors

$$x(t) \neq a, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Par suite on peut écrire

$$\frac{x'(t)}{(a - x(t))^2} = 1$$

Par intégration sur $[t_0, t]$:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{(a - x(s))^2} ds = \int_{t_0}^{t} ds.$$

D'où

$$\frac{-1}{a - x(t)} + \frac{1}{a - x(t_0)} = t - t_0$$

Alors

$$x(t) = a - \frac{a - x(t_0)}{1 - (a - x(t_0))(t - t_0)}.$$

Mais $x(0) = x_0$, alors une solution est

$$x(t) = a - \frac{a - x_0}{1 - (a - xt_0)t}.$$

Pour tracer l'allure des solutions $x(t)$, on étudie la dérivée $x'(t)$.
Mais $x'(t) = (a - x(t))^2$, donc on va étudier la fonction $f(x) = (a - x)^2$.
On a $f'(x) = -2(a - x)$, d'ou f est croissante si $x < a$ et décroissante si $x > a$.

(4) Supposons que $a = 1$, $b = 2$, $x_0 \neq a$ et $x_0 \neq b$.
Déterminer dans cas la solution en fonction de $x(0) = x_0$ puis tracer l'allure de la solution en fonction de x_0.

— Dans ce cas $x'(t) = (1 - x(t))(2 - x(t))$ avec $x_0 \neq 1$ et $x_0 \neq 2$. D'où

$$\frac{x'(t)}{(1 - x(t))(2 - x(t))} = 1.$$

On remarque que

$$\frac{x'(t)}{(1 - x(t))(2 - x(t))} = x'(t)(\frac{1}{1 - x(t)} - \frac{1}{2 - x(t)}).$$

Alors, si on intègre sur $[t_0, t]$, on obtient

$$-\ln|1 - x(t)| + \ln|1 - x(t_0)| + \ln|2 - x(t)| - \ln|2 - x(t_0)| = t - t_0.$$

Mais $x(0) = x_0$, alors

$$\ln|\frac{1 - x_0}{1 - x(t)}| + \ln|\frac{2 - x(t)}{2 - x_0}| = t$$

D'où

$$|\frac{1 - x_0}{1 - x(t)}\frac{2 - x(t)}{2 - x_0}| = e^t.$$

Par suite, une solution $x(t)$ vérifie que

$$|\frac{2 - x(t)}{1 - x(t)}| = |\frac{2 - x_0}{1 - x_0}|e^t.$$

Pour tracer l'allure de la solution il faut tout d'abord discuter pour éliminer la valeur absolue.
Soit alors J l'intervalle d'existence de la solution maximale. On va étudier les cas suivants :
(A) Si $1 < x_0 < 2$, alors pour tout $t \in J$, $1 < x(t) < 2$, et par conséquent

$$\frac{2 - x(t)}{1 - x(t)} = \frac{2 - x_0}{1 - x_0}e^t.$$

D'où

$$x(t) = \frac{2 - \frac{2 - x_0}{1 - x_0}e^t}{1 - \frac{2 - x_0}{1 - x_0}e^t} = \frac{2 - 2x_0 - (2 - x_0)e^t}{1 - x_0 - (2 - x_0)e^t}.$$

On remarque que dans ce cas, la solution $x(t)$ est définie sur $\mathbb{R}$, de plus $x(t)$ est décroissante et $\lim_{t\to+\infty} = 1$, $\lim_{t\to-\infty} = 2$.

(B) Faire une étude analogue pour les deux cas $x_0 < 1$ et $x_0 > 2$.

Exercice 7. Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) & = (1 + \cos t)x(t) - x^3(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ x(0) & = x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \tag{3.5.5}$$

(1) Montrer que (3.5.5) admet une solution maximale locale unique ϕ définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ et que ϕ est de classe C^2 sur J.

(2) Montrer que s'il existe $t_1 \in J$ telel que $\phi(t_1) = 0$ alors $\phi(t) = 0$ pour tout $t \in J$.

(3) Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $t \in J$ on a

$$0 < \phi(t) \leq \phi(0)e^{Ct}.$$

(4) Montrer que la solution maximale ϕ est globale.

(5) Soit $\psi(t, x)$ le flot associé au problème (3.5.5) en $t = 0$.On pose $P(x) = \psi(2\pi, x)$ où $x \in \mathbb{R}_+$.
Vérifier que $P(0) = 0$ et $P'(0) = e^{2\pi}$, puis déduire que P est solution de l' équation différentielle

$$P'(x) = e^{-4\pi}\left(\frac{P(x)}{x}\right)^3.$$

(6) Résoudre cette équation différentielle, puis éduire que ϕ est 2π périodique.

Solution

(1) On pose $f(t, x) = (1 + \cos t)x - x^3$. On voit que f est de classe C^1 sur le convexe $\mathbb{R}^2$, donc elle est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable x. Par le biais du théorème de Cachy-Lipschitz, on peut dire que le problème de Cauchy (3.5.5) admet une solution unique maximale locale notée ϕ définie sur un intervalle $J =]T_-, T^+[$ de $\mathbb{R}$. De plus, comme f est de classe C^1 alors d'après la régularité de la solution maximale, ϕ est de classe C^2 sur J.

(2) Comme la solution nulle est une solution trivial de (3.5.5),donc s'il existe $t_1 \in J$ telle que $\phi(t_1) = 0$, alors dd'après le lemme d'unicité globale de la solution maximale (ou le lemme de recollement), ϕ coincide avec la solution nulle sur tout l'intervalle J, donc on doit avoir forcément $\phi(t) = 0, \forall t \in J$. Cela sugnifie que ϕ ne s'annule pas sur J.

(3) D'après la question précédante, on peut avoir en particulier pour tout $t \geq 0$: $\phi(t) \neq 0$. De plus pour tout $t \geq 0$ on a

$$\phi'(t) = (1 + \cos t)\phi(t) - \phi^3(t).$$

D'où

$$\phi'(t) < (1 + \cos t)\phi(t) \leq 2\phi(t).$$

Ou bien $\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} \leq 2$. Par ailleurs, si on intègre sur $[0, t]$ on trouve

$$\phi(t) \leq \phi(0)e^{2t}.$$

(4) On montre que $T^+ = +\infty$. Pour faire, supposons le contraire que $T^+ < +\infty$. Par le critère d'explosion en temps finie il résulte que

$$lim_{t \to T^+}\phi(t) = +\infty.$$

D'après la question précédante $\phi(t) \leq \phi(0)e^{2t}$, pour $t \in J =]T_-, T^+[$. Donc pour $t < T^+$ on aura

$$\phi(t) \leq \phi(0)e^{2T^+}$$

Donc, il existe $A = \phi(0)e^{2T^+}$ telel que $\phi(t) \leq A$ pour tout $t \in J$. Par suite

$$lim_{t \to T^+} t\phi(t)| \leq A < +\infty.$$

Donc la contradiction. Alors on doit avoir $T^+ = +\infty$.

(5) Soit ψ le flot associé au problème (3.5.5) en $t = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\psi(t,x) & = f(t,\psi(t,x)) \\ \psi(0,x) & = x \end{cases} \tag{3.5.6}$$

et soit $P(x) = \psi(2\pi, x)$, x$\in \mathbb{R}_+$. Par définition du flot $\psi(0x) = x$, alors en particulier pour $x = 0$ on a $\psi(0, 0 = 0$. Mais d'après la question une, s'il existe t_1 où $\phi(t_1) = 0$ alors $\phi(t) = 0$ pour tout t, cela reste valable sur le flot , c'est-à-dire, pour $t_1 = 0$ $\psi(0, 0) = 0$ alors forcément $\psi(t, 0) = 0$ pour tout t. D'où, en particulier pour $t = 2\pi$ on a

$$P(0) = \psi(2\pi, 0) = 0.$$

De plus, si on pose

$$H(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\psi(t,x),$$

alors

$$\frac{\partial}{\partial t}H(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\psi(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x)$$

Mais $\frac{\partial t}{\psi}(t,x) = f(t,\psi(tx,)) = (1+\cos t)\psi(t,x) - \psi^3(t,x)$, alors

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) = (1+\cos t)(\frac{\partial}{\partial x}\psi(t,x)) - 3\psi^2(t,x)(\frac{\partial}{\partial x}\psi(t,x)).$$

D'où

$$\frac{\partial}{\partial t}H(t,x) = (1+\cos t)H(t,x) - 3\psi^2(t,x)H(t,x),$$

qui définie une EDO d'ordre un pour condition initiale en $t = 0$ donnée par

$$H(0,x) = \frac{\partial}{\partial x}\psi(t,x)/_{t=0} = \frac{\partial}{\partial x}\psi(0,x) = \frac{\partial}{\partial x}\{x\} = 1.$$

Donc, si on intègre cette EDO sur $[0,t]$, on trouve

$$H(t,x) = H(0,x)e^{t+\sin t - 3\int_0^t \psi^2(\tau,x)d\tau}.$$

D'où

$$H(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\psi(t,x) = e^{t+\sin t - 3\int_0^t \psi^2(\tau,x)d\tau}.$$

Or que $P(x) = \psi(2\pi, x)$, alors

$$P'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\psi(2\pi,x) = H(2\pi,x),$$

alors, en particulier on a

$$P'(0) = H(2\pi, 0) = e^{2\pi + \sin(2\pi) - 3\int_0^{2\pi} \psi^2(\tau, 0)d\tau}.$$

Mais $\psi(\tau,, 0) = 0$, d'où

$$P'(0) = e^{2\pi}.$$

Revenons à l'équation du flot pc6.Or que ψ ne s'annule pas si $x \neq 0$ alors, on peut réecrire pc6 comme suit

$$\frac{1}{\psi(t,x)} \frac{d}{dt} \psi(t,x) = (1 + \cos t) - \psi^2(t,x),$$

Cette dernière est une EDO d'ordre un , dont l'intégration en temps sur $[0,t]$ donne

$$\ln \psi(t,x) - \ln \psi(0,x) = t + \sin t - \int_0^t \psi^2(\tau, x)d\tau,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^t \psi^2(\tau, x)d\tau = t + \sin t - \frac{\ln \psi(t,x)}{x}.$$

On substituons cette expression dans la relation de $H(t,x)$, on arrive à

$$H(t,x) = e^{t + \sin t - 3(t + \sin t - \ln \frac{\psi(t,x)}{x})},$$

c'està-dire

$$H(t,x) = e^{-2(t + \sin t) + 3 \ln \frac{\psi(t,x)}{x}}.$$

Mais $P'(x) = H(2\pi, x)$, d'où

$$P'(x) = e^{-2(2\pi + \sin 2\pi) + \ln(\frac{\psi(2\pi,x)}{x})^3} = e^{-4\pi + \ln(\frac{\psi(2\pi,x)}{x})^3} = (\frac{\psi(2\pi,x)}{x})^3 e^{-4\pi}.$$

Or que $\psi(2\pi, x) = P(x)$, alors P vérifie l'EDO suivante

$$P'(x) = e^{-4\pi} (\frac{P(x)}{x})^3.$$

(6) Comme $P(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on peut écrire $\frac{P'(x)}{P^3(x)} = \frac{e^{-4\pi}}{x^3}$. Par intégration en x, on aboutit

$$\frac{-1}{2P^2(x)} = -\frac{e^{-4\pi}}{2x^2} + c_1,$$

d'où

$$P^2(x) = \frac{e^{4\pi} x^2}{1 + 2c_2 x^2}.$$

Sachant que $P(x)$ est strictement positive pour tout $x > 0$ et la constante c_2 est nécessairement positive, alors

$$P(x) = \frac{e^{2\pi x}}{\sqrt{1 + 2c_2 x^2}},$$

avec $P(x) = \psi(2\pi, x)$. Cela implique que la solution du problème (3.5.5) dont le flot associé est ψ, est périodique et de période 2π.

Exercice 8. Soit E l'espace de Banach des suites réelles qui tendent vers zéro. On muni l'espace E par la norme suivante

$$\|x\|_\infty = sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|, \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

On définit l'application $f : E \longrightarrow E$ comme suit : pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$

$$f(x) = f(x_n) = \sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1}.$$

(1) Montrer que f est une application continue de E dans E.

(2) On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) & = f(x(t)) \\ x(0) & = 0_E. \end{cases} \tag{3.5.7}$$

Soit $x(t) = x_n(t)$ une solution de (3.5.7) de classe C^1 sur un intervalle $J =]-\alpha, \alpha[$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E.
Montrer que

$$x_n(t) > 0, \quad \frac{x_n'(t)}{\sqrt{x_n(t)}} > 1,$$

pour tout $t \in [0, \alpha[$ et $n \in \mathbb{N}$.

(3) Déduire alors que $x_n(t) \geq \frac{t^2}{4}$, pour tout $t \in [0, \alpha[$ et $n \in \mathbb{N}$ et alors que $x(t) = x_n(t)$ ne tend pas vers zéro quand $t > 0$.

(4) Conclure que le problème (3.5.7) n'admet pas de solution dans l'espace E.
Ceci signifie que la contnuité de f sur un espace de dimension infinie E empêche l'existence de solution du problème de Cauchy associé.

Exercice 9. Soit l'EDO du second ordre suivante

$$x''(t) + q(t)x(t) = 0, \quad t \in J \subset \mathbb{R}, \quad x(t) \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

où $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée.

(1) Discuter le domaine de définition d'une solution maximale de (4.1.2).

(2) Soit $x(\cdot)$ une solution de (4.1.2). Montrer que si $x(\cdot)$ s'annule, alors ses zéros sont isolés ou bien $x(\cdot)$ est identiquement nulle.

(3) Ecrire l'EDO (4.1.2) sous forme d'un système d'EDO d'ordre un sous forme

$$z'(t) = A(t)z(t). \tag{2}$$

(3.1) Rappeler la notion de résolvante $R(t,s)$ associée à (4.2.1) ainsi que ses propriétés.
(3.2) Déterminer la valeur du déterminant de la résolvante en $s = 0$: $\det R(t, 0)$.
(3.3) Montrer que la résolvante $R(t, 0)$ admet une valeur propre λ telle que $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 10. Soit $f \in C(\mathbb{R} * \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Supposons qu'il existe $F \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+^*)$ telle que

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{F(s)} ds = +\infty, \quad \forall a \in \mathbb{R}_+$$

et

$$||f(t,x)|| \leq F(||x||), \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R} * \mathbb{R}^n,$$

où $|| \quad ||$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

(1) Soit $x \in C(J, \mathbb{R}^n)$ une solution maximale de l'EDO $x'(t) = f(t, x(t))$, et définissons la fonction $r(\cdot)$ sur J par $r(t) = ||x(t)||$. Montrer que

$$r'(t) \leq F(r(t)), \quad \forall t \in J, \quad \text{où} r(t) \neq 0$$

(2) Déduire que la solution $x(\cdot)$ est globale, c'est-à-dire $J = \mathbb{R}$.

Exercice 11. Soit $f : I * \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction continue. Supposons que pour tout compact K de I, il existe une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telles que

$$\|f(t,x)\| \leq g(\|x\|), \quad \forall (t,x) \in K * \mathbb{R}^N$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{g(s)} = +\infty.$$

(1) Montrer que toute solution maximale du problème de Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

est globale.

(2) Appliquer ce résultat sur le problème de Cauchy suivant :

$$x'(t) = x(t) log(1 + x^2(t)), \quad x(t_0) = x_0.$$

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 qui vérifie

$$|f(x) - \cos s| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.5.8}$$

et considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), & t \in \mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0, & t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.5.9}$$

(1) Montrer que (3.5.9) admet une solution unique maximale $\phi(\cdot)$ définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que cette solution est globale , c'est-à-dirr $J = \mathbb{R}$.

(3) Montrer que dans tout intervalle $[2k\pi, (2k+1)\pi], il existe \alpha_k$ telle que $f(\alpha_k) = 0$.

(4) Montrer que si $x_0 \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}[, alors la solution \phi(\cdot)$ de (3.5.9) verifie

$$\phi(t) \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ou bien

$$\phi(t) = c, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

où c une constante.

4

ETUDE QUALITATIVE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AUTONOMES

4.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude qualitative des équations différentielles autonomes :

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)), \tag{4.1.1}$$

où f est une fonction connue définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Ici, nous allons supposé que f est de classe C^1 et que Ω est un convexe de $\mathbb{R}^n$, d'où les théories d'existence locale et globale développées au chapitre précédant s'appliquent.
La particularité d'un tel système (4.1.1) est que la fonction f ne dépend que de $x(\cdot)$ et non pas de t. Cela a pour conséquence de la propriété de translation, c'est à dire si $\phi(\cdot)$ est une solution maximale de (4.1.1) sur un intervalle I telle que $\phi(t_0) = x_0$ alors la fonction ψ définie sur $I - t_0$ par $\psi(t) = \phi(t - t_0)$ est la solution maximale de (4.1.1) telle que $\psi(0) = x_0$.
De ce fait, on se limitera dans ce qui suit à l'étude du problème de Cauchy en $t_0 = 0$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)), t \geqslant 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{4.1.2}$$

où $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction connue de classe C^1 sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. L'approche qualitative consiste au lieu de s'intéresser à la solution de (4.1.2) pour une donnée initiale fixée, à considérer les courbes décrites par les solutions de (4.1.2) dans leurs ensembles. L'étude sera donc géométrique : c'est la fonction f vue comme un champ de vecteurs dans Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (l'étude reste valable pour des espaces de dimension infinie).

4.2 CHAMPS DE VECTEURS

Définition 4.2.1. *Un champ de vecteur réel définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, est une application X qui à tout point x de Ω fait correspondre un opérateur différentiel*

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

où $a_i(\cdot)$ *sont des fonctions définient sur* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Le champ* X *est dit de classe* C^k, $k \geq 1$ *si les fonctions* $a_i(\cdot)$ *sont de classe* C^k.

Remarque 14. *Le champ de vecteurs* X *est non nul en un point* x_0 *de* Ω *si l'une des fonctions* $a_i(\cdot)$ *est non nulle en* x_0. *Cela se traduit par*

$$\sum_{i=1}^{n} \|a_i(x_0)\| \neq 0$$

Un résultat important est le suivant :

Théorème 9. (Redressement des champs de vecteurs réels) *Soit* X *un champ de vecteurs de classe* C^1 *dans un voisinage d'un point* x_0 *de* $\mathbb{R}^n$, *non nul en* x_0. *Il existe des coordonnées* $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ *au voisinage de* x_0 *dans lesquelles* X *s'écrit* $\frac{\partial}{\partial y_1}$.

Ce résultat signifie qu'il existe un voisinage U de x_0, un ouvert V de $\mathbb{R}^n$, un difféomorphisme $\phi : V \longrightarrow U$ tels que pour tout $u \in C^1(U; \mathbb{R})$, on a

$$Xu(x) = \frac{\partial}{\partial y_1}(u(\phi(y))), \quad \forall x \in U, \quad \phi(y) = x.$$

(On a noté x les coordonnées de U et y les coordonnées de V).

Remarque 15. *(1) Si on pose* $\hat{X}(x) = X(x + x_0)$, *on se ramène au cas* $x_0 = 0$. *De plus, puisque l'une des* $a_i(\cdot)$ *ne s'annule pas en* x_0, *on peut supposer que* $a_1(0) \neq 0$. *On peut donc considérer le système différentiel*

$$\frac{dz}{dt}(t) = a(z(t)), \quad z(0) = (0, y_2, \cdots, y_n), \tag{4.2.1}$$

et on montre qu'il admet une solution unique $z(t) = \phi(t, y)$.

(2) On voit que

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(\phi(t,y))) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\phi(t,y))\frac{\partial \phi_i}{\partial t}(t,y) = \sum_{i=1}^{n}(a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(\phi(t,y)) = Xu(x), \tag{4.2.2}$$

où $x = \phi(t, y)$. *C'est exactement le résultat du théorème avec* $t = y_1$.

(3) Les solutions de (4.2.1) *(lorsque* y *varie) s'appellent : les courbes intégrales du champ* X. *Ce sont des courbes* $t \mapsto z(t)$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *telles qu'en tout point de la courbe, le champ* X *est tangent à la courbe, c'est-à dire le vecteur* $a(z(t))$ *est le vecteur tangent à la courbe (en effet* $a(z(t)) = z'(t)$.

(4) Le théorème de redressement permis donc de remplir un voisinage de zéro à l'aide de telles courbes, c'est-à-dire par chaque point d'un voisinage de zéro passe une telle courbe et une seule. Les nouvelles coordonnées que l'on a trouvé sont : le temps t *mis par la courbe pour atteindre* x *en partant du point* $(0, y)$ *et le point* y *d'où l'on est parti.*

(5) Dans ces nouvelles coordonnées (t, y), *les courbes intégrales deviennent les droites horizontales* (t, y) *où* y *est fixé et* $t \in [-T, T]$ *et le champ qui est tangent à ces courbes est alors* $\frac{\partial}{\partial t}$. *On dit qu'on a* **redressé les courbes intégrales** *du champ* X *d'où le titre du théorème.*

Il résulte de ce théorème que pour toute fonction f continue au voisinage de x_0, l'équation $Xu = f$ admet une solution $u \in C^1$ dans un voisinage de x_0. De plus, on peut considérer que

(1) f est un champ de vecteurs sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 sur Ω.

(2) On dit que le champ de vecteurs f est **complet** si toutes les solutions maximales de l'EDO : $x'(t) = f(x(t))$ sont globales.

On peut donc donner la définition d'une courbe intégrale comme suit

Définition 4.2.2. ***(Courbes intégrales)*** *Le sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ de la forme :*

$$\{x(t), t \in I\},$$

où $x(\cdot)$ est une solution maximale de l'EDO : $x'(t) = f(x(t))$ sur I, est appelé courbe intégrale du champ de vecteurs f.

Définition 4.2.3. ***(Intégrale première)*** *On appelle intégrale première pour l'EDO $x'(t) = f(x(t))$, toute fonction $E : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur Ω constante le long des courbes intégrales, c'est à dire pour toute solution maximale $x(\cdot)$ sur I on a*

$$E(x(t)) = constante, \forall t$$

(c'est à dire $E \circ x(\cdot)$ est indépendante de t).

Remarque 16. *Or que $(E \circ \mathbf{x})(t) = constante$, il vient que E est une intégrale première si sa dérivée totale est nulle*

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0.$$

Mais

$$\frac{d}{dt}E(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}E \cdot \frac{d}{dt}x_j(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}E \cdot f_j(x),$$

d'où E est une intégrale première si

$$\nabla E \cdot f(x) = 0, \forall x \in \Omega, \tag{4.2.3}$$

Exemple 9. *Considérons l'équation différentielle du second ordre*

$$x''(t) + a^2(1 + bx^2(t))x(t) = 0),$$

où a et b des constantes réelles. On montre que la fonction :

$$E(x(t), x'(t)) = \frac{1}{2}(x'(t))^2 + \frac{a^2}{2}x^2(t) + \frac{a^2 b}{4}x^4(t)$$

est une intégrale première pour cette EDO. Tout d'abord on transforme cette EDO à un système différentiel d'ordre un, en posant

$$x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = x'(t).$$

Il vient que $x_1'(t) = x'(t) = x_2(t)$ et $x_2'(t) = x''(t)$, c'est à dire :

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= -a^2(1 + bx_1^2(t))x_1(t) \end{aligned}$$

Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ et

$$f(X(t)) = f(x_1(t), x_2(t)) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -a^2(1 + bx_1^2(t))x_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

Alors, pour que E soit une intégrale première, il suffit que E soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial E(X)}{\partial x_j} \cdot f_j(X) = 0$$

C'est à dire

$$\frac{\partial E(x_1, x_2)}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial E(x_1, x_2)}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2) = 0.$$

Remarque 17. *(1) La connaissance d'une intégrale première est cruciale pour espérer résoudre explicitement une EDO. Elle est toujours utile pour montrer des propriétés qualitatives (géométriques) de cette équation.*

(2) Soit l'EDO du second ordre de la forme générale : $x''(t) + h(x(t)) = 0$, où h est une fonction régulière connue. Pour déterminer une intégrale première pour cette EDO, on multiplie l'équation par $x'(t)$, on aura

$$x''(t)x'(t) + x'(t)h(x(t)) = 0,$$

c'est à dire

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x'(t))^2 + \frac{d}{dt}h(x(t)) = 0.$$

D'où une intégrale première associe à cette EDO est donnée par

$$E(x(t), x'(t)) = \frac{1}{2}(x'(t))^2 + \int_0^{x(t)} h(x(\tau))d\tau,$$

ou bien

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} h(\tau)d\tau,$$

où $x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = x'(t)$.

(3) Parfois, on appelle l'intégrale première "loi de conservation" ou "l'invariant". Donc la recherche des "invariants" ou de "loi de conservation" est souvent l'une des première tâches que l'on se fixe dans l'étude d'une équation différentielle, que ce soit en mécanique classique ou physique moderne des hautes énergies.

Exemple 10. *Loi de conservation ou la fonction d'énergie d'un système de mouvement d'une particule matériel en mécanique classique, c'est à dire un système de la forme :*

$$x''(t) = F(x(t)),$$

où $x(\cdot)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (par exemple on peut prendre F comme une force extérieure, la masse étant supposée fixée égale à $m = 1$). Dans le cas où F dérive d'un potentiel, c'est à dire il existe une fonction $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$F(x) = -\nabla P(x).$$

La fonction P (supposée de classe C^1) est appelée **le potentiel***, ou encore $F_j(x) = -\frac{\partial P(x)}{\partial x_j}, j = \overline{1,n}$, d'où l'équation différentielle sera*

$$x''(t) = -\nabla P(x(t)).$$

On définie la fonction E de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$E(x,v) = \frac{\|v\|^2}{2} + P(x),$$

où $v(t) = x'(t)$ représente la vitesse de la particule.
Le premier terme $\frac{\|v\|^2}{2}$ est appelé **"énergie cinétique"** *et le second $P(x)$ est dit* **"énergie potentielle"** *tandis que E est souvent dite* **"énergie totale"**.
Soit maintenant $x(\cdot)$ une solution de l'EDO : $x''(t) = F(x(t)) = -\nabla P(x(t))$. On réécrit l'EDO sous forme d'un système différentiel d'ordre un, en posant $x'(t) = v(t)$, d'où $x''(t) = v'(t) = -\nabla P(x(t))$. Un calcul de la dérivée totale de E donne

$$\frac{d}{dt}E(x(t), v(t)) = 0$$

Ce qui signifie que E est une intégrale première (ou bien loi de conservation de l'énergie) pour la seconde loi de la mécanique classique.

4.3 ORBITES ET FLOTS

Le but dans ce paragraphe est l'étude de l'allure des courbes dans $\mathbb{R}^n$: $t \mapsto x(t)$ où $x(\cdot)$ est une solution maximale de l'EDO $x'(t) = f(x(t))$. Ces courbes sont appelées : orbites ou trajectoires du système différentiel. Cet aspect des choses peut avoir un but pratique. En effet, supposons que $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ soient des quantités physiques dépendant du temps t, alors connaitre séparément chaque fonction $t \mapsto x_i(t)$ permet de deviner l'évolution de chaque quantité en fonction du temps. Par contre, connaitre l'allure de la courbe $t \mapsto x(t)$, permet en particulier de décrire le comportement des quantités les unes par rapport aux autres.

Définition 4.3.1. (Orbites ou trajectoires) *Pour $x_0 \in \Omega$, la courbe intégrale passant par le point x_0 est appelée : "orbite de x_0" pour le champ de vecteurs f.*

Remarque 18. *(1) D'après l'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz, on peut dire que deux courbes intégrales passant par le même point se coïncident. D'où, on voit que deux orbites ayant un point commun se coïncident aussi.*

(2) Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que pour tout point $x_0 \in \Omega$, il existe une orbite de f passant par le point x_0. En conséquence, l'ensemble des orbites correspondant au champ de vecteurs f constitue une partition de l'ouvert Ω où f est définie. Cette partition sera appelée : **" portrait de phase"**.

(3) Lorsque l'on ne sait pas résoudre explicitement l'EDO, il est souvent quand même possible d'obtenir des informations très précises sur les orbites (et donc sur les solutions).

(4) Si l'on dispose d'une intégrale première E, alors toute orbite est inclus dans un ensemble de niveau de E c'est à dire si une orbite passant par un point x_0, alors cette orbite est portée par la courbe à niveau de E : $E(x) = E(x_0)$.

Définition 4.3.2. (Le flot) *Soit f un champ de vecteurs sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. On appelle flot associé à f l'application Φ qui à tout $x \in \Omega$ associe la solution maximale Φ_x de l'EDO : $x'(t) = f(x(t))$ telle que $\Phi_x(0) = x$.*

Remarque 19. *D'après cette définition, Φ est le flot associé au champ de vecteurs f si l'on a :*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Phi_x(t) = f(\Phi_x(t)), \quad x \in \Omega, \quad t \geqslant 0 \\ \Phi_x(0) = x, \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Remarque 20. *Suivant que l'on s'intéresse à la solution issue de x ou à sa dépendance par rapport à x ou à l'instant t, on utilisera les notations coïncidantes :*

$$\Phi_x(t) = \Phi_t(x) = \Phi(t, x)$$

Dans la définition suivante, nous décrivons quatre type d'orbites particulières que l'on rencontre souvent.

Définition 4.3.3. (Quelques types d'orbites) *Soit f un champ de vecteurs sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, x_0 un point de Ω et $(\Phi_t(x_0))_{t\in\mathbb{R}}$ une orbite passant par le point x_0 et définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

(1) On dit que x_0 est **un point d'équilibre** *(ou encore point stationnaire) du champ de vecteurs f si la fonction $t \longmapsto \Phi_t(x_0)$ est constante.*

(2) On dit que l'orbite $(\phi_t(x_0))_{t\in\mathbb{R}}$ est **un cycle** *si la fonction $t \longmapsto \Phi_t(x_0)$ est périodique.*

(3) On dit que l'orbite $(\phi_t(x_0))_{t\in\mathbb{R}}$ est **hétérocline** *si elle relie deux points d'équilibres distincts a et b (c'est à dire la courbe intégrale relie deux points d'équilibres différents en $-\infty$ et $+\infty$). Cela veut dire que $f(a) = f(b) = 0$ et $\lim_{t\to-\infty} \Phi_t(x_0) = a$ et $\lim_{t\to+\infty} \Phi_t(x_0) = b$.*

(4) Si $a = b$ dans la définition précédente, on dit que l'orbite est **homocline***. C'est à dire la courbe intégrale relie le même point d'équilibre en $-\infty$ et $+\infty$.*

La proposition suivante décrit les définitions précédentes.

Proposition 4.3.4. *Soit f un champ de vecteurs sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Alors*

(1) Le point $x_0 \in \Omega$ est **un point d'équilibre** *si et seulement si*

$$f(x_0) = 0 \tag{3}$$

(2) L'orbite $(\Phi_t(x))_{t\in\mathbb{R}}$ est périodique si et seulement s'ils existent deux temps distincts t_1 et t_2 tels que $\Phi_{t_1}(x) = \Phi_{t_2}(x)$. Dans ce cas, l'orbite du point x est une courbe fermée simple appelée **"cycle"***.*

Exemple 4 :

"Oscillateur harmonique"

Le mouvement d'un oscillateur harmonique est décrit par l'équation différentielle d'ordre deux

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0,$$

où ω *est une constante strictement positive. Prenons les conditions initiales* $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ *et* $x'(0) = x'_0 \in \mathbb{R}$*. Le polynôme caractéristique associé à l'EDO est* $\lambda^2 + \omega^2 = 0$*, d'où* $\lambda^2 = -\omega^2 < 0$*. Par suite, on aura deux racines imaginaires* $\lambda = \pm i\omega$*. Ainsi, une solution pour l'EDO s'écrit sous forme*

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}.$$

D'après les conditions initiales : $x(0) = c_1 + c_2 = x_0$ *et* $x'(0) = ic_1\omega - ic_2\omega = x'_0$*.*
Cela implique que

$$\begin{cases} c_1 = \frac{i\omega x_0 + x'_0}{2i\omega} \\ c_2 = \frac{i\omega x_0 - x'_0}{2i\omega} \end{cases}$$

Il vient q'une solution est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{i\omega x_0 + x'_0}{2i\omega} e^{i\omega t} + \frac{i\omega x_0 - x'_0}{2i\omega} e^{-i\omega t} \\ &= x_0 \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} + \frac{x'_0}{\omega} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2}, \end{aligned}$$

c'est à dire, une solution est donnée par

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{x'_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

De plus, la dérivée de cette solution est

$$x'(t) = -x_0 \omega \sin(\omega t) + x'_0 \cos(\omega t).$$

Un calcul simple montre que $x(t)$ *et* $x'(t)$ *vérifient l'identité suivante*

$$(x(t))^2 + \frac{1}{\omega^2}(x'(t))^2 = x_0^2 + \frac{1}{\omega^2}(x'_0)^2.$$

Alors, si on pose

$$E(x(t), x'(t)) = (x(t))^2 + \frac{1}{\omega^2}(x'(t))^2,$$

on voit que E est constante le long des trajectoires $(x(t), x'(t))$, par suite elle définie une intégrale première pour l'oscillateur harmonique. On déduit donc que **l'énergie est conservée***.*
L'identité

$$(x(t))^2 + \frac{1}{\omega^2}(x'(t))^2 = x_0^2 + \frac{1}{\omega^2}(x_0')^2$$

représente des **ellipses** *de centre $(0,0)$ de petit axe 1 et grand axe ω^2. Cela signifie que le portrait de phase des trajectoires de l'oscillateur harmonique au voisinage de (x_0, x_0') sont des* **cycles** *dans le plan (O, x, x').*
On remarque que si $\omega = 1$, les trajectoires vérifient l'identité

$$x(t)^2 + (x'(t))^2 = x_0^2 + (x_0')^2$$

qui représente des cercles centrées à l'origine.

Définition 4.3.5. *Pour les EDO du second ordre, le plan (O, x, x') est appelé :* **"plan de phase"***.*

Exemple 11. *Considérons l'équation différentielle d'ordre deux*

$$\begin{cases} x''(t) - x(t) = 0 \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_0' \end{cases}$$

Ici le polynôme caractéristique $\lambda^2 - 1 = 0$ implique que $\lambda = \pm 1$, d'où une solution s'écrit sous forme

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Pour déterminer les constantes c_1 et c_2, on utilise les données initiales. On a

$$\begin{cases} x(0) = x_0 = c_1 + c_2 \\ x'(0) = x_0' = c_1 - c_2. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} c_1 = \frac{x_0 + x_0'}{2} \\ c_2 = \frac{x_0 - x_0'}{2}. \end{cases}$$

Alors, une solution est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_0 + x_0'}{2} e^t + \frac{x_0 - x_0'}{2} e^{-t} \\ &= x_0 \frac{e^t + e^{-t}}{2} + x_0' \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ &= x_0 \cosh t + x_0' \sinh t. \end{aligned}$$

De plus, la dérivée de la solution est $x'(t) = x_0 \sinh t + x_0' \cosh t$. Un calcul simple montre que $x(t)$ et $x'(t)$ vérifient l'expression suivante

$$x^2(t) - (x'(t))^2 = x_0^2 - (x_0')^2.$$

On pose $E(t) = x^2(t) - (x'(t))^2$ et on voit qu'elle définie une intégrale première pour cette EDO. De plus, on observe que le portrait de phase des trajectoires au voisinage de $(x_0 x_0')$ dans le plan de phase (O, x, x') sont **des hyperboles** *et que $(0,0)$ est un point d'équilibre.*

4.4.1 *Définitions et propriétés*

Dans le premier paragraphe de ce chapitre, on a interprété les courbes $x(t)$ comme les courbes intégrales du champ de vecteurs $X = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$. Le théorème de redressement des champs de vecteurs montre qu'au voisinage de tout point x_0 où $a_i(x_0) \neq 0$ ces courbes intégrales, dans d'autres coordonnées, sont des droites parallèles et donc, dans les coordonnées originelles, les images de ces droites par un même difféomorphisme. Donc, si $a_i(x_0)$ s'annule, la situation sera différente.
L'objectif de ce paragraphe, est l'étude de la stabilité des points d'équilibres. Pour l'EDO autonome $x'(t) = f(x(t))$, on dit que x_0 est un point d'équilibre si $f(x_0) = 0$.
Ici, on suppose que f est un champ de vecteurs complet de classe C^1 défini sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ (c'est à dire toute solution maximale associe à $x'(t) = f(x(t))$ est globale).

Définition 4.4.1. *Soit x_0 un point stationnaire de f (c'est à dire $f(x_0) = 0$). On dit que x_0 est :*

(A) ***Stable :*** *si toute solution maximale issue d'un point proche de x_0 est définie sur $\mathbb{R}^+$ et reste proche de x_0 pour tout temps, c'est à dire :*
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $x(\cdot)$ est une solution de l'EDO : $x'(t) = f(x(t))$ qui à un instant t_0 vérifie $\|x(t_0) - x_0\| < \delta$, on a :
  (1) $x(\cdot)$ est définie pour tout $t \geqslant t_0$,
  (2) $\|x(t) - x_0\| < \varepsilon$, pour tout $t \geqslant t_0$.
  (Autrement dit : toute solution qui au temps $t = t_0$ est assez proche de x_0 le point stationnaire de f, reste proche de x_0 pour tout les temps ultérieurs).

  De plus, comme le système d'EDO est autonome, on peut prendre toujours $t_0 = 0$ car si $x(t)$ solution alors $x(t - t_0)$ est aussi solution).

(B) ***Instable :*** *si x_0 n'est pas stable.*

(C) ***Asymptotiquement stable :*** *s'il existe $\delta > 0$, tel que si $x(\cdot)$ est une solution de l'EDO $x'(t) = f(x(t))$, qui à l'instant t_0 vérifie $|x(t_0) - x_0| < \delta$ on a :*
  (1) $x(\cdot)$ est définie pour tout $t \geqslant t_0$,
  (2) $\lim_{t\to+\infty} x(t) = x_0$.

Remarque 21. *Il est clair que la stabilité asymptotique implique la stabilité.*

Remarque 22. *(1) Soit x_0 est un point stationnaire pour l'EDO $x'(t) = f(x(t))$. On pose : $\tilde{x}(t) = x(t) - x_0$ et $g(x(t)) = f(x(t) + x_0)$, on se ramène au cas $x_0 = 0$ (c'est à dire l'origine est un point stationnaire).*

(2) Si l'origine est un point stationnaire du système, au voisinage, la fonction f est approximée par premier terme de son développement de Taylor c'est à dire $Df(0) \cdot x(t)$ où $Df(0)$ est la matrice jacobienne de f à l'origine.
D'où, Il est tout à fait naturel de commencer par étudier ce cas. Nous nous limiterons dans ce qui suit au cas de la dimension deux : $n = 2$.

4.4.2 *Etude qualitative des systèmes différentiels linéaires dans* $\mathbb{R}^2$

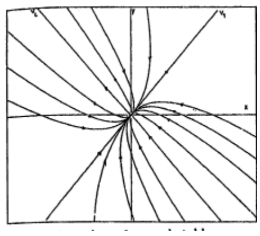
Ici on considère le système différentiel linéaire à coefficient constant suivant :

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \tag{4.4.1}$$

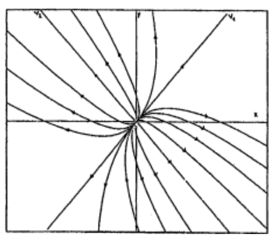
Ici $x : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et A est une matrice inversible à coefficients constants et réels.
L'allure des trajectoires (ou orbites) du système dépendent de la nature des valeurs propres de la matrice A. On trouvera ci-dessous, dans chacun des cas, l'allure des trajectoires ainsi que le nom attribué à l'unique point stationnaire qui est zéro.

Cas 1. A admet deux valeurs propres réelles distinctes λ_1, λ_2

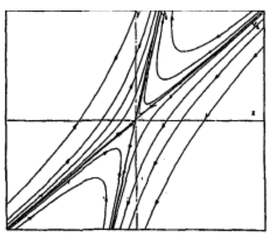
— • Si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, alors l'origine est un nœud stable,



— • Si $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, alors l'origine est un nœud instable.

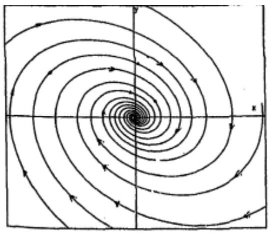


— • Si $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, alors l'origine est un point sel (ou col).

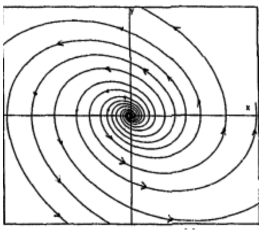


Cas 2. A admet deux valeurs propres non réelles, conjuguées $\lambda = \alpha \pm i\beta$

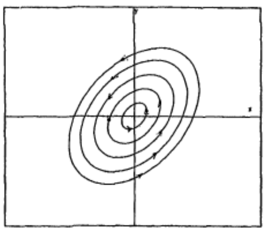
— • Si $Re\lambda < 0$, alors l'origine est un foyer stable



— • Si $Re\lambda > 0$, alors l'origine est foyer instable

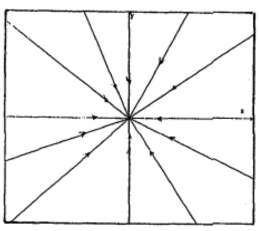


— • Si $Re\lambda = 0$, alors l'origine est un point centre.

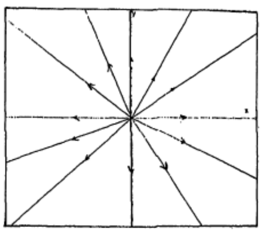


Cas 3. A admet une valeur propre réelle double λ

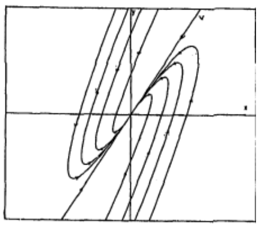
— • Si $\lambda < 0, dimE_\lambda = 2$, alors l'origine est un puit



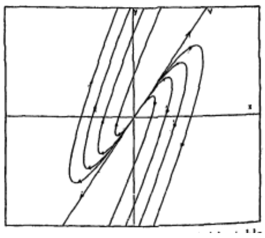
— • Si $\lambda > 0$ et $dimE_\lambda = 2$, alors l'origine est une source.



— • Si $\lambda < 0$ et $dimE_\lambda = 1$, alors l'origine est un nœud dégénéré stable



— • Si $\lambda > 0$ et $dimE_\lambda = 1$, alors l'origine est un nœud dégénéré instable



Explications et indications de preuve

Dans tous ces dessins le sens des flèches désigne le sens des t croissants (de $-\infty$ à $+\infty$, c'est à dire le sens dans lequel le point $x(t)$ se déplace lorsque t croît de $-\infty$ à $+\infty$.
Donnons une indication de preuve du premier cas, c'est à dire A admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 réelles :
Soient v_1 et v_2 deux vecteurs propres de A correspondant aux valeurs propres λ_1 et λ_2. Ils forment une base de $\mathbb{R}^2$, soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2). Si on note $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$, alors les coordonnées d'un point dans ces deux bases, on a : $x = Py$.

D'autre part on sait que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ alors le système d'EDO $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \frac{d}{dt}(Py(t)) \\ &= P(\frac{d}{dt}y(t)) \\ &= Ax(t) \\ &= APy(t) \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= P^{-1}APy(t) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} y(t) \end{aligned}$$

où $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$. Cela est équivalent aux deux EDO :

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t) \end{cases}$$

D'où les solutions sont les fonctions :

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1(0)e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = y_2(0)e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

pour toutes les valeurs de $(y_1(0), y_2(0)) \neq (0, 0)$.

Remarque 23. *Les trajectoires décrites dans les figures précédantes sont les courbes données en coordonnées paramétriques par $y_1 = y_0 e^{\lambda_1 t}, y_2 = y_0 e^{\lambda_2 t}$.*
Ces courbes $(y_1(t), y_2(t))$ sont tangentes au vecteur propre correspondant à la valeur propre de plus petit module et elles ont une direction parabolique dans la direction du vecteur propre correspondant à la valeur propre de plus grand module (Pour cela il faut examiner $\frac{y_1}{y_2}$).

4.4.3 *Etude qualitative des systèmes différentiels non linéaires autonomes au voisinage d'un point d'équilibre*

Supposons que l'origine est un point d'équilibre pour le système différentiel non linéaire autonome :

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) \tag{4.4.2}$$

Comme $f(0) = 0$ on peut écrire pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + df_x(0) \cdot x + g(x) \\ &= df_x(0) \cdot x + f(x) \end{aligned}$$

ici $df_x(0)$ est la différentielle (ou la jacobienne) de f à l'origine et g est une foction de classe C^1 qui vérifie

$$g(x) = 0(\|x\|); \|x\| \longrightarrow 0.$$

Alors, on peut écrire le système différentiel comme suit

$$\frac{d}{dt}x(t) = df_x(0) \cdot x(t) + g(x(t)), \tag{4.4.3}$$

où

$$g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), g(x) = 0(\|x\|), \|x\| \longrightarrow 0 \tag{4.4.4}$$

4.4.4 *Théorème de linéarisation*

Théorème 10. ***(Stabilité des solutions)*** *Soient (λ_k) les valeurs propres de $df_x(0)$ et supposons que $Re(\lambda_k) < 0, \forall k$. Alors pour tout μ tel que : $0 < \mu < \min(Re(-\lambda_k))$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $x(\cdot)$ est une solution de (4.4.3) qui à un instant t_0 vérifie $\|x(t_0)\| \leqslant \delta$, alors :*

(a) $x(\cdot)$ *existe pour tout* $t \geqslant t_0$.

(b) $\|x(t)\| \leqslant \varepsilon e^{-\mu t}; \forall t \geqslant t_0$

En particulier, l'origine est asymptotiquement stable.

Théorème 11. ***(Théorème de linéarisation)***
Soient (λ_k) les valeurs propres de $df_x(0)$. Supposons que : $Re(\lambda_k) \neq 0, \forall k$. Alors, il existe un voisinage U de l'origine et un homéomorphisme θ de U dans un voisinage V de zéro qui envoie une trajectoire du système (4.4.3) sur une trajectoire du système linéaire $x'(t) = df_x(0) \cdot x(t)$ en conservant le sens du temps.

Remarque 24. *Par exemple en dimension $n = 2$, les trajectoires du système non linéaire ressembleront à celles décrites au paragraphe précédant (cas linéaire $x'(t) = Ax(t)$) dans tous les cas à l'exception du cas du point centre où $Re\lambda = 0$ et pour lequel le théorème de linéarisation est faux.*

Voici un exemple qui illustre cette remarque Soit le système différentielnon linéaire en dimension $n = 2$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - x(x^2+y^2) \\ x - y(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

Ici $f(x,y) = (-y - x(x^2+y^2))$. On voit que $f(0,0) = (0,0)$, d'où l'origine est un point d'équilibre.
On écrit le système linéarisé en utilisant la formule de Taylor au voisinage de l'origine

$$X'(t) = df_X(0)X(t) + g(X),$$

où $X = (x,y)$. Alors le système linéaire est $X'(t) = df_x(0) \cdot X(t)$ où

$$df_X = df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -3x^2 & -1 \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}$$

d'où $df_X(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Un calcul simple donne les valeurs propres $\lambda = \pm i$, d'où ici $Re\lambda = 0$.
Du paragraphe précédant, l'origine $(0,0)$ est un centre pour le système linéaire $X'(t) = dF_X(0) \cdot X(t)$ et les orbites sont des cercles centrés en zéro. Que se passe pour le système non linéaire ?
Faisons un passage aux coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t)\cos\theta(t) \\ y(t) = \rho(t)\sin\theta(t) \end{cases} \tag{4.4.5}$$

alors, la dérivation par rapport à t donne

$$\begin{aligned} x'(t) &= \rho'(t)\cos\theta(t) - \rho(t)\theta'(t)\sin\theta(t) \\ y'(t) &= \rho'(t)\sin\theta(t) + \rho(t)\theta'(t)\cot\theta(t). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{cases} x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = \rho(t)\rho'(t) \\ x(t)y'(t) - x'(t)y(t) = \rho^2(t)\theta'(t) \end{cases} \tag{4.4.6}$$

Il vient que

$$\rho(t)\rho'(t) = -xy - x^2(x^2+y^2) + xy - y^2(x^2+y^2) = -\rho^4(t)$$
$$\rho^2(t)\theta'(t) = x^2 - xy(x^2+y^2) + y^2 + xy(x^2+y^2) = \rho^2(t)$$

Ce qui donne pour $\rho \neq 0$ (c'est à dire pour une trajectoire issue d'un point non nul) :

$$\begin{cases} \rho'(t) = -\rho^3(t) \\ \theta'(t) = 1. \end{cases} \tag{4.4.7}$$

Il vient que

$$\begin{aligned}
\int \frac{\rho'(t)}{\rho^3(t)} dt &= -\int 1 dt \\
\frac{-1}{2}\int (\frac{1}{\rho^2(t)}) dt &= -\int 1 dt \\
\frac{-1}{2}(\frac{1}{\rho^2(t)} - \frac{1}{\rho^2(0)}) &= -t \\
\frac{1}{\rho^2(t)} &= 2t + \frac{1}{\rho^2(0)} \\
&= \frac{2t\rho^2(0)+1}{\rho^2(0)}.
\end{aligned}$$

Alors, on obtient pour tout $t \geqslant 0$:

$$\begin{cases} \rho(t) = (\frac{\rho^2(0)}{1+2t\rho^2(0)})^{\frac{1}{2}} \\ \theta(t) = \theta(0) + t. \end{cases}$$

Ce qui montre que lorsque $t \longrightarrow +\infty$ alors

$$\theta(t) \longrightarrow +\infty, \quad \rho(t) \longrightarrow 0.$$

D'où une trajectoire de la solution du système non linéaire, au voisinage de l'origine $(0,0)$, est une spirale qui converge vers l'origine (c'est un ensemble non compact), tandis que la trajectoire du système linéarisé $X'(t) = df_X(0) \cdot X(t) + g(X)$ est un cercle (qui est un ensemble compact). Par conséquent, ces trajectoires ne peuvent être images l'une de l'autre par un homéomorphisme. Ce qui justifie le théorème précédent.

4.4.5 *Méthode d'étude des systèmes différentiels autonomes en dimension $n = 2$*

Dans ce paragraphe, nous allons donner quelques éléments qui forment un protocole de l'étude géométrique des systèmes différentiels autonomes de dimension $n = 2$. Considérons alors un tel système sous la forme

$$\begin{cases} x't) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases} \tag{4.4.8}$$

où f et g sont des fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

(1) ON DÉTERMINE LES POINTS D'ÉQUILIBRES On étudie leur nature (nœud, col, foyer, $\cdots$). Les résultats du paragraphe précédent ainsi que le théorème de linéarisation nous donnent (sauf le cas de centre) une idée de l'allure des trajectoires au voisinage de ces points.
Pratiquement si $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$, il est commode de poser

$$X = x - x_0, = y - y_0.$$

Par ailleurs

$$f(x, y) = aX + bY + o(X^2 + Y^2)$$

et

$$g(x, y) = cX + dY + o(X^2 + Y^2).$$

Le linéarisé du système en (x_0, y_0) a pour matrice

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right)$$

(2) ON TRACE LES ISOCLINES : Une isocline est une courbe du plan le long de laquelle la pente des trajectoires est constante. Si $m \in \overline{\mathbb{R}}$ on pose

$$I_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = m\}.$$

Le long de I_m on a $\frac{x'(t)}{y'(t)} = m$. Si $m = 0$, I_0 est l'isocline où la pente de la trajectoire est horizontale. Si $m = \infty$, I_∞ est l'isocline où la pente de la trajectoire est verticale. On a

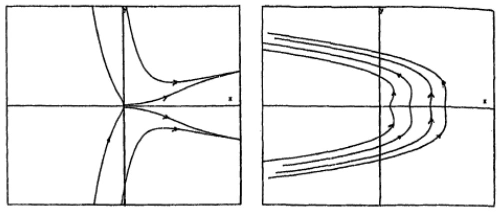
$$\begin{cases} I_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\} \\ I_\infty = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\} \end{cases}$$

(3) ON RÉGIONNE LE PLAN SUIVANT LE SENS DU CHAMP : On détermine pour cela les régions où $f(x, y) > 0$, $f(x, y) < 0$ de même pour g.

$f > 0, g > 0$	$f > 0, g < 0$	$f < 0, g > 0$	$f < 0, g < 0.$
$\nearrow$	$\searrow$	$\nwarrow$	$\swarrow$

(4) ON EXAMINE LES SYMÉTRIES : Les orbites peuvent être symétriques par rapport à (Ox), (Oy) où l'origine. Soient Γ_1 et Γ_2 deux trajectoires symétriques. On dit qu'elles sont parcourues dans le même sens si, en tous points symétriques, les vecteurs orientés sont symétriques.

Symétrie par rapport à (ox) :



elle est vérifiée dans l'un des deux cas suivant :

Cas1.

$$\begin{cases} f(x,-y) = f(x,y) \\ g(x,-y) = -g(x,y) \end{cases}$$

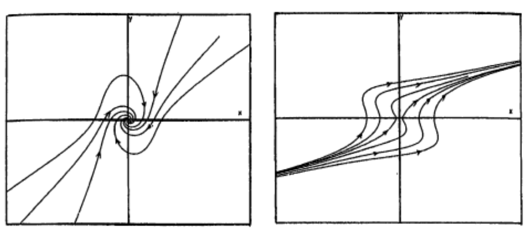
Cas2.

$$\begin{cases} f(x,-y) = -f(x,y) \\ g(x,-y) = g(x,y) \end{cases}$$

En effet, dans le cas1., si $(x(t), y(t))$ est une solution pour l'EDO (4.4.8), pour $t \in (a,b)$, alors $(x_1(t), y_1(t))$ où $x_1(t) = x(t)$ et $y_1(t) = -y(t)$, $t \in (a,b)$ est aussi une solution. Les deux orbites sont alors parcourues dans le même sens, les vecteurs tangents étant symétriques.

Dans le cas 2., les orbites sont parcourues en sens inverse.

Symétrie par rapport à (oy) :



elle est vérifiée dans l'un des deux cas suivant

Cas1.

$$\begin{cases} f(-x,y) = -f(x,y) \\ g(-x,y) = g(x,y) \end{cases}$$

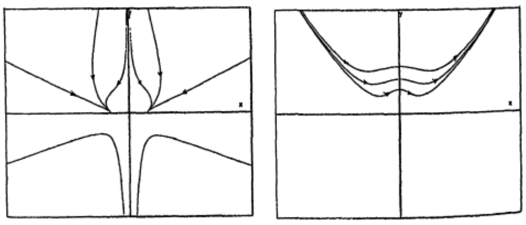
Cas2.

$$\begin{cases} f(-x,y) = f(x,y) \\ g(-x,y) = -g(x,y) \end{cases}$$

Ici, dans le cas1., les orbites symétriques sont parcourues dans le meme sens, et les vecteurs tangents étant symétriques,

et dans le cas 2., les sens sont opposés.

Symétrie par rapport à l'origine :



on a deux cas

Cas1.

$$\begin{cases} f(-x,-y) = -f(x,y) \\ g(-x,-y) = -g(x,y) \end{cases}$$

Cas2.

$$\begin{cases} f(-x,-y) = f(x,y) \\ g(-x,-y) = g(x,y) \end{cases}$$

Dans le cas1., les orbites sont symétriques par rapport à l'origine, et le sens de parcours des orbites symétriques dans ce cas est le même.

par contre dans le cas2., le sens est inversé

(5) ON DÉTERMINE LES ZONES PIÈGES Une zone piège est une partie du plan telle que toute trajectoire qui y entre, ne peut pas plus en ressortir. C'est le cas par exemple si le champ est rentrant sur tous les cotés de la zone.

Affinement du protocole

(1) Le théorème de Cauchy Lipschitz nous dit que par tout point du plan passe une et une seule solution du système (4.4.8). En particulier, deux trajectoires du système ne se coupent jamais.

(2) Au voisinage des points (x_0, y_0) où $f(x_0, y_0) \neq 0$, les trajectoires du système (4.4.8) se coïncident avec le graphes des solutions de l'équation différentielle $y'(x) = \frac{g(x,y(x))}{f(x,y(x))}$.

En particulier, les trajectoires sont des courbes $y = \phi(x)$. Ceci peut aussi servir à déterminer la concavité des trajectoires. Pour cela, on peut calculer $y''(x)$ à partir de l'équation ci-dessus et étudier son signe.
De même, si on a $g(x_0, y_0) \neq 0$ au voisinage de (x_0, y_0). Dans ce cas, les trajectoires du système (5) se coïncident avec le graphes des solutions de l'équation différentielle $x'(y) = \frac{f(x(y,y))}{g(x(y),y)}$. En particulier, ici les trajectoires sont des fonctions $x = \psi(y)$.

(3) A propos des isoclines :
Si une isocline I_m est une droite de pente m, alors c'est une solution particulière de notre système.

(4) Trajectoires monotones :
On dit qu'une trajectoire est monotone si dans le plan elle est le graphe d'une fonction $y = \phi(x)$ croissante ou décroissante. On peut dire alors que :
Si une trajectoire est monotone, alors elle sort de tout compact qui ne contient pas de points d'équilibres. (Cela montre que si $lim_{t\to+\infty}(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$ alors (x_0, y_0) est un point d'équilibre.

4.5 EXERCICES

Exercice 1. On cherche à analyser le phénomène de la vague solitaire, ou le problème de soliton. Le problème est modélisé comme un long canal considéré unidimensionnel. La quantité intéressante est le profil $u(\cdot,\cdot)$ de la surface de l'eau, qui est une fonction du temps t et de la position x le long du canal. Ce profil est mesuré par rapport à la hauteur h de l'eau au repos. Il satisfait l'équation aux dérivées partielles dite de Korteweg–de Vries :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{\partial}{\partial x}\left(hu + \frac{3}{4}u^2 + \frac{\sigma}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \tag{4.5.1}$$

où g est la constante de gravitation et $\sigma > 0$ est une constante (qui dépend de h, de g et de la tension superficielle). On appelle soliton, une solution $u(t, x)$ de l'équation aux dérivées partielles (4.5.1) telle que :

$$u(t, x) = z(s), \quad \text{où} \quad s = x - vt,$$

où v étant une constante (c'est la vitesse de la vague).
On suppose que $z(s)$ et toutes ses dérivées tendent vers 0 quand s tend vers l'infini.
Le but de l'exercice est de démontrer l'existence de solution et de préciser la vitesse et l'amplitude de la vague.

(1) Montrer qu'un soliton $z(s)$ vérifie l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\sigma z''(s) = bz(s) - \frac{3}{2}z^2(s), \tag{4.5.2}$$

où b est une constante.

(2) Ecrire (4.5.2) sous forme d'un système différentiel d'ordre un $x'(s) = f(x(s))$. Déterminer les points d'équilibres de f et discuter leur stabilité en utilisant la méthode de linéarisation. Que peut-on dire sur l'existence des solitons ?

(3) Trouver une constante du mouvement, c'est-à-dire une intégrale première.

(4) Montrer que, si $b < 0$, il n'y a pas de soliton.

(5) Supposons $b > 0$. Montrer qu'il existe un unique soliton $u(t, x)$, tracer son orbite et déterminer son amplitude.

SOLUTION

(1) Considérons la fonction
$$y(t, x) = z(s),$$
où le changement de variable s est donné par $s = x - vt$. Alors les dérivées partielles s'écrivent
$$\frac{\partial y}{\partial t} = -vz'(s),$$
et
$$\frac{\partial y}{\partial x} = z'(s).$$
D'où l'équation différentielle partielle (4.5.1) de Korteweg-de Vries s'écrit comme suit
$$-vz'(s) = -\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{d}{ds}\Big(hz(s) + \frac{3}{4}z^2(s) + \frac{\sigma}{2}z''(s)\Big),$$
ou encore
$$\frac{d}{ds}\Big(2(h - v\sqrt{\frac{h}{g}})z(s) + \frac{2}{3}z^2(s) + \sigma z''(s)\Big) = 0.$$
On voit que la quantité $2(h - v\sqrt{\frac{h}{g}})z(s) + \frac{2}{3}z^2(s) + \sigma z''(s)$ est indépendante de s. Par ailleurs, les conditions aux limites impliquent qu'elle est nulle, ce qui donne l'équation demandé avec
$$b = 2(v\sqrt{\frac{h}{g}} - h).$$

(2) On pose $x(s) = (x_1(s), x_2(s)$, où $x_1(s) = z(s)$ et $x_2(s) = z'(s)$. Alors l'équation différentielle d'ordre deux (4.5.2) peut s'écrire sous forme d'un système différentiel d'ordre un $x'(s) = f(x(s))$, où le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ associé à l'équation est
$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ bx_1 - \frac{3}{2}x_1^2 \end{pmatrix}$$
Ce champ admet deux points d'équilibres : $(0, 0)$ et $(\frac{2b}{3}, 0)$. Calculons le linéarisé autour de chacun des équilibres. On a la différentielle de f est
$$Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b - 3x_1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$
Les valeurs propres du linéarisé à l'origine sont donc
$$\pm i\sqrt{|b|} \quad si \quad b \leqslant 0 \quad , \quad \pm\sqrt{|b|} \quad si \quad b \geqslant 0.$$

et celles du linéarisé en $\overline{x}$ sont

$$\pm\sqrt{|b|} \quad si \quad b \leqslant 0 \quad , \quad \pm i\sqrt{|b|} \quad si \quad b \geqslant 0.$$

Ainsi, pour $b > 0$ l'origine est un équilibre non stable, et on ne peut pas conclure pour $\overline{x}$, qui n'est pas hyperbolique. Inversement pour $b < 0$, $\overline{x}$ n'est pas stable et l'origine n'est pas hyperbolique.
Que peut-on conclure pour l'existence de solutions ? On sait que pour un soliton $z(s)$, la solution $(z(s), z'(s))$ de $x' = f(x)$ tend vers 0 quand $s \longrightarrow \pm\infty$. Pour qu'un soliton existe, il faut donc qu'il existe une solution de $x' = f(x)$ qui tend vers 0 en $\pm\infty$

Quand $b < 0$, la linéarisation ne nous apprend rien. Quand $b > 0$ en revanche, l'origine est un équilibre hyperbolique. D'après le théorème d'Hartman-Grobmann, on sait alors qu'au voisinage de l'origine, le portrait de phase de $x' = f(x)$ est topologiquement équivalent à celui de l'équation linéarisée car celle-ci admet une valeur propre positive et une négative, il y a que 2 solutions qui tend vers l'origine en $\pm\infty$.

Il est donc impossible qu'il existe des solutions mais pas plus de deux. Remarquons que si les valeurs propres du linéarisé avaient été toutes deux de même signe, on aurait pu conclure qu'il n'y avait pas de solutions.

(3) Il faut trouver une fonction de classe C^1 au voisinage de l'équilibre notée E telle que $\nabla E(x) \cdot f(x) \equiv 0$, c'est-à-dire

$$x_2 \frac{\partial E}{\partial x_1}(x) + (bx_1 - \frac{3}{2}x_1^2)\frac{\partial E}{\partial x_2}(x) = 0$$

On peut prendre par exemple

$$E(x) = \frac{x_1^2}{2}(x_1 - b) + \frac{x_2^2}{2}$$

(4) Soit $x(.) = (z(.), z'(.))$ une solution de $x'(s) = f(x(s))$ associée à un soliton $z(.)$. On sait que une intégrale première E est une constante le long des champs de vecteurs solutions de $x'(s) = f(x(s))$ et vu les conditions aux limites des solitons, cette fonction constante vérifie $E(0) = 0$. Ainsi l'orbite de $x(.)$ est contenue dans la courbe de niveau

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : E(x) = 0\}.$$

Donc, lorsque $b < 0$ alors l'origine est un point isolé de cette courbe de niveau (c'est un minimum locale). La seule solution qui tend vers 0 en $\pm\infty$ est donc la solution triviale $x(s) \equiv 0$. Il n'y a donc pas de solution pour $b < 0$.

(5) Si $b > 0$, on peut voir d'après la courbe de niveau $\{x \in \mathbb{R}^2 : E(x) = 0\}$ que les branches du demi-plan gauche sont infinies, par suite, on conclut qu'une solution $x(.)$ associée à un soliton doit être contenue dans la boucle du demi-plan de droite. Il reste à montrer qu'il existe une solution parcourant l'ensemble de la boucle (privée de l'origine). Soit $x^*(b, 0)$ le point d'intersection de la boucle avec l'axe horizontal et $x(.)$ la solution maximale issue de x^* en $s = 0$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ Puisque $f(x^*) = (0, -\frac{b}{2})$, la demi-orbite $x(]0, \infty)$ est dans la partie de la boucle où $x_2 < 0$: la fonction $x_1(t)$

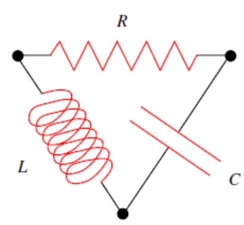
est décroissante et positive, d'où elle admet une limite. De plus, $x_1'(s)$ étant non nulle, sur cette partie de la boucle $x_2(s)$ est fonction de $x_1(s)$ et admet également une limite. Donc $x(s)$ a une limite quand $t \longrightarrow \infty$. Cette limite étant forcément un équilibre ce ne peut être que l'origine. Le même raisonnement s'applique quand $t \longrightarrow -\infty$.

Ainsi, $x(.)$ est une solution qui tend vers l'origine quand $s \longrightarrow \pm\infty$ (toutes les autres s'obtiennent à partir de celle-ci par une translation du temps). Sa coordonnée $x_1(s) = z(s)$ est alors un soliton. On sait de plus que son amplitude maximale, obtenue pour $x_2 = 0$, est égale à b.

En résumé, on a démontré que pour toute vitesse de propagation v telle que $b > 0$, c'est-à-dire $v > \sqrt{gh}$, il existe un soliton dont l'amplitude maximale est $b = 2(v\sqrt{\frac{h}{g}} - h)$.

Exercice 2.
L'évolution d'un circuit électrique d'intensité $i(t)$ et de potentiel $v(t)$ est décrite par le système d'équations différentielles sur $\mathbb{R}^2$ du type

$$\begin{cases} L\frac{di}{dt} = v - h(i(t)) \\ C\frac{dv}{dt} = -i(t) \end{cases} \tag{4.5.3}$$



Où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 et les constantes positives L et C sont la résistance et la capacité du circuit. L'énergie du système est

$$E(i, v) = \frac{1}{2}(Li^2 + Cv^2).$$

(1) Déterminer les points d'équilibre de l'équation (4.5.3) et discuter sa stabilité en fonction de $h'(0)$.
(2) Supposons que h vérifie $xh(x) > 0$ pour $x \neq 0$. Montrer que l'équilibre est asymptotiquement stable et déterminer son bassin d'attraction.

SOLUTION

1. L'équilibre est le point $i = 0$, $v = h(0)$. Le linéarisé de l'équation différentielle en ce point $(0, h(0)$ est $x'(t) = Ax(t)$, où

$$A$$

est la différentielle de f le champ associe au système différentiel au point $(0, h(0)$:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{h'(0)}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que $\det A = \frac{1}{LC} > 0$. Les valeurs propres de A ont donc des parties réelles de même signe, qui est aussi le signe de $trA = -\frac{h'(0)}{L}$, on en conclut alors que
- — • Si $h'(0) > 0$, alors l'équilibre est asymptotiquement stable.
- — • Si $h'(0) < 0$, alors l'équilibre n'est pas stable.
- — • Si $h'(0) = 0$, alors l'équilibre n'est pas hyperbolique, on ne peut rien dire en utilisons le linéarisé.

(2) Notons tout d'abord que l'hypothèse sur h implique que $h(0) = 0$. L'équilibre est donc l'origine. Essayons de montrer que l'énergie $E(i, v) = \frac{1}{2}(Li^2 + Cv^2)$ est une fonction de Lyapunov stricte à l'origine. On a
- — • l'origine est un minimum strict de E.
- — • $\frac{dE}{dt} = -ih(i) < 0$ si $i \neq 0$.

On a donc démontré que, le long d'une trajectoire $x(t) = (i(t), v(t))$, la fonction $E(x(t))$ est strictement décroissante tant que $i(t) \neq 0$. Or , si $x(t)$ n'est pas identiquement nulle, les instants t_0 o où $i(t_0) = 0$ sont isolés puisqu'alors $i'(t_0) = v(t_0) \neq 0$. Ainsi $\frac{dE}{dt} < 0$ presque partout le long d'une trajectoire. D'où on peut conclure que $E(x(t))$ est strictement décroissante.
Par conséquent, la fonction $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov stricte à l'origine, ce qui implique que l'origine est un équilibre asymptotiquement stable.
De plus, $E(x) \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$, ce qui implique que le bassin d'attraction de l'origine est l'espace $\mathbb{R}^2$ tout entier.

Exercice 3. Soit le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t), \quad t \geq 0 \\ y'(t) = \big(x(t) - y^2(t)\big)y(t), \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{4.5.4}$$

(1) Déterminer une solution générale pour (4.5.4).
(**Indication** : Voir que $\frac{dy}{dx} = -y + \frac{y^3}{x}$ puis utiliser le changement $u = \frac{1}{y^2}$).

(2) Montrer, en utilisant la définition, que le point d'équilibre $(0, 0)$ de (4.5.4) est asymptotiquement stable.

SOLUTION

(1) Déterminons une solution générale pour (4.5.4). On a $x'(t) = -x(t)$ implique que si $x(t) \neq 0, \forall t \geqslant 0$ alors $\frac{x'(t)}{x(t)} = -1$ et par intégration en t on trouve $\ln x(t) - \ln(x(0)) = -t$ d'où

$$\ln \frac{x(t)}{x(0)} = -t \Rightarrow x(t) = x(0)e^{-t}; \forall t \geqslant 0.$$

Pour la deuxième équation on effectue un changement de variable convenable en posant $u = \frac{1}{y^2}$. On aura donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x - y^2)}{-x} = -y + \frac{1}{x}y^3.$$

Or que $u = \frac{1}{y^2}$ alors $du = \frac{-2}{y^3}dy$ (on suppose aussi que $y(t) \neq 0, \forall t \geqslant 0$), c'est-à-dire

$$dy = -\frac{1}{2}y^3 du.$$

Donc $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}y^3\frac{du}{dx} = -y + \frac{1}{x}y^3$. On obtient alors $\frac{du}{dx} = \frac{2y}{y^3} - \frac{2}{y^3}.\frac{1}{x}y^3$, ou bien $\frac{du}{dx} = \frac{2}{y^2} - \frac{2}{x}$.
On aura alors

$$\frac{du}{dx} = 2u - \frac{2}{x}.$$

C'est une EDO d'ordre un, linéaire et non homogène. On peut écrire

$$u'(x) = 2u(x) - \frac{2}{x}$$

, d'où une solution générale de cette EDO est donnée en utilisant la formule de Duhamel

$$u(x) = Ce^{2x} - 2\int_{x(0)}^{x} \frac{1}{s}e^{-2s}ds \tag{*}$$

avec $C > 0$ car $u = \frac{1}{y^2} > 0$.
D'où on trouve $y(t)$ en faisant le changement inverse , c'est-à-dire

$$u = \frac{1}{y^2} \Rightarrow y^2(t) = \frac{1}{u(t)},$$

avec $u(t) = u(x(t))$.
D'où $y(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{u(x(t))}}$ avec $u(.)$ est donnée en fonction de $x(t)$. Ainsi $(x(t), y(t))$ est une solution générale de (4.5.4).

2) Montrons que l'origine $(0,0)$ est asymptotiquement stable. Par définition de la stabilité asymptotique, tout d'abord on a

$$x(t) = x(0)e^{-t},$$

d'où on remarque que
— • si $x(0) < 0$, alors $x(0) \leqslant x(t) < 0$.
— • si $x(0) > 0$, alors $0 < x(t) \leqslant x(0)$ (cela signifie que $x(t)$ est proche de $x(0)$ pour tout $t > 0$).

Montrons aussi que $y(t)$ est proche (c'est-à-dire au voisinage de $y(0)$) pour tout temps t, et pour cela on utilise $u(t)$

$$u(x(t)) = Ce^{2x(t)} - 2\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{e^{-2s}}{s}ds.$$

D'après que $x(0) \leqslant x(t) < 0$ si $x(0) < 0$ et $0 < x(t) \leqslant x(0)$ si $x(0) > 0$, on conclus que

$$-2\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{e^{-2s}}{s}ds > 0, \forall t.$$

Par suite
$$u(t) \geqslant Ce^{2x(t)},$$
mais

$$\begin{aligned} u(t) = \frac{1}{y^2(t)} &\Longrightarrow \frac{1}{y^2(t)} \geqslant Ce^{2x(t)} \\ &\Longrightarrow y^2(t) \leqslant \frac{1}{C}e^{-2x(t)} \leqslant \frac{1}{C}e^{+2x(0)}. \end{aligned}$$

De plus
$$\begin{aligned} u(0) = Ce^{2x(0)} &\Longrightarrow C = u(0)e^{-2x(0)} \\ &\Longrightarrow C = \frac{1}{y^2(0)}e^{-2x(0)} \\ &\Longrightarrow \frac{1}{C} = y^2(0)e^{2x(0)}. \end{aligned}$$

D'où
$$y^2(t) \leqslant y^2(0)e^{2x(0)}e^{2|x(0)|}; \forall t > 0$$
c'est-à-dire $y(t)$ est aussi au voisinage de $y(0)$ pour tout t. Donc l'origine $(0,0)$ est stable .

De plus pour le stabilité asymptotique, il faut vérifie que
$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} |x(t)| = 0 \quad et \quad \lim_{t \longrightarrow +\infty} |y(t)| = 0.$$

On a
$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} x(0)e^{-t} = 0.$$

De plus
$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} u(t) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} Ce^{2x(t)} - 2\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{e^{-2s}}{s} ds.$$

On voit que
$$\begin{aligned} \lim_{t \longrightarrow +\infty} \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{e^{-2s}}{s} ds &= \lim_{x(t) 0+\infty} \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{e^{-2s}}{s} ds \\ &= -\infty \end{aligned}$$

D'où
$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} u(t) = -\infty.$$

Par suite
$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} y^2(t) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{1}{u(t)} = 0,$$

ce qui signifie que l'origine $(0,0)$ est asymptotiquement stable.

Exercice 4. On rencontre souvent le phénomène "prédateurs-proies" quand on veut étudier deux populations dont leurs croissances influent l'une sur l'autre. Ce phénomène est représenté par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)\big(1 - x_2(t)\big), & t \geq 0 \\ x_2'(t) = x_2(t)\big(x_1(t) - 1\big), & t \geq 0 \end{cases} \tag{4.5.5}$$

(1) Écrire (4.5.5) sous forme d'un système autonome $x'(t) = f(x(t))$.

(2) Vérifier que $E(x_1, x_2) = x_1 x_2 e^{-(x_1+x_2)}$ est une intégrale première pour (4.5.5).

(3) Soit (x_1^0, x_2^0) un point de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $x_1^0 x_2^0 > 0$. Montrer que toute solution de (4.5.5) passant par le point (x_1^0, x_2^0) a une orbite telle que $x_1(t)x_2(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

(4) Déterminer les points d'équilibres pour (4.5.5), écrire le système linéarisé au voisinage de chaque point et déduire l'allure des trajectoires pour ce système.

Exercice 5. Dans un modèle d'économie de pure accumulation, on ne fait pas apparaître explicitement le travail, toute production étant accumulée. Le modèle est alors caractérisé par les fonctions de production des biens et par les coefficients de dépréciation des capitaux. Considérons alors un modèle comportant deux biens capitaux, 1 et 2. On note $Y_i(\cdot)$ la quantité de bien i produite et $k_i(\cdot)$ la quantité de bien i entrant comme capital dans la production. Les fonctions de production sont de la forme

$$\begin{cases} Y_1(t) = \lambda_1 k_1^{\alpha_1}(t) k_2^{\beta_1}(t), \\ Y_2(t) = \lambda_2 k_1^{\alpha_2}(t) k_2^{\beta_2}(t), \end{cases} \tag{4.5.6}$$

Avec les coefficients $\lambda_i, \alpha_i, \beta_i \in [0, 1]$ et le coefficient de dépréciation du capital i est un réel $\rho_i \in [0, 1]$. Les équations différentielles du système sont donc

$$\begin{cases} k_1'(t) = Y_1(t) - \rho_1 k_1(t), \\ k_2'(t) = Y_2(t) - \rho_2 k_2(t), \end{cases} \tag{4.5.7}$$

(1) Déterminer l'équilibre du système (6.1.2)

(2) Etudier sa stabilité par linéarisation.

(3) Considérons maintenant l'équation différentielle

$$\begin{cases} k_1'(t) = k_1(t)k_2(t) - k_1^3(t), \\ k_2'(t) = k_1(t)k_2(t) - k_2^3(t), \end{cases} \tag{4.5.8}$$

qui résulte d'un modèle micro-économique simplifié, les variables $k_1(\cdot)$ et $k_2(\cdot)$ pouvant représenter des stocks de capitaux. On étudie l'évolution des stocks de capitaux, que l'on suppose tous deux strictement positifs.

(3.1) Déterminer l'équilibre du système (4.5.8) puis étudier sa stabilité par linéarisation.

(3.2) Etudier le portrait de phase, et montrer que toute solution $k(t) = (k_1(t), k_2(t))$ de (4.5.8) a une limite quand $t \to +\infty$ puis que cette solution est asymptotiquement stable.

SOLUTION

(1) L'équation différentielle s'écrit $K'(t) = f(k(t))$ avec $k = (k_1, k_2)$ et $]0, +\infty[^2$ et

$$f(k)) = \begin{pmatrix} (k_2 - k_1^2)k_1 \\ (k_1 - k_2^2)k_2. \end{pmatrix}$$

Remarquons d'abord que $f_1(k) = 0$ sur l'axe Ok_2 et que $f_2(k) = 0$ sur l'axe Ok_1, l'orbite d'un point sur l'axe Ok_1 est donc continue dans Ok_1, de même pour Ok_2. Il est donc impossible de traverser un axe, ce qui implique que si les capitaux k_1 et k_2 sont positifs à l'instant initiales , ils le restent au cours du temps.

Un point d'équilibre satisfait $f(k) = 0$. Or

$$f_1(k) = 0 \Longrightarrow k_2 = k_1^2 \quad et \quad f_2(k) = 0 \Longrightarrow k_1 = k_2^2$$

c'est-à-dire que le seul point équilibre est $k_0 = (1, 1)$.

(2) Calculons la différentielle du champs f

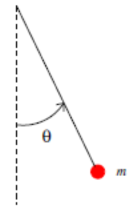
$$Df(k) = \begin{bmatrix} k_2 - 3k_1^2 & k_1 \\ k_2 & k_1 - 3k_2^2 \end{bmatrix} \Longrightarrow Df(k_0) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Comme $\det Df(k_0) = 3 > 0$ et $trDf(k_0) = -4 < 0$, les deux valeurs propres de la matrice ont des parties réelles strictement négatives. On conclut alors que k_0 est un équilibre asymptotiquement stable.

(3) Séparons le quadrant positif en 4 régions. Nous allons d'abord montrer que toute solution de l'équation différentielle est définie sur $[0, +\infty[$ et qu'elle admet une limite quand $t \to +\infty$. On va faire le raisonnement sur une seule région. Considérons alors le premier quadrant du plan noté D. Sur les bords de D, excepté en k, le champs de vecteurs f est dirigé vers l'intérieur de D. Autrement dit, si $k \in \partial D, k \neq k_1$, le flot $\phi_t(k)$ de f appartient à D pour $t > 0$ suffisamment petit. La région D est donc positivement invariante par le flot, c'est-à- dire $\phi_t(D) \subset D$. Prenons alors une solution $k(.)$ sur $[0, +\infty[$ dont la condition initiale $k(0) \in D$. Elle est contenue dans D, où f_1 et f_2 sont positives, donc $k_1(t)$ et $k_2(t)$ sont croissantes. Cela implique que $k(.)$ est incluse dans le compact $\{k_1 \geq k_1(0), k_2 \geq k_2(0)\} \cap D$, ce qui signifie qu'elle est définie sur tout $[0, +\infty[$, et que ses coordonnées $k_1(.)$ et $k_2(.)$ sont croissantes, d'où $k(t)$ admet une limite dans ce compact quand $t \to \infty$.

Or on sait que si une solution a une limite, cette limite est un équilibre, alors la limite d'une solution est toujours l'équilibre $\bar{k}$. Ainsi, on a montré que le bassin d'attraction de $\bar{k}$ est tout le quadrant positif.

Exercice 6.



Le mouvement d'un pendule simple avec amortissement est décrit par l'EDO du second ordre :

$$\theta''(t) + \frac{k}{m}\theta'(t) + \frac{g}{l}sin(\theta(t)) = 0, \quad t \geq 0, \tag{4.5.9}$$

où m la masse de la boule, l la longueur du fil, $k > 0$ le coefficient de frottement, g la gravité et $\theta(t)$ la position de la boule représente à l'instant t.

(1) Ecrire (4.5.9) sous forme d'un système d'EDO autonome d'ordre 1.

(2) Déterminer les points d'équilibres et étudier la stabilité de l'origine en utilisant le linéarisé associé à (4.5.9).

(3) On suppose que $k = 0$ et on prend $g = 1$. Dans ce cas, on dit que le mouvement du pendule est sans amortissement (ou pendule simple).

(3.1) Montrer que

$$E(\theta(t), \theta'(t)) = \frac{1}{2}ml^2(\theta'(t))^2 + ml(1 - cos(\theta(t))$$

est une intégrale première pour (4.5.9).

(3.2) Déterminer l'énergie potentiel et l'énergie cinétique, puis vérifier que l'énergie totale est préservée par l'évolution temporelle.

(4) Montrer que $\theta'(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{ml^2}E(0) + \frac{2}{l}(cos(\theta(t) - 1)}$ et déduire que $\theta(\cdot)$ est donnée explicitement par

$$H(\theta(t)) = H(\theta(t_0)) + t - t_0$$

SOLUTION

(1) On pose $\omega(t) = \theta'(t)$ alors on obtient le système différentiel

$$(\theta'(t), \omega'(t)) = (\omega(t), \theta''(t)),$$

c'est-àdire

$$(\theta'(t), \omega'(t)) = (\omega(t), -\frac{k}{m}\theta'(t) - \frac{g}{l}sin(\theta(t)) = (\omega(t), -\frac{k}{m}\omega(t) - \frac{g}{l}sin(\theta(t)).$$

Alors, si on pose $X(t) = (\theta(t), \omega(t))$ et $F(X(t)) = F(\theta(t), \omega(t)) = (\omega(t), -\frac{k}{m}\omega(t) - \frac{g}{l}sin(\theta(t))$, on obtient le système différentiel autonome d'ordre un

$$X'(t) = F(X(t)).$$

(2) Les points d'équilibres sont les solutions stationnaires , c'est-à-dire elle vérifient

$$F(X) = (0, 0).$$

D'où $(\omega, -\frac{k}{m}\omega - \frac{g}{l}sin(\theta) = (0, 0)$. Par suite

$$\omega = 0, \quad \theta = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Donc $(k\pi, 0)$ sont les points d'équilibres.
On veut étudier la stabilité de l'origine (on prend n=0). Comme F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, on peut écrire la formule de Taylor au voisinage de $(0, 0)$ à l'ordre un

$$F(\theta, \omega) = F(0, 0) + DF_{0,0)} \cdot (\theta, \omega) + G(\theta, \omega),$$

où $G(\theta, \omega) \longrightarrow (0, 0), \quad \|(\theta, \omega)\| \to 0$ et

$$DF_{(\theta,\omega)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(\theta) & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \Longrightarrow DF_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}.$$

De plus, le polynôme caractéristique vérifie

$$det(\lambda I_2 - DF_{(0,0)}) = \lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda + \frac{g}{l} = 0,$$

et le discriminant $\Delta = (\frac{k}{m})^2 - 4\frac{g}{l}$, d'où on obtient trois cas
— • si $\Delta > 0$, alors $\lambda_1 = \frac{-\frac{k}{m}+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{-\frac{k}{m}-\sqrt{\Delta}}{2}$. On voit que $\lambda_i < 0, i = 1, 2$.
— • si $\Delta = 0$, alors $\lambda = -\frac{k}{m}$ et on remarque que $\lambda < 0$.
— • si $\Delta < 0$, alors $\lambda_1 = \frac{-\frac{k}{m}+i\sqrt{-\Delta}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{-\frac{k}{m}-i\sqrt{-\Delta}}{2}$. Ici on remarque aussi que $Re(\lambda_i) < 0, i = 1, 2$.

Dans tout les cas on a $Re(\lambda_i) < 0$, ce qui implique que l'origine est asymptotiquement stable (que ce soit pour le système linéarisé ou le système de départ (4.5.9) (du pendule simple).

(3) On prend $k = 0$ et $g = 1$ et l'équation différentielle dans ce cas représente le mouvement du pendule simple sans amortissement, et dans ce cas $F(\theta(t), \theta'(t)) = (\theta'(t), -\frac{1}{l}sin(\theta(t))$.

(3.1) Soit $E(t) = E(\theta(t), \theta'(t)) = \frac{1}{2}ml^2(\theta'(t))^2 + ml(1 - cos(\theta(t))$ est de classe C^1 et que la dérivée totale de E le long du champs de vecteurs F égale à

$$\frac{d}{dt}E(t) = \nabla E \cdot F,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) =&(ml\sin(\theta(t)), ml^2\theta'(t)) \cdot (\theta'(t), -\frac{1}{l}sin(\theta(t))\\ =&ml\sin(\theta(t))\theta'(t) - ml^2\theta'(t)\frac{1}{l}sin(\theta(t))\\ =&0.\end{aligned}$$

Cela signifie que E est une intégrale première pour le système différentiel.

(3.2) Comme E définie une intégrale première pour (4.5.9), on déduit que l'énergie totale du pendule simple sans amortissement est conservée, c'est-à-dire

$$E(t) = E(t_0), \forall t,$$

où $E(t_0)$ est l'énergie initiale à l'instant t_0. De plus, par définition $E(t) = \frac{1}{2}ml^2(\theta'(t))^2 + ml(1 - cos(\theta(t))$, on déduit alors que l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}ml^2(\theta'(t))^2 = \frac{1}{2}ml^2(\text{vitesse angulaire})^2,$$

et l'énergie potentiel :

$$E_p = ml(1 - cos(\theta(t)) = mg(\text{hauteur}).$$

(3.3) Comme l'énergie est conservée au cours de l'évolution temporelle, c'est-à-dire $E(t) = E(t_0)$ où $E(t_0) = E(\theta_0, \theta_0') = E(\theta(t_0), \omega(t_0))$, où θ_0 représente l'angle initiale et ω_0 la vitesse angulaire initiale à l'instant t_0.
Si on prend $t_0 = 0$, alors $E(t) = E(0)$, d'où

$$\frac{1}{2}ml^2(\theta'(t))^2 + ml(1 - cos(\theta(t)) = E(0).$$

Par ailleurs

$$\frac{1}{2}ml^2(\theta'(t))^2 = E(0) - ml(1 - cos(\theta(t)),$$

ou bien

$$(\theta'(t))^2 = \frac{2}{ml^2}E(0) - \frac{2}{l}(1 - cos(\theta(t)),$$

c'est-à-dire

$$(\theta'(t))^2 = \frac{2}{ml^2}E(0) + \frac{2}{l}(cos(\theta(t) - 1).$$

d'où

$$\theta'(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{ml^2}E(0) + \frac{2}{l}(cos(\theta(t) - 1)}.$$

(4) D'après la question trois, on peut écrire

$$\theta'(t) = \frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{ml^2}E(0) + \frac{2}{l}(cos(\theta(t) - 1)}.$$

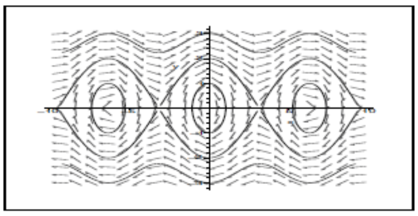
Donc, suivant $\theta'(t) > 0$ (c'est-à-dire le déplacement du pendule de la gauche vers la droite) ou $\theta'(t) < 0$ (c'est-à-dire le déplacement du pendule de la droite vers la gauche), on obtient

$$\pm\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}E(0) + \frac{2}{l}(cos(\theta(t) - 1)}} = dt.$$

Si on intègre les deux côtés et si on note par $H(\theta)$ la primitive de $\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}E(0)+\frac{2}{l}(cos(\theta(t)-1)}}$ (si elle existe), on arrive à

$$H(\theta(t)) - H(\theta_0) = t - t_0,$$

d'où
$$H(\theta(t)) = H(\theta_0) + t - t_0.$$
Cette expression représente une équation implicite de l'angle $\theta(t)$ du pendule, en fonction de l'angle initiale θ_0, de l'instant initiale t_0 et du temps t.



Exercice 7. Utiliser les coordonnées polaires pour étudier la stabilité du point d'équilibre l'origine $(0,0)$, du système d'EDO suivant

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) - y(t)(x^2(t) + y^2(t)) \\ y'(t) &= y(t) + x(t)(x^2(t) + y^2(t)) \end{cases} \tag{4.5.10}$$

Exercice 8. Soit le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t), \quad t \geq 0 \\ y'(t) = \big(x(t) - y^2(t)\big)y(t), \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{4.5.11}$$

(1) Déterminer une solution générale pour (4.5.11).
(**Indication** : Voir que $\frac{dy}{dx} = -y + \frac{y^3}{x}$ puis utiliser le changement $u = \frac{1}{y^2}$).

(2) Montrer, en utilisant la définition, que le point d'équilibre $(0,0)$ de (4.5.11) est asymptotiquement stable.

Exercice 9. Soit le système différentiel d'ordre deux

$$x''(t) + \gamma x'(t)\big(x^2(t) - 1\big) + x(t) = \alpha, \quad \gamma \geq 0, \alpha \geq 0. \tag{4.5.12}$$

(1) Ecrire (4.5.12) sous la forme d'un système différentiel du premier ordre, en posant

$$\big(x_1(t), x_2(t)\big) = \big(x(t), x'(t)\big)$$

(2) Soient $u(t) = (x_1(t), x_2(t))$ une solution de classe C^1 sur J à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ du système d'ordre un obtenu et

$$\psi(x_1, x_2) = \big(x_1, x_2 + \gamma(x_1 - \frac{x_1^3}{3})\big)$$

un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^2$.
Montrer que $\psi^{-1} \circ u$ est solution du système d'ordre un suivant

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) + \gamma\big(x_1(t) - \frac{x_1^3(t)}{3}\big) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + \alpha \end{cases} \tag{4.5.13}$$

(3) Montrer que les points d'équilibres de ces deux systèmes d'ordre un, sont en bijection et sont de même nature.

(4) Déterminer ces points d'équilibres et leur nature selon les valeurs de γ et α.

(5) Pour quelles valeurs de γ et α les systèmes précédants présentent une bifurcation de Hopf ?

SOLUTION

(1) Dans la plan de phase (O, x, x'), l'équation différentielle s'écrit comme suit

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = \gamma(1-x^2)v - x + \alpha \end{cases}$$

(2) La jacobienne de Ψ est triangulaire inférieur de coefficients diagonaux égaux à 1 , donc inversible en tout point . De plus , Ψ est bijective car $\Psi(x,y) = (\xi, v)$ équivaut à $x = \xi$ et $y = v - \gamma(\xi - \frac{\xi^3}{3})$.

(3) Si $u = (x, v)$ est solution de $P_{\gamma,\alpha}$ alors $\tilde{u} := (x, y := v - \gamma(x - \frac{x^3}{3}))estsolutionde$

$$(L_{\gamma,\alpha}) \begin{cases} x' = y + \gamma(x - \frac{x^3}{3}) \\ y' = -x + \alpha \end{cases}$$

(4) D'après la formule de dérivation des fonctions composées, si u est solution de $u' = f(u)$ et $u = \Psi \circ \tilde{u}$ alors $\tilde{u}$ est solution de

$$\tilde{u}' = g(\tilde{u}) := (d\Psi(\tilde{u}))^{-1} f(\Psi(\tilde{u}))$$

Ainsi Ψ est une bijection entre les points singuliers (c'est-à-dire les zéros) de f et de g. Quand à leur nature, elle est déterminée par les valeurs propres de la différentielle $Dd(u)$ et de la différentielle de $dg(\tilde{u})$, qui se réduit à

$$(d\Psi(\tilde{u}))^{-1} df(\Psi(\tilde{u})) d\Psi(\tilde{u}) \quad si \quad f(u) = 0.$$

c'est-à-dire que $df(u)$ et $dg(\tilde{u})$ sont conjuguées elles ont donc mêmes valeurs propres.

(5) Les changements de direction du champ de vecteur ont lieu sur l'axe Oy (au lieu de l'axe Ox dans la plan de phase), et surtout sur la courbe régulière d'équation $y = \gamma(\frac{x^3}{3} - x)$ (au lieu de celle d'équation $\gamma(1-x^2)v - x + \alpha$, qui a des asymptotes en $x = \pm 1$). Le seul point fixe est $A = (\alpha, \gamma(\frac{\alpha^3}{3} - \alpha))$, le système linéarisé en ce point est

$$x' = y + \gamma(1-\alpha^2)x, y' = -x.$$

- Si $\gamma^2(1-\alpha^2)^2 > 4$, le point A est un nœud (attractif si $\gamma(1-\alpha^2) < 0$ ou répulsif si $\gamma(1-\alpha^2) > 0$).
- Si $\gamma^2(1-\alpha^2)^2 < 4$ c'est un puit de plus $\gamma(1-\alpha^2) <, ouunesourcesi \gamma(1-\alpha^2) > 0$.

Exercice 10. Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t)(1+y(t)) \end{cases} \tag{4.5.14}$$

(1) Étudier les points d'équilibres et leurs natures, déterminer les isoclines I_0, I_∞, les solutions particulières ainsi que le sens du champ.

(2) On considère dans ce qui suit

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y < -1\}$$

et on considère une trajectoire issue de A.

(2.1) Montrer qu'elle est monotone et qu'elle est définie par une fonction $y = y(x)$

(2.2) Montrer que cette trajectoire n'admet pas d'asymptotes verticale et horizontale. En déduire que sur cette trajectoire $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$.

(2.3) On pose $u(x) = \frac{y(x)}{x}$. Montrer qu'on a : $u'(x) + \frac{1}{x}u(x) = -1 - \frac{1}{y}$, et déduire que $u(x) \to -\infty$ quand $x \to +\infty$.

(2.4) Tracer les trajectoires dans la région A.

Exercice 11. Considérons le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - x(t)y(t) - x^2(t), \quad t \geq 0 \\ y'(t) = -4y(t) + 2x(t)y(t), \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{4.5.15}$$

(Partie I.)

(1) Déterminer les points d'équilibres, les isoclines I_0, I_∞, le sens du champ et les solutions particulières de (4.5.15).

(2) Déterminer la nature des points d'équilibres, et donner l'allure des trajectoires du système linéarisé.

Partie II. On s'intéresse maintenant aux trajectoires de (4.5.15) dans le quart du plan $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$. On définit alors les trois zones :

$$\begin{aligned} I_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, \quad 1 - x - y \geq 0\}, \\ I_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 2, \qquad 1 - x - y \leq 0\} \\ I_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2\} \end{aligned}$$

(1) Soit $t \to (x(t), y(t))$ une solution de (4.5.15) de condition initiale $(x_0, y_0) \in I_1$:

(1.1) Montrer que $(x(t), y(t)) \in I_1$ pour tout les temps ultérieurs de leur ensemble de définition (c-à-d I_1 est une zone piège).

(1.2) Déduire que $(x(t)$ et $y(t))$ sont définies sur $[0, +\infty[$ et que $lim_{t\to+\infty}(x(t), y(t)) = (1, 0)$.

(1.3) montrer que la fonction $u(t) = \frac{y(t)}{x(t)-1}$ a une limite quand $t \to +\infty$, et que cette limite est nulle.

(2) Montrer que toute trajectoire dans I_3 est définie par une fonction décroissante sur $[2, +\infty[$, puis étudier la branche infinie de cette trajectoire.

(3) Que se passe-il pour une trajectoire de condition initiale dans I_2 ?

(4) Dessiner l'allure des trajectoires de (4.5.15) dans P.

5

INITIATIONS À LA THÉORIE DE LYAPUNOV

5.1 INTRODUCTION

Les solutions stationnaires constituent des états d'équilibres dont la stabilité (ou l'instabilité) est importante au point de vue d'applications. En réalité, un système physique est toujours soumis á des perturbations aussi infinies soient elles, et lorsqu'on cherche des simulations numériques on fait nécessairement des erreurs de mesure ou des erreurs d'arrondis. Dans ce chapitre, on s'intéresse á l'étude du comportement asymptotique des solutions stationnaires (c'est á dire les points d'équilibres) pour des données initiales proches d'une solution stationnaire, en faisant intervenir **la Théorie de Lyapunov** qui fait appel á des fonctions particulières au voisinage de l'équilibre permettant de contrôler le comportement asymptotique des solutions stationnaires.

5.2 EXEMPLE D'APPLICATION

On commence par l'exemple suivant qui illustre l'idée générale de la théorie de Lyapunov.

Exemple 1. "Champs de gradient" Soit le système différentiel

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{5.2.1}$$

oú f est un champs de vecteurs de gradient, c'est á dire

$$f(x) = -\nabla V(x),$$

oú $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 sur Ω (de façon que f soit de classe C^1 sur Ω).

Par définition, le gradient de V vérifie que

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|V(x+h) - V(x) - D_x V \cdot h|}{\|h\|} = 0.$$

D'oú

$$D_x V_l \cdot h = \langle D_x V, h\rangle = \langle \nabla V_x, h\rangle, \quad \forall l \in \mathbb{R}^n, V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Comme la dimension est finie (ici $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), alors on peut écrire

$$\nabla_x V(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Soit x_0 un point d'équilibre pour $x'(t) = f(x(t))$ c'est à dire $f(x_0) = 0$, donc $\nabla V(x_0) = 0$. Ce qui implique que

$$\forall j = \overline{1, n}, \frac{\partial V(x_0)}{\partial x_j} = 0.$$

C'est à dire x_0 est un point critique pour la fonction V.
Comme $x'(t) = f(x(t)) = -\nabla V(x(t))$, alors la dérivée totale de V par rapport au temps est

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(V(x(t))) &= \nabla V(x) \cdot x'(t) \\
&= \langle \nabla V(x(t)), x'(t) \rangle \qquad \textit{mais} \quad x'(t) = f(x(t)) \\
&= \langle \nabla V(x(t)), -\nabla V(x(t)) \rangle \\
&= -\langle \nabla V(x(t)), \nabla V(x(t)) \rangle \\
\frac{d}{dt}(V(x(t))) &= -\|\nabla V(x(t))\|^2 \leqslant 0, \quad \forall t \in J.
\end{aligned}$$

D'oú $V(x(t))$ soit constante, soit strictement décroissante. Par suite, on peut déduire que toute solution tend à sa rapprocher d'un minimum et donc on montre dans ce quit suit du chapitre que :

• Si x_0 est un point d'équilibre qui n'est pas un minimum locale, alors x_0 n'est pas stable .
• Si x_0 est un minimum locale strictement inférieur à zéro, alors x_0 est un point d'équilibre stable.

5.3 FONCTION DE LYAPUNOV

Considérons le système différentiel autonome

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{5.3.1}$$

oú $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un champ de vecteur de classe C^1. On définie la fonction de Lyapunov comme suit

Définition 5.3.1. *Soit $x_0 \in \Omega$ un point d'équilibre de* (6.5.1) *c'est à dire $f(x_0) = 0$. Soit $U \subset \Omega$ un voisinage de x_0 et $V : U \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*
On dit que V est une fonction de Lyapunov pour le système différentiel (6.5.1) *au point x_0 si l'on a*

(1) $V(x) > V(x_0); \forall x \in U, x \neq x_0$ *(c'est à dire x_0 est un minimum local strict de V sur le voisinage U.)*

(2) $\forall x \in U$, *la fonction* $t \longrightarrow V(\phi_t(x))$ *est décroissante, avec* $\phi_t(x)$ *est le flot associé au système* (6.5.1).

(3) *Si* $\forall x \in U$, *la fonction* $t \longrightarrow V(\phi_t(x))$ *est strictement décroissante, alors on dit que V est une fonction de Lyapunov stricte (c'est à dire* $\frac{dV(Q_t(x)}{dt} < 0; \forall t$*).*

Remarque 25. *Dans la définition précédente, si on remplace V est continue sur U par V est de classe C^1 sur U ; alors les conditions* (2) *et* (3) *seront remplacées par*

(4)

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leqslant 0; \forall x \in U \tag{5.3.2}$$

(5)

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0; \forall x \in U \tag{5.3.3}$$

Théorème 12. *Si le système différentiel* (6.5.1) *admet une fonction de Lyapunov au point d'équilibre x_0, alors x_0 est un équilibre stable. Si de plus la fonction de Lyapunov est stricte, alors x_0 est un équilibre asymptotiquement stable.*

5.3.1 *Bassin d'attraction*

Définition 5.3.2. ***Bassin d'attraction*** *Etant donnée un point d'équilibre de* (6.5.1) *asymptotiquement stable* $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
On appelle bassin d'attraction, l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ *tel que*

$$\phi_t(x) \to x_0$$
$$t \to +\infty$$

Remarque 26. *Par définition de stabilité asymptotique, le bassin d'attraction contient un voisinage de x_0. Une question importante en pratique est de déterminer la taille de ce bassin . Le domaine de définition U de la fonction de Lyapunov stricte V (si elle existe) donne des éléments de réponse de cette question. Cela se traduit dans le théorème suivant*

Théorème 13. *Supposons que le système différentiel* (6.5.1) *est définie sur $\mathbb{R}^n$ tout entier (c'est à dire :* $\Omega = \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$*). Supposons qu'il admet un point d'équilibre x_0 et une fonction de Lyapounov stricte* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$\|x\| \to +\infty \Rightarrow V(x) \to +\infty. \tag{5.3.4}$$

Alors le bassin d'attraction de x_0 est $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, on dit que x_0 est globalement asymptotiquement stable.

Remarque 27. *Le théorème précédent peut être adaptée au cas oú Ω est un domaine ouvert bornée non vide de de $\mathbb{R}^n$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) et* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Dans ce cas la condition donnée dans le théorème précedant : $\|x\| \to +\infty \Rightarrow V(x) \to +\infty$ *sur la fonction de Lyaounov stricte* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est illustré comme suit :*

$$x \to \partial\Omega \Rightarrow V(x) \to +\infty, \tag{5.3.5}$$

où $\partial\Omega$ est la frontière de Ω.

Plus généralement, si $V : U \subset \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov stricte en $x_0 \in \Omega$ et $P \subset U$ un sous ensemble compact de Ω positivement invariant par le flot (c'est à dire $\phi_t(P) \subset P$),

$$(\forall x \in P, \Phi_t(x) \in P, \forall t \geqslant 0.)$$

Alors le sous ensemble P est inclus dans le bassin d'attraction de x_0.

5.3.2 *Exemples d'application*

Exemple 2.

- Si une fonction de Lyapunov V vérifie que $\frac{d}{dt}V(x(t)) = 0$, alors V est une intégrale première pour (6.5.1). Dans ce cas l'énergie est conservée.
- Si $\frac{d}{dt}V(x(t)) < 0$, alors l'énergie est décroissante (elle se dissipe).

Exemple 3. Considérons le système différentiel

$$x'(t) = f(x(t)),$$

oú f est un champ de gradient et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'équilibre , c'est à dire

$$f(x_0) = -\nabla V(x),$$

oú V admet x_0 comme un minimum local strict, c'est à dire il existe un voisinage U de x_0 telle que pour tout x dans U on a

$$V(x) > V(x_0)$$

Or que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(x(t)) &= \nabla V(x) \cdot x'(t) \\
&= \nabla V(x) \cdot f(x) \\
&= \nabla V(x) \cdot (-\nabla V(x)) \\
&= -\|\nabla V(x)\|^2 < 0; \forall x \in U
\end{aligned}$$

(car x_0 est minimum local strict). Donc V est une fonction de Lyapunov stricte au voisinage de x_0. D'où x_0 est asymptotiquement stable.
Exemple 4.
Soit un objet de masse m soumis à une force dérivant d'un potentiel $V(x)$. L'évolution de l'état $x \in \mathbb{R}^n$ de l'objet au cours du temps est régit par le principe fondamentale de la dynamique (loi de Newton) :

$$mx''(t) = f(x(t)),$$

oú $f(x) = -\nabla V(x)$ avec $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et f s'annule en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, c'est à dire $f(x_0) = 0$.
On réecrit l'équation différentielle d'ordre deux en utilisant le changement

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t) \\ x_2(t) = x'(t) \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} x_1'(t) & = x'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) & = x''(t) = \frac{1}{m} f(x(t)) \\ & = -\frac{1}{m} \nabla V(x(t)) \\ & = -\frac{1}{m} \nabla V(x_1(t)) \end{cases}$$

Alors on obtient le système différentiel d'ordre un

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -\frac{1}{m} \nabla V(x_1(t)) \end{pmatrix} = F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2). \end{pmatrix}$$

Un point d'équilibre pour ce système vérifie

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -\frac{1}{m} \nabla V(x_1(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $x_2 = 0$ et $\nabla V(x_1) = 0$. On sait que $f(x_0) = 0$, ce qui implique que $\nabla V(x_0) = 0$.

Pour étudier la stabilité du point d'équilibre, on cherche une fonction de Lyapunov. Pour cela on cherche une fonction

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \to H(x_1, x_2). \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} mx''(t) & = f(x(t)) \\ & = -\nabla V(x(t)). \end{aligned}$$

D'oú

$$mx''(t) + \nabla V(x(t)) = 0$$

Faisons un produit scalaire par $x'(t)$, c'est-à-dire on aboutit que

$$mx'(t) \cdot x''(t) + \nabla V(x(t)) \cdot x'(t) = 0$$

En utilisant le changement $(x_1(t), x_2(t))$, on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1''(t) \\ x_2''(t) \end{pmatrix} & = x_1'(t) \cdot x_1''(t) + x_2'(t) \cdot x_2''(t) \\ & = \frac{1}{2}[(x_1'(t))^2) + (x_2'(t))^2] \\ & = -\frac{1}{2}\|X\|^2, \end{aligned}$$

où $X = (x_1, x_2)$ ou bien

$$\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}mx'(t)\cdot x'(t)+V(x(t))]=0$$

c'est à dire

$$\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}m\|x'(t)\|^2+V(x(t))]=0$$

c'est à dire

$$\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}m\|x_2(t)\|^2+V(x_1(t))]=0$$

on pose

$$H(x_1,x_2)=\frac{1}{2}m\|x_2\|^2+V(x_1)]=0.$$

Il est claire que H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{2n}$ et

$$H(x_0,0)=\frac{1}{2}m\|0\|^2+V(x_0)=0,$$

et

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(x_1(t),x_2(t)) &= \nabla H(x_1,x_2)\cdot\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t)\end{pmatrix}\\ &= \left\langle \begin{matrix} \nabla V(x_1) \\ \frac{1}{2}m\cdot 2x_2(t)\end{matrix} \right\rangle\left\langle \begin{matrix} x_2 \\ -\frac{1}{m}\nabla V(x_1)\end{matrix}\right\rangle\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc H est une fonction de Lyapunov ,d'oú $(x_0,0)$ est stable

Exemple 4.

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t)-2y^2(t)\\ y'(t) &= x(t)y(t)-y^3(t)\end{aligned}$$

on pose

$$f(x,y)=(-x-2y^2,xy-y^3)=(0,0)$$

$$\begin{cases} -x-2y^2 &= 0 \\ xy-y^3 &= 0 \Longrightarrow y(x-y^2)=0 \Longrightarrow y=0 \ \ et \ \ x=y^2\end{cases}$$

Si

$$y=0\Longrightarrow x=0$$

Si

$$y^2 = x \Longrightarrow -x - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow -x - 2x = 0 \Longrightarrow -3x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Alors l'origine $(0,0)$ est un point d'équilibre , on cherche une fonction de Lyapunov sous forme

$$V(x,y) = x^2 + \alpha y^2$$

(dans le but que $v(0,0) = 0$ et vient que $\frac{dV(x(t))}{dt} = y(t)$)
on a V de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt}(x(t),y(t)) &= \nabla V \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2x \\ 2\alpha y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x - 2y^2 \\ xy - y^3 \end{pmatrix} \\
&= -2x^2 - 4xy^2 + 2\alpha xy^2 - 2\alpha y^4 \\
&= -2(x^2 + \alpha y^4) + xy^2(2\alpha - 4)
\end{aligned}$$

pour

$$2\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha = 2$$

on voit que

$$\frac{dv(x(t),y(t))}{dt} = -2(x^2 + 2y^2) < 0$$

pour $(x,y) \neq (0,0)$
Donc

$$V(x,y) = x^2 + 2y^2$$

est une fonction de Lyapunov stricte, ce qui implique que $(0,0)$ est asymptotiquement stable.

5.4 ENSEMBLES $w-$LIMITES

Dans l'étude des systèmes dynamiques , uu ensemble $w-$limite (ou aussi un attracteur) est un ensemble vers lequel un système évolue de façon irréversible en l'absence des perturbations .

Définition 5.4.1. ***Ensemble w-limites***
Soit le système différentielle autonome :

$$x'(t) = f(x(t))$$

oú $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur Ω et soit $a \in \Omega$.
On appelle un ensemble w-limite d'un point $a \in \Omega$; on le note par $L_w(a)$; l'ensemble d'adhérence

de l'ensemble $\{\phi_t(a)\}$ quand $t \to +\infty$ oú ϕ est le flot associer au système différentielle $x'(t) = f(x(t))$ au point a c'est à dire

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi(t,x) = f(\phi(t,x)) \\ \phi(0,a) = a \end{cases}$$

Rappel : Soit E un espace topologique $X \subset E$. L'adhérence de X est le plus petit fermé qui contient X.

Remarque 28. *on a l'inclusion suivante*

$$\Phi(t,a) \subset L_w(a).$$

Remarque 29. *1) L'ensemble $w-$limites $L_w(a)$ est invariant par le flot Φ.*

2) Comme $L_w(a)$ est l'ensemble d'adhérence de $\{\Phi_t(a)\}$ quand $t \to +\infty$ alors, on peut donner une définition équivalente $y \in L_w(a)$ si seulement si $\exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que : $t_n \to +\infty$ et $\phi_{t_n} \to y$.

Rappel :
$L_w(a)$ un ensemble $w-$limite

$$\begin{aligned} L_w(a) &= \{l'ensemble\ \ d'adhrence\ \ de\ \ \phi_t(a)\} \\ &= le\ \ plus\ \ petit\ \ ferm\ \ qui\ \ contenant\ \ \{\Phi_t(a); t \geqslant 0\} \end{aligned}$$

oú $\Phi_t(a)$ le flot associé à l'EDO au point a

$$\Leftrightarrow y \in L_w(a); \exists (t_n) : \Phi_{t_n} \to y, t_n \to +\infty$$

Proposition 5.4.2. *L'ensemble $L_w(a)$ des points limites de $\Phi_t(a); t \geqslant 0$ est un fermé et invariant par le flot ($\phi_t(L_w(a)) \subset L_w(a)$), c'est à dire*

$$\forall y \in L_w(a) \Longrightarrow \Phi(t,y) \in L_w(a).$$

Un point limite implique que $\Phi(t,y)$ est aussi un point limite. De plu , si E est une intégrale première de l'EDO $x'(t) = f(x(t))$ alors $L_w(a)$ est inclus dans les courbes à niveau de

$$E : \{\alpha \in \mathbb{R}; E(t) = \alpha\}$$

Exemple6.

$$\begin{aligned} x''(t) + k\sin x(t) &= 0 \\ E(t) &= \frac{1}{2}x_2^2 + k(1-\cos x_1) \\ E(t) &= \frac{1}{2}x_{2,0}^2 + k(1-\cos x_{1,0}) = \alpha \end{aligned}$$

5.4.1 *Cas de la dimension $= 2$*

Avant de traiter le cas particulier de la dimension $d = 2$ (c'est à dire $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $x'(t) = f(x(t))$), on rappel le résultat suivant connue sous le nom "Théorème de Jordan" :

Théorème 14. Théorème de Jordan *Soit*

$$\gamma, \tau \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$t \to \gamma(t)$$

une courbe fermée simple et continue . Alors cette courbe divise le plan $\mathbb{R}^2$ *en deux parties connexes, l'une est bornée et l'autre est non bornée.*

Théorème 15. ***Théorème de Poincaré-Bendixon***
Soit f un champ de vecteur dans $\mathbb{R}^2$ et $a \in \mathbb{R}^2$. Si l'ensemble$w-$limite $L_w(a)$ est compacte, non vide et sans points d'équilibre, alors c'est un cycle et périodique.

5.5 PRINCIPE D'INVARIANCE DE LA SALLE

Il arrive qu'on trouve souvent des fonctions de Lyaounov V telle que $\frac{dV(x(t))}{dt} \leqslant 0$ ce qui ne permet pas de conclure la stabilité asymptotique du point d'équilibre. Le théorème suivant dû à J. P La s Salle formule un résultat détaillé concernant ce problème.

Théorème 5.5.1. ***Principe d'invariance de La Salle*** *Soit D un compact invariant de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $V : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur Ω tel que*

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \leqslant 0, \forall t.$$

On note

$$E = \{x \in D; \frac{dV(x(t))}{dt} = 0\}$$

et on note M le plus grand sous-ensemble invariant de E. Alors

$$\lim_{t \to +\infty} d(M, \Phi_t(x_0)) = 0,$$

c'est à dire toute solution d'orbite $\Phi_t(x_0)$ qui commence de D (c'est à dire $x_0 \in D$), converge vers un élément de l'ensemble M quand $t \to +\infty$, avec

$$d(M, \Phi_t(x_0) = \inf_{y \in M} \|y - \Phi_t(x_0)\|$$

Remarque 30. ***Application :*** *Soit V une fonction de Lyapunov où $\frac{dV}{dt} \leqslant 0$. On pose*

$$E = \{x \in D : \frac{dV(x(t))}{dt} = 0\}.$$

Soit $D \subset \Omega$ et , $M \subset E$ le plus grand ensemble invariant de E . Cela implique que

$$\lim d(M, \Phi_t(x_0)) = 0.$$

Corollaire 5.5.2. *Soit x_0 un point d'équilibre de $X'(t) = f(x(t))$ alors x_0 est asymptotiquement stable s'il existe une fonction $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur Ω telle que*

1) $V(x_0) = 0; V(x) > V(x_0); \forall x \in \Omega$

2) $\frac{d}{dt}V(x(t)) \leqslant; \forall x \in \Omega$

3) L'ensemble $E = \{x \in \Omega : \frac{d}{dt}V(x(t)) = 0\} = \{x_0\}$

c'est à dire E ne contient que le point d'équilibre x_0.

Exemple : Considérons l'équation différentielle qui décrit le mouvement d'un pendule simple avec frotement

$$x''(t) + \frac{g}{\varphi}\sin(x(t)) + \frac{K}{m}x'(t) = 0$$

$$\begin{array}{l} x(t) = x_1(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) \end{array} \quad \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = x_1'(t) = x_2 \\ x_2'' = x_2' = -\frac{g}{\varphi}\sin(x_1) - \frac{K}{m}x_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -\frac{g}{\varphi}\sin(x_1) - \frac{K}{m}x_2. \end{aligned}$$

Le point $(\pi k, 0)$, $(0, 0)$ est un point d'équilibre. On a

$$x''(t)\cdot x'(t) + \frac{g}{\varphi}\sin(x(t)\cdot x'(t)) + \underbrace{\frac{K}{m}x'(t)\cdot x'(t)}_{0} = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}[(x'(t))^2]' + \frac{g}{\varphi}[-\cos(x(t))]'}_{A} + \underbrace{\frac{K}{m}x'\cdot x'}_{B} = 0$$

$A \leqslant A + B = 0$

$$\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}(x')^2 - \frac{g}{\varphi}\cos x(t)] \leqslant 0$$

Si on choisit

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_2)^2 + \frac{g}{\varphi}(1 - \cos x_1)$$

Alors

$$E = \{x \in D : \frac{dV}{dt} = 0\} = \{x_0\}$$

$$\begin{gathered} D = \{(x_1, x_2); -\pi + a < x_1 < \pi - a\} \\ -1 < x_2 < 1, \end{gathered}$$

ce qui implique que $(0, 0)$ asymptotiquement stable.

Exercice 1. On considère le modèle prédateurs-proies dans lequel les prédateurs s'entre-tuent comme les proies :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - x(t)y(t) - 2x^2(t), \\ y'(t) = -2y(t) + x(t)y(t) - y^2(t). \end{cases} \tag{5.6.1}$$

(1) Expliquer pourquoi le modèle suivant

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = -2y(t), \end{cases}$$

n'est pas convenable pour modéliser le phénomène d'interaction entre les deux populations prédateurs-proies.

(2) Montrer que les ensembles $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = 0\}$ et $\{x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y > 0\}$ correspendent à des trajectoires pour (5.6.1). Déduire que toute solution $(x(\cdot), y(\cdot)) \in \mathcal{C}^1(J; \mathbb{R}^2)$ de (5.6.1) telle que si $x(0) > 0$ et $y(0) > 0$, alors

$$x(t) > 0 \quad \text{et} \quad y(t) > 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in J.$$

(3) Déterminer les points d'équilibres pour (5.6.1) dans la région $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ et préciser leur nature.

(4) Considérons l'ensemble

$$D_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - 2\varepsilon, \quad \varepsilon \leq x \leq y + 2\},$$

où $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

(4.1) Montrer que l'ensemble $w-$limite de tout point $(x_0, y_0) \in D_\varepsilon$ se réduit à $\{(\frac{1}{2}, 0)\}$.

(4.2) Que peut-on déduire ?

SOLUTION

(1) Si on cherche une solution pour le modèle

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = -2y(t), \end{cases}$$

tout d'abord on suppose que $(x(t), y(t)$ est une solution non nulle pour tout $t \geq 0$. Alors $\frac{x'(t)}{x(t)} = 1$ et$\frac{y'(t)}{y(t)} = -2$. Par intégration sur $[0, t]$, on trouve

$$x(t) = x(0)e^t, \quad y(t) = y(0)e{-}2t, \forall t \geq 0.$$

Il est clair que $x(t) \longrightarrow +\infty$ et $y(t) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$. Ce qui signifie que la population des prédateurs se croit au cous du temps, tandis que la population des proies s'éteindre (elle tend vers zéro). Par suite ce modèle de système différentiel n'est pas convenable pour décrire l'interaction entre ces deux populations par l'évolution au cours du temps.

(2) On pose $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = (x - xy - 2x^2, -2y + xy - y^2)$.
On remarque que sur les deux ensembles $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y > 0\}$ et $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = 0\}$, on a $f_1(0,y) = 0$ et $f_2(x,0) = 0$ quelques soient x et y. Par suite le champ de vecteurs $f = (f_1, f_2)$ est colinéaire aux deux axes $x = 0$ et $y = 0$, qui sont par conséquent des droites invariantes par le flot associé au système (5.6.1). Par suite, les ensembles $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y > 0\}$ et $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = 0\}$ sont des trajectoires pour (5.6.1).
Maintenant, si on considère $y_0 > 0$, alors l'orbite de y_0 pour l'équation scalaire $y'(t) = -2y(t) - y^2(t)$ est égale à $\mathbb{R}_+^*$, qui s'identifie à l'orbite $(0, y_0)$ pour le système (5.6.1). De meme pour $x_0 > 0$, l'orbite pour l'équation $x'(t) = x(t) - 2x^2(t)$ est égale à $]0, \frac{1}{2}[$ si $x_0 \in]0, \frac{1}{2}[$, égale à $\{\frac{1}{2}\}$ si $x_0 = \frac{1}{2}$ et égale à $]\frac{1}{2}, +\infty[$ si $x_0 > \frac{1}{2}$ Donc, dans tout les cas c'est l'orbite de $(x_0, 0)$ de (5.6.1) .
Par suite, comme les orbites sont disjointes, l'orbite d'un point (x_0, y_0) avec $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ est incluse dans l'ensemble

$$\{(x,y) \in RR^2, x > 0, > 0\}.$$

Cela implique que toute solution $(x(t), y(t))$ de (5.6.1) de donnée initiale (x_0, y_0) avec $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ vérifie aussi

$$x(t) > 0, \quad y(t) > 0, \quad \forall t \geq 0.$$

(3) On determine les points d'équilires dans la région $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$.
On a $f_1(x,y) = 0$ et $f_2(x,y) = 0$ impliquent que $x(1 - y - 2x) = 0$ et $y(-2 + x - y) = 0$.
Par suite ($x = 0$ ou $1 - y - 2x = 0$) et ($y = 0$ ou -2+x-y=0)$.D'o$

- si $x = 0$ et $y = 0$ alors le point $(0,0)$ est accépté dans Ω.
- si $x = 0$ alors y=-2, mais $(0, -2)$ est rejeté car il n'appartient pas à Ω.
- si $y = 0$ alors $x = \frac{1}{2}$. Donc $(\frac{1}{2}, 0)$ est accépté dans Ω.
- si $1 - y - 2x = 0$ et $-2 + x - y = 0$ alors $x = 1$ et $y = -1$, d'où le point $(1, -1)$ est rejeté dans Ω.

Alors, on a deux points d'équilibres $(0,0)$ et $(\frac{1}{2}, 0)$ appartiennent à Ω.
Pour étudier leur nature, on utilise le linéarisé. En effet la différentielle de f en un point (x,y) est égale à

$$Df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 - y - 2x & -x \\ y & -2 + x - 2y \end{pmatrix}$$

Alors, pour $(0,0)$ on a

$$Df_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas les valeurs propres sont 1 et -2. Par suite l'origine est un point sel.
Pour le second point d'équilibre $(\frac{1}{2}, 0)$ on a

$$Df_{(\frac{1}{2},0)} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres dans ce cas sont -2 et $-\frac{1}{2}$. D'où le point $(\frac{1}{2}, 0)$ est un noeud stable.

(4)

Exercice 2. Considérons le système de Van Der Pol qui modélise le mouvement d'un circuit électrique

$$\begin{cases} x'(t) = x^3(t) - x(t) + y(t), & t \geq 0 \\ y'(t) = -x(t), & t \geq 0 \end{cases} \tag{5.6.2}$$

(1) Déterminer les points d'équilibres de (5.6.2) et leur nature.

(2) Montrer que $V(x,y) = x^2 + y^2$ est une fonction de Lyapunov en $(0,0)$ pour le système (5.6.2) et que le disque ouvert $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ est invariant par le flot de ce système.

(3) Montrer que pour tout point $(x_0, y_0) \in D$ telle que $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, la solution $(x(t), y(t))$ de (5.6.2) tend vers $(0,0)$ quand $t \to +\infty$.

SOLUTION

(1) Les points d'équilibres du système (5.6.2) vérifient $f(x,y)) = (x^3 - x + y, -x) = (0,0)$, d'où $x = 0, y = x - x^3$. On voit qu'on a un seul point $(0,0)$. De plus, la différentielle au point d'équilibre associée au système linéarisé est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'orientation du champ de vecteurs $(x,y) \longmapsto (y - x + x^3, -x)$ dépend de la position de (x,y) par rapport à l'axe de y (lieu des points où le champ est horizontal) et par rapport à la courbe C d'équation $y = x - x^3$ (lieu des points où les champ est vertical).

(2) La fonction$V$ donnée par $V(x,y) = x^2 + y^2$ a un minimum global strict en $(0,0)$. De plus si $t \longmapsto (x(t), y(t))$ est solution du système , alors la dérivée totale de V le long des champs solution égale à

$$\frac{d}{dt}V(t) = \nabla V \cdot f(t) = -2x^2(1 - x^2).$$

On voit que $\frac{d}{dt}V(t) \leqslant 0$ dans la région $B = \{(x,y), |x| \leqslant 1\}$, qui contient le disque

$$D = \{(x,y); x^2 + y^2 < 1\}.$$

Cela montre à la fois que V est une fonction de Lyapunov en $(0,0)$ pour le système, et que le disque D est positivement invariant par le flot (puisque V décroit le long des orbites des points de D).

(3) Il suffit de montrer que pour Pour $(x_0, y_0) \in D$, l'ensemble ω-limite $L_\omega(x_0, y_0)$ se réduit à $\{(0,0)\}$.

Exercice 3. Soit le système différentiel d'ordre deux

$$x''(t) + \gamma\big(x^2(t) - 1\big)x'(t) + x(t) = \alpha, \tag{5.6.3}$$

où γ et α sont des constantes réelles.

(1) Ecrire (5.6.3) sous la forme d'un système différentiel du premier ordre que l'on note $(I.3)$.

(2) Considérons le difféomorphisme ψ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\psi(x,y) = \big(x, y + \gamma(x - \frac{x^3}{3})\big)$$

et soit $u \in \mathcal{C}^1(J;\mathbb{R}^2)$ une solution du système différentiel d'ordre 1 obtenu $(I.3)$.

(2.1) Montrer que $\psi^{-1} \circ u$ est une solution du système d'ordre 1 suivant

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + \gamma\big(x(t) - \frac{x^3(t)}{3}\big) \\ y'(t) = -x(t) + \alpha. \end{cases} \tag{5.6.4}$$

(2.2) Montrer que les points d'équilibres de $(I.3)$ et (5.6.4) sont en bijection et sont de même nature.

(2.3) Déterminer les points d'équilibres de (5.6.4) et leur nature selon les valeurs de γ et α.

(2.4) Pour quelles conditions, la fonction $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ définie une fonction de Lyapunov pour (5.6.4) ?

Exercice 4. Considérons l'équations différentielles du second ordre

$$x''(t) - \alpha x'(t)\Big(x^2(t) - 1\Big) + x(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad \alpha \in [0,1[. \tag{5.6.5}$$

(1) Ecrire (5.6.5) sous forme d'un système différentiel d'ordre 1 en posant

$$(x_1(t), x_2(t)) = (x(t), x'(t))$$

puis étudier la stabilité de l'équilibre $(0,0)$ par linéarisation.

(2) Montrer que $(x_1(t), x_2(t))$ est une solution définie sur un intervalle J à valeurs dans $\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$ du système obrtenu si

$$(x_1(t), x_2(t)) = (r(t)\cos(\theta(t)), r(t)\sin(\theta(t))$$

est solution du système suivant

$$\begin{cases} r'(t) = \alpha\Big(r^2(t)\cos^2\theta(t) - 1\Big)r(t)\sin^2(\theta(t)) \\ \theta'(t) = -1 + \alpha\Big(r^2(t)\cos^2(\theta(t)) - 1\Big)\sin(\theta(t))\cos(\theta(t)) \end{cases} \tag{5.6.6}$$

(3) Soit $(r(t), \theta(t))$ la solution maximale de (5.6.6) de donnée initiale $r(0) = r_0 > 1, \quad \theta(0) = 0$ dans l'intervalle $J =]T_*, T^*[$.
Montrer qu'il existe $\alpha_0 > 0$, $k > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $\alpha \in [0, \alpha_0]$ on a

$$|r(t) - r_0| \leq k, \quad |\theta(t) + t| \leq C\alpha, \quad \forall t \in I \subset J.$$

Exercice 5. Considérons le système de Van Der Pol qui modélise le mouvement d'un circuit electrique :

$$\begin{cases} x'(t) = x^3(t) - x(t) + y(t), & t \geq 0 \\ y'(t) = -x(t), & t \geq 0 \end{cases} \tag{5.6.7}$$

(1) Déterminer les points d'équilibres de (5.6.7) et leur nature.

(2) Montrer que $V(x,y) = x^2 + y^2$ est une fonction de Lyapunov en $(0,0)$ pour le système (**??**) et que le disque ouvert

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

est invariant par le flot associé à (5.6.7).

(3) Montrer que pour tout point $(x_0, y_0) \in D$ telle que $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, la solution $(x(t), y(t))$ de (5.6.7) tend vers $(0,0)$ quand $t \to +\infty$.

Exercice 6. Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = -x(t) + (x^2(t) - 1)y(t), & t \geq 0 \end{cases} \tag{5.6.8}$$

(1) Montrer que l'origine est un point d'équilibre hyperbolique asymptotiquement stable pour (5.6.8).

(2) Montrer que la fonction

$$V(x,y) = x^2 + y^2$$

définie sur $\mathbb{R}^2$ est une fonction de Lyapunov à l'origine pour (5.6.8).

(3) Soit (x_0, y_0) un point tel que $V(x_0, y_0) < 1$ et soit $L_w(x_0, y_0)$ l'ensemble $w-$ limite de (x_0, y_0) relativement à (5.6.8).

(3.1) Montrer que $L_w(x_0, y_0)$ est un compact et non vide.

(3.2) Le système (**??**) admet-il des cycles dans

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}?$$

(3.3) Déduire que $L_w(x_0, y_0)$ se réduit à l'origine $(0,0)$. Dire pourquoi ce résultat est plus fort que la stabilité asymptotique de l'origine.

Exercice 7. Le mouvement d'un pendule simple avec amortissement est donné par le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) = v(t), & t \in \mathbb{R}^+ \\ v'(t) = -kv(t) - \sin x(t), & k > 0 \end{cases} \tag{5.6.9}$$

(1) Montrer que la fonction $V(x,v) = \frac{1}{2}v^2 - \cos x$ définie sur l'ouvert

$$\Omega = \{(x,v) \in \mathbb{R}^2 : x \in]-\pi, \pi[, v \in]-2, 2[\}$$

est une fonction de Lyapunov à l'origine (0,0) pour le système (5.6.9). Que peut-on déduire pour l'origine ?

(2) Soit ϕ le flot associé au système (5.6.9) pour donnée initiale $(x(0), v(0)) = (x_0, v_0)$ où (x_0, v_0) est un point du l'ouvert

$$U = \{(x, v) \in \mathbb{R}^2 : V(x, v) < 1\}$$

(Voir que U est inclus dans Ω).
Montrer que l'ensemble w_θ des points limites est invariant par le flot, puis déduire que l'origine est asymptotiquement stable.

Exercice 8. Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) - 2x(t) - y(t) + 1, \\ y'(t) = x(t)y(t), \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{5.6.10}$$

(1) Déterminer la nature du point d'équilibre $(0, 1)$ par linéarisation du système (5.6.10) au voisinage de $(0, 1)$.

(2) Montrer que la fonction

$$V(x, y) = \frac{x^2 + (y-1)^2}{y^2}$$

définie sur le domaine

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y > 0\}$$

est une fonction de Lyapunov au voisinage de $(0, 1)$ puis déduire la stabilité de l'équilibre $(0, 1)$.

(3) Soit $(x_0, y_0) \in \Omega$ telle que $V(x_0, y_0) < 1$ et soit $(x(t), y(t))$, la solution maximale de (5.6.10) définie sur un intervalle I pour la donnée initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$.

(3.1) Montrer que $\sup I = +\infty$.

(3.2) Montrer que $(x(t), y(t)) \to (0, 1)$ quand $t \to +\infty$.

6

ETUDE QUALITATIVE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE STURM-LIOUVILLE

6.1 INTRODUCTION

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, et soient p, q et r des fonctions réelles et continues définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On va s'intéresser aux solutions réelles (ou complexes) des deux équations différentielles linéaires et affine

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \tag{6.1.1}$$

et

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x). \tag{6.1.2}$$

On désigne par V (respectivement par W) l'espace vectoriel des solutions réelles (respectivement complexes) de (6.1.1) (et donc on note le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Si on ne précise pas le corps de base, on note X l'ensemble des solutions de (6.1.1), ainsi $X = V$ si $K = \mathbb{R}$ et $X = W$ si $K = \mathbb{C}$. On mentionne que les deux équations différentielles (6.1.1) et (6.1.2) sont souvent nommés : "les équations de Sturm-Liouville."

6.2 THÉORÈME PRINCIPAL

Théorème 16. *On a les assertions suivantes*

(1) $\forall x_0 \in I, \forall (a_0, a_1) \in K^2$, (6.1.1) *ou* (6.1.2) *admet une solution unique maximale définie sur I tout entier, à valeurs dans K, tels que :*

$$y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1 \tag{6.2.1}$$

(2) *Les solutions de* (6.1.1) *forment un espace vectoriel X de dimension deux sur K, dont une base (canonique à x_0 fixé) est*

$$(y_1(\cdot), y_2(\cdot)),$$

avec

$$\begin{cases} y_1(x_0) = 1 \\ y_1'(x_0) = 0 \end{cases} \tag{6.2.2}$$

et

$$\begin{cases} y_2(x_0) = 0 \\ y_2'(x_0) = 1 \end{cases} \tag{6.2.3}$$

avec $y_1(\cdot), y_2(\cdot)$ sont à valeurs réelles. D'où toute autre solution de (6.1.1) est une combinaison linéaire de $(y_1(\cdot), y_2(\cdot))$.

(3) *Si $(u(\cdot), v(\cdot)) \in X$, leur Wronksien*

$$w(x) = u(x)v'(x) - v(x)u'(x) \tag{6.2.4}$$

ne s'annule jamais ou s'annule toujours, $w(x) \neq 0 \Leftrightarrow (u(\cdot), v(\cdot))$ est une base de X.

(4) *Si $y(\cdot) \in X$ et $y(\cdot)$ n'est pas identiquement nulle, alors les zéros éventuels de $y(\cdot)$ sont simples et isolés dans I.*

(5) *(Lemme des pentes) Si $x_0 < x_1$ deux zéro successives de $y(\cdot) \in V$ et si $y(x) > 0, \forall x \in]x_0, x_1[$ alors on a :*

$$y'(x_0) > 0, \quad y'(x_1) < 0 \tag{6.2.5}$$

(6) *La solution générale de (6.1.2) est la solution générale de (6.1.1) augmentée d'une solution particulière de (6.1.2). Précisément par la formule de variation de la constante de Lagrange, où $y(\cdot)$ désigne une solution de(6.1.2), $y_1(\cdot)$ et $y_2(\cdot)$ sont comme dans la deuxième assertion et*

$$w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x), \tag{6.2.6}$$

et

$$y(x) = y(x_0)y_1(x_0) + y'(x_0)y_2(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{r(s)[y_1(s)y_2(x) - y_1(x)y_2(s)]}{w(s)} ds. \tag{6.2.7}$$

(7) *Si $p(\cdot)$ et $q(\cdot)$ sont des fonctions constantes et si λ_1, λ_2 les racines de l'équation caractéristique $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, alors*

(7.1) *Si λ_1, λ_2 sont réelles distinctes, alors $(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x})$ est une base de X.*

(7.) *Si $\lambda_1 = \lambda_2$, alors $(e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x})$ est une base de X.*

(7.3) *Si $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib, b \neq 0$, alors $(e^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx)$ est une base de V.*

Remarque 31. *Dans ce théorème, on voit qu'on ne dispose pas en générale d'aucune formule explicite pour résoudre (6.1.1) ou (6.1.2), à l'exception du point 7) pour lequel $p(\cdot)$ et $q(\cdot)$ sont des constantes.*
L'objectif de ce chapitre est de faire une étude qualitative sur les trois points suivants dans l'étude de (6.1.1) ou (6.1.2) :

(1) Zéros des solutions,

(2) Développement en série entière des solutions,

(3) Stabilité des solutions.

6.3 ZÉROS DES SOLUTIONS DE (6.1.1)

6.3.1 *Passage en coordonnées polaires*

Les deux outils principales seront le passage en coordonnées polaires et le principe de Sturm. Il nous faut d'abord le lemme suivant :

Lemme 6.3.1. *Soient $y_1(\cdot), y_2(\cdot)$ de classe C^1 sur $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ deux solutions de (6.1.1), sans zéro commun et soit $w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$ leur Wronksien. Si*

$$y_1(a) + iy_2(a) = r_0 e^{i\theta_0} \tag{6.3.1}$$

Alors, on peut écrire

$$y_1(x) = r(x)\cos\theta(x), y_2(x) = r(x)\sin\theta(x), \tag{6.3.2}$$

où $r(\cdot)$ et $\theta\cdot)$ sont de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et sont données par les formules :

$$r(x) = \sqrt{y_1^2(x) + y_2^2(x)} \tag{6.3.3}$$

et

$$\theta(x) = \theta_0 + \int_a^x \frac{w(s)}{r^2(s)} ds. \tag{6.3.4}$$

Preuve. Posons $\varphi(x) = y_1(x) + iy_2(x) \neq 0$ et $\psi(x) = \int_a^x \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds + \log r_0 + i\theta_0$.
On voit que

$$\begin{aligned}
(\varphi(x)e^{-\psi(x)})' &= \varphi'(x)e^{-\psi(x)} - \varphi(x)\psi'(x)e^{-\psi(x)} \\
&= [\varphi'(x) - \varphi(x)\psi'(x)]e^{-\psi(x)} \\
&= [\varphi'(x) - \varphi(x)\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}]e^{-\psi(x)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

où $\psi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\varphi(x)e^{-\psi(x)} &= \varphi(a)e^{-\psi(a)} \\
&= r_0 e^{i\theta_0} \cdot r_0^{-1} e^{-i\theta_0}.
\end{aligned}$$

d'où $\varphi(x) = e^{\psi(x)}$, c'est à dire

$$y_1 + iy_2 = e^{\psi} = re^{i\theta},$$

avec $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ et $\theta = Im(\psi)$. Or que

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \log r_0 + i\theta_0 + \int_a^x \frac{y_1'(s) + iy_2'(s)}{y_1(s) + iy_2(s)} ds \\
&= \log r_0 + i\theta_0 + \int_a^x \frac{[y_1'(s) + iy_2'(s)][y_1(s) - iy_2(s)]}{r^2(s)} ds,
\end{aligned}$$

on arrive à

$$\theta(x) = \theta_0 + \int_a^x \frac{y_1(s)y_2'(s) - y_2(s)y_1'(s)]}{r^2(s)} ds,$$

c'est à dire

$$\theta(x) = \theta_0 + \int_a^x \frac{w(s)}{r^2(s)} ds.$$

Remarque 32. *L'utilité du passage en coordonnées polaires est illustrée par le théorème suivant*

Théorème 17. *Soit $a \in \mathbb{R}$, $q(\cdot)$ une fonction de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec $q(x) > 0, \forall x \geqslant a$. Supposons que*

$$\int_a^{+\infty} \sqrt{q(s)}ds = +\infty \tag{6.3.5}$$

et

$$q'(x) = 0(q^{\frac{3}{2}}(x)) \text{ quand } x \longrightarrow +\infty \tag{6.3.6}$$

Soit $y(\cdot)$ une solution réelle non nulle de $y''(x) + q(x)y(x) = 0$ sur $[a, +\infty[$, et soit $N(x)$ le nombre de zéros de $y(\cdot)$ sur $[a, x]$. Alors :

$$N(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_a^x \sqrt{q(s)}ds \;\; quand \;\; x \longrightarrow +\infty \tag{6.3.7}$$

Preuve : Tout d'abord on va faire un changement de variable en posant

$$\tau(x) = \int_a^x \sqrt{q(s)}ds.$$

D'après (6.3.5) et (6.3.6), on peut déduire que $\tau(\cdot)$ est une bijection croissante de classe C^1 de $[a, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$, $\tau^{-1}(\cdot)$ est aussi bijection croissante de classe C^1 de $[0, +\infty[$ sur $[a, +\infty[$. Posons $Y = y \circ \tau^{-1}$ ou encore $y = Y \circ \tau$ (c'est à dire $y(x) = Y(\tau(x))$. Si on prend comme nouvelle variable $t = \tau(x)$ et comme nouvelle fonction inconnue $Y(\cdot)$, on voit que

$$\begin{aligned} y'(x) &= \tau'(x)Y'(\tau(x)) = \sqrt{q(x)}Y'(\tau(x)), \\ y''(x) &= \tau''(x)Y'(\tau(x)) + (\tau(x))^2 Y'(\tau(x)) \\ &= \frac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}}Y'(\tau(x)) + q(x)Y''(\tau(x)). \end{aligned}$$

Il vient que :

$$y''(x) + q(x)y(x) = q(x)Y''(\tau(x)) + \frac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}}Y'(\tau(x)) + q(x)Y(\tau(x)) = 0.$$

Posons donc :

$$\varphi(t) = \frac{q'(x)}{2q^{\frac{3}{2}}(x)} \text{ pour } t = \tau(x) \tag{6.3.8}$$

c'est à dire

$$Y''(t) + \varphi(t)Y'(t) + Y(t) = 0 \text{ si } t \geqslant 0 \tag{6.3.9}$$

Qu'est ce qu'on a gagné dans (6.3.9)? maintenant $Y(\cdot)$ est de coefficient 1 (mais on a perdu à cause de l'apparition du terme $\varphi(\cdot)Y'(\cdot)$).
Mais on a gagné plus qu'on a perdu car (6.3.5) implique que $\varphi(t) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow \infty$. D'où tout va se dérouler comme si on avait l'équation

$$Y''(t) + Y(t) = 0$$

.
La deuxième étape consiste de passer en coordonnées polaires pour appliquer le lemme précédant. On peut écrire
$$\begin{cases} Y(t) = r(t)\sin\theta(t) \\ Y'(t) = r(t)\cos\theta(t) \end{cases} \tag{6.3.10}$$

Où $r, \theta \in C^1([0, +\infty[; \mathbb{R})$.

On voit que $Y(\cdot)$ et $Y'(\cdot)$ n'ont pas de zéros communs, car sinon l'unicité de solution de l'équation (6.3.9) implique que $Y \equiv 0$ et donc $y \equiv 0$. En dérivant et en utilisant l'équation (6.3.9), on obtient le système

$$\begin{cases} Y'(t) & = r'(t)\sin\theta(t) + r(t)\theta'(t)\cos\theta(t) = r(t)\cos\theta(t) \\ Y''(t) & = r'(t)\cos\theta(t) - r(t)\theta'(t)\sin\theta(t) = -\varphi(t)Y'(t) - Y(t) \\ & = -\varphi(t)r(t)\cos\theta(t) - r(t)\sin\theta(t) \end{cases}$$

On Multiplions la première équation par $\cos\theta(t)$ et la deuxième équation par $-\sin\theta(t)$ puis on somme, on trouve

$$r(t)\theta'(t) = r(t) + \varphi(t)r(t)\sin\theta(t)\cos\theta(t).$$

Par ailleurs
$$\theta'(t) = 1 + \varphi(t)\sin\theta(t)\cos\theta(t),$$

(où on a utilisé l'égalité $\cos 2\alpha = 2\cos\alpha\sin\alpha$ alors $\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{2}\cos 2\alpha$.)

Il vient que
$$|\theta'(t) - 1| \leqslant \frac{1}{2}|\varphi(t)|$$

Le fait que $\varphi(t) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$, implique que

$$\theta'(t) \longrightarrow 1 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty \tag{6.3.11}$$

On déduit alors
$$\theta(t) \sim t \text{ quand } t \longrightarrow +\infty.$$

Soit $M(t)$ le nombre des zéros de $Y(\cdot)$ sur $[0, t]$ (c'est à dire $Y(t) = r(t)\sin\theta(t) = 0$), d'où $\sin\theta(t) = 0$), donc on veut prouver que

$$M(t) \sim \frac{t}{\pi} \text{ quand } t \longrightarrow +\infty. \tag{6.3.12}$$

Pour faire, soit $t_0 \geqslant 0$ telle que pour $t \geqslant t_0$ on a $\theta'(t) > 0$, alors d'après (6.3.10) on déduit que

$$\begin{aligned} M(t) &\sim card\{s \in [t_0, t] : \sin\theta(t) = 0\} \\ &= card\{l \in [\theta(t_0), \theta(t)] : \sin l = 0\} \\ &\sim \frac{\theta(t)}{\pi} \sim \frac{t}{\pi}, \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\sin l = 0$ implique $l = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$, et aussi on a utilisé (6.3.11), d'où(**??**) est prouvée.
Pour finir, on va démontrer que

$$N(x) = M(\tau(x)). \tag{6.3.13}$$

En effet

$$\begin{aligned} M(\tau(x)) &= card\{t \in [0, \tau(x)] : Y(t) = 0\} \\ &= card\{s \in [a, x] : Y(\tau(s)) = 0\} \\ &= card\{s \in [a, x] : y(s) = 0\} \\ &= N(x) \end{aligned}$$

Vu la définition de $\tau(x)$, (6.3.12) et (6.3.13) achèvent la preuve de ce théorème.

Remarque 33. *L'hypothèse $q'(x) = 0(q^{\frac{3}{2}}(x))$ n'est pas aussi artificielle qu'il peut paraître, comme le montre l'exemple suivant :*

6.3.2 *Exemple*

Exemple 1.
Soit $a = 1, q(x) = \frac{1}{4x^2}$, et considérons l'équation différentielle

$$y''(x) + \frac{1}{4x^2} y(x) = 0$$

et soit $y(\cdot)$ une solution sur $[1, +\infty[$.
On voit que :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \sqrt{q(s)} ds &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_1^x \sqrt{q(s)} ds \\ &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{2s} ds \\ &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} (\frac{1}{2} ln x - \frac{1}{2} ln 1) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

mais

$$q'(x) q^{\frac{-3}{2}}(x) = \frac{-1}{2x^3} 8x^3 = -4$$

et justement la solution générale de l'équation d'Euler

$$y''(x) + \frac{1}{4x^2} y(x) = 0$$

est donnée par

$$y(x) = \sqrt{x}(a + b \log x)$$

qui admet au plus un zéros sur $[1, +\infty[$.

Le principe de croisement de Sturm est résumé par les deux théorèmes suivants :

Théorème 18. ***Théorème de comparaison de Sturm***
Soient $q\cdot)$ et $r(\cdot)$ deux fonctions réelles et continues sur un intervalle $[a,b]$ telles que $r(x) \geqslant q(x), \forall x \in [a,b]$, et soient $y(\cdot)$ et $z(\cdot)$ deux solutions réelles respectives (sur $[a,b]$) des deux équations différentielles :

$$y''(x) + q(x)y(x) = 0 \tag{6.4.1}$$

$$z''(x) + r(x)z(x) = 0 \tag{6.4.2}$$

Alors

(1 Si $x_0, x_1, (x_0 < x_1)$ sont deux zéros consécutifs (c'est à dire successifs) de $y(\cdot), z(\cdot)$ s'annule en un point de $[x_0, x_1]$ et si de plus $z(x_0) = 0$, alors $z(\cdot)$ s'annule en un point de $[x_0, x_1]$.

(2) Si $y_1(\cdot), y_2()$ sont deux solutions non proportionnelles de (6.4.1) et $u, v, (u < v)$ deux zérso successifs de $y_1(\cdot)$, alors $y_2 \cdot .)$ s'annule en un point de $[u, v]$.

Preuve

(1) Supposons $z(\cdot)$ sans zéros sur $[x_0, x_1]$ c'est à dire

$$\forall x \in [x_0, x_1] : z(x) \neq 0$$

et $z(\cdot)$ une solution de (6.4.2) sur $[a,b]$. Il vient que $z(\cdot)$ garde un signe constant sur $]x_0, x_1[$. Prenons par exemple

$$z(x) > 0, \forall x \in [x_0, x_1]$$

De même on peut supposer

$$y(x) > 0, \forall x \in [x_0, x_1].$$

Ceci implique que $y'(x_0) > 0$ et $y'(x_1) < 0$ (d'après le lemme des pentes dans le premier théorème.
Considérons maintenant le Wronksien :

$$w(x) = y(x)z'(x) - z(x)y'(x)$$

Il vient que

$$w'(x) = y(x)'z'(x) + y(x)z''(x) - y''z = y(x)z''(x) - y''(x)z(x).$$

C'est à dire

$$w'(x) = [q(x) - r(x)]y(x)z(x).$$

D'où

$$w'(x) \leqslant 0 \ , \ \ \forall x \in [x_0, x_1].$$

Alors $w(\cdot)$ est décroissant sur $[x_0, x_1]$.
Comme $w(x_0) = -y'(x_0)z(x_0) < 0$ et $w(x_1) = -y'(x_1)z(x_1) > 0$, alors

$$w(x_1) > w(x_0).$$

D'où une contradiction avec $w(\cdot)$ décroissante. Cela montre que $z(\cdot)$ s'annule au moins en un point de $[x_0, x_1]$.
La deuxième assertion se prouve de même manière, avec cette fois $w(x_0) = 0$.

(2) c'est une conséquence de (1) immédiate.

Théorème 19. ***(Théorème de Sturm périodique)*** *Soit $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, T-périodique, $T > 0$. Considérons l'équation différentielle :*

$$y''(x) + q(x)y(x) = 0 \tag{6.4.3}$$

(1) On a l'alternative suivant qui implique que la solution nulle est exclue

(i) Toute solution réelle de (6.4.3) a au plus un zéro (par exemple l'équation $y''(x) - y(x) = 0$).

(ii) Toute solution réelle de (6.4.3) a une infinité de zéros (par exemple l'équation $y''(x) + y(x) = 0$).

b) Si $q(x) \leqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$, alors on est dans le cas (i) (même si $q(\cdot)$ n'est pas périodique).

c) Si $q(x) \geqslant 0$ et $q \neq 0$, alors on est dans le cas (ii).

Corollaire 6.4.1. *Soit $y(\cdot.)$ une solution non triviale de*

$$y''(x) + q(x)y(x) = 0$$

sur $I = [a, b]$. Si

$$q(x) \leqslant 0, \quad \forall x \in I$$

alors $y(\cdot)$ a au plus un zéro sur I.

Théorème 20. ***(Théorème de séparation de Sturm)*** *Soit $y_1(\cdot)$ et $y_2(\cdot)$ deux solution linéairement indépendantes de l'équation différentielle*

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \ , \ \ x \in I \tag{6.4.4}$$

Alors les zéros de $y_1(\cdot)$ sont distinctes de celles de $y_2(\cdot)$ et les deux suites de zéros alternent, c'est à dire $y_1(\cdot)$ a exactement un zéro entre deux zéros successifs de $y_2(\cdot)$, et vice versa.

Preuve : Comme $y_1(\cdot)$ et $y_2(\cdot)$ sont linéairement indépendantes, alors leur Wronksien est non nul sur I :

$$w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \neq 0, \quad \forall x \in I$$

Donc, son signe est constant sur I. Notons de plus que $y_1(\cdot)$ et $y_2(\cdot)$ ne peuvent pas avoir un zéro commun (sinon dans ce cas $w(\cdot)$ sera nul.)
Supposons $x_1, \quad x_2$ deux zéros successifs de $y_2(\cdot)$, alors :

$$w(x_1) = y_1(x_1)y_2'(x_1) \neq 0$$

$$w(x_2) = y_1(x_2)y_2'(x_2) \neq 0$$

D'où $y_1(x_1), y_2'(x_1), y_1(x_2), y_2'(x_2)$ ne sont pas nulles tous.
Comme $y_2'(\cdot)$ est continue sur I , x_1 admet un voisinage U_1 où le signe de $y_2'(\cdot)$ ne change pas, et similairement x_2 admet un voisinage U_2 où $y_2'(\cdot)$ ne change pas de signe.
Mais le signe de $y_2'(\cdot)$ dans $U_1 \cap I$ et $U_2 \cap I$ ne peut pas être le même, si $y_2(\cdot)$ est croissante sur l'un des deux voisinages alors elle doit être décroissante sur l'autre voisinage.
Pour $w(\cdot)$ soit de signe constant sur I , $y_1(x_1)$ et $y_1(x_2)$ doivent avoir des signes apposées,

donc $y_1(\cdot)$ "comme elle est continue" a au moins un zéro entre x_1 et x_2.
Il ne peut y avoir plus d'un tel zéro, car si x_3 et x_4 sont deux zéros de $y_1(\cdot)$ qui se situent entre x_1 et x_2, on peut utiliser le même argument pour conclure que $y_2(\cdot)$ s'annule entre x_3 et x_4.
Mais ceci contredit la fait que x_1 et x_2 sont deux zéros successifs de $y_2(\cdot)$.

Corollaire 6.4.2. *Si deux solutions de (6.4) ont un zéro commun sur I, alors elles sont linéairement indépendantes.*

Remarque 34. *Dans le but de l'étude de la distribution des zéros de l'équation (6.4), il serait plus commode si on peut se débarrasser du terme $p(x)y'(x)$ en transformant l'équation (6.4) à l'équation :*

$$u''(x) + \rho(x)u(x) = 0 \tag{6.4.5}$$

Pour cela, on pose

$$y(x) = u(x)v(x) \tag{6.4.6}$$

D'où

$$\begin{aligned} y'(x) &= u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \\ y''(x) &= u''(x)v(x) + 2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x) \end{aligned}$$

En substituant dans (6.4), on aura :

$$u''(x)v(x) + [2v'(x) + p(x)v(x)]u'(x) + [v''(x) + p(x)v'(x) + q(x)v(x)]u(x) = \tag{6.4.7}$$

Pour obtenir (6.4), on doit choisir dans (6.4.7)

$$2v'(x) + p(x)v(x) = 0$$

ce qui implique que

$$v(x) = e^{\frac{-1}{2}\int_0^x p(\tau)d\tau} \tag{6.4.8}$$

et

$$\rho(x) = q(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x) \tag{6.4.9}$$

La fonction exponentielle $v(\cdot)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, d'où les zéros de $u(\cdot)$ coïncident avec ceux de $y(\cdot)$, et nous pouvons donc, dans le but d'enquêter sur la distribution des zéros pour , limiter notre attention pour l'équation .

Théorème 21. ***(Théorème de comparaison de Sturm)*** *Soient $\varphi(), \psi\cdot.)$ deux solutions non triviales des deux équations :*

$$y'(x) + q_1(x)y(x) = 0$$

$$z''(x) + q_2(x)z(x) = 0$$

sur I respectivement et supposons que $q_1(x) \geqslant q_2(x), \forall x \in I$.
Alors $\varphi(\cdot)$ a au moins un zéro entre quelles deux zéros successifs de $\psi(\cdot)$, sauf si

$$q_1(x) = q_2(x) \quad et \quad \varphi(x) = \psi(x).$$

Preuve : Soient x_1, x_2 deux zéros successifs de $\psi(\cdot)$ sur I, et supposons que $\varphi(\cdot)$ n'a aucun zéro sur l'intervalle ouvert $]x_1, x_2[$.

Supposons que $\varphi \cdot .)$ et $\psi(\cdot)$ sont positives sur $]x_1, x_2[$, sinon changer le signe de la fonction négative.
Comme φ' et ψ' sont continues, il vient que $\psi'(x_1) \geqslant 0$ et $\psi'(x_2) \leqslant 0$, et de plus les wronksien de φ et ψ satisfait

$$\left.\begin{aligned} w(x_1) &= \varphi(x_1)\psi'((x_1) - \varphi'(x_1)\underbrace{\psi(x_1)}_{=0} = \varphi(x_1)\psi'(x_1) \geqslant 0 \\ w(x_2) &= \varphi(x_2)\psi'(x_2) \leqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.4.10}$$

Mais

$$\begin{aligned} w'(x) &= \varphi(x)\psi''(x) - \varphi''(x)\psi(x) \\ &= [q_1(x) - q_2(x)]\varphi(x)\psi(x) \geqslant 0, \forall x \in]x_1, x_2[\end{aligned}$$

D'où $w(\cdot)$ est croissante sur $]x_1, x_2[$. Ceci contredit , sauf si $q_1(x) - q_2(x) = 0$ et $w(x) = 0$, dans ce cas φ et ψ sont linéairement dépendantes.

Corollaire 6.4.3. *Soit $\varphi(\cdot)$ une solution non triviale de $y''(x) + q(x)y(x) = 0$ sur I. Si*

$$q(x) \leqslant 0, \forall x \in I$$

alors $\varphi(\cdot)$ admet au plus un zéro sur I.

Preuve Supposons $\varphi(\cdot)$ admet deux zéros sur I, notées x_1 et x_2. Alors d'après le théorème précédent, la solution $\psi(x) = 1$ de l'équation : $u''(x) = 0$ doit s'annuler sur $]x_1, x_2[$, ce qui est impossible.

6.4.1 *Exemples*

(1) L'équation différentielle $y''(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$ admet une solution (non nulle)

$$\varphi(x) = c_1 x + c_2$$

Elle est représentée par une droite , qui a au plus un seul zéro .

(2) L'équation $y''(x) - y(x) = 0$ a une solution générale

$$\varphi(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, x \in \mathbb{R}.$$

Si c_1 et c_2 ne sont pas nulle à la fois, alors $\varphi(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, sauf si $c_1 = -c_2$ et dans ce cas φ a un seul zéro en $x = 0$.

(3) L'équation $y''(x) + y(x) = 0$ a une solution générale

$$\varphi(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x = a \sin(x - b),$$

où $a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ et $b = -\arctan(\frac{c_1}{c_2})$.
Si $a \neq 0$, φ a un nombre infini de zéros donné par :

$$x_n = b + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Définition 6.4.4. *Une solution non triviale de*

$$y''(x) + q(x)y(x) = 0, x \in I \tag{6.4.11}$$

est dite oscillante si elle admet un nombre infini de zéros.

Remarque 35. *(1) D'après cette définition, l'équation $y''(x) + y(x) = 0$ est dite oscillante.*

(2) D'après le théorème de comparaison de Sturm, si l'équation (6.4.11) a des solutions oscillantes, elles dépendent de la fonction $q(\cdot)$. Si $q(x) \leqslant 0$, alors ces solutions ne peuvent pas être oscillantes.
Mais, si on suppose que

$$r(x) > k^2 > 0, \forall x \in I, \tag{6.4.12}$$

pour une constante positive k, alors toute solution de (6.4.11) sur I a un nombre infini de zéros distribuer entre les zéros des solutions de

$$y''(x) + k^2 y(x) = 0, x \in I, \tag{6.4.13}$$

telle que $y(x) = a \sin k(x - b)$ qui a des zéros donnés par

$$x_n = b + \frac{n\pi}{k}, n \in \mathbb{Z}. \tag{6.4.14}$$

Par suite, tout sous intervalle J de I de longueur $\frac{\pi}{k}$ a au plus un seul zéro de l'équation (6.4.11), et comme k augmente on s'attendrait à ce que le nombre de zéro augmente. Ceci bien sûr est clair si

$$q(x) = constante$$

Remarque 36. *D'après le théorème de séparation, on conclus aussi que si I est un intervalle infini et une solution de l'équation :*

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \tag{6.4.15}$$

est oscillante, alors toute autre solution est aussi oscillante.

Exemple 3. *L'équation*

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + (1 - \frac{\alpha^2}{x^2})y(x) = 0, 0 < x < \infty \tag{6.4.16}$$

est appelée **équation de Bessel** *d'ordre α.*
En utilisant la formule (6.4.8), (6.4.9), c'est à dire $v(x) = e^{\frac{-1}{2}\int_a^x p(s)ds} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et

$$\rho(x) = q(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - p'(x) = 1 + \frac{1 - 4\alpha^2}{4x^2}$$

avec

$$y(x) = u(x)v(x).$$

Donc, la transformation $y(x) = \sqrt{x}u(x)$, implique que

$$u''(x) + \rho(x)u(x) = 0,$$

c'est à dire

$$u''(x) + (1 + \frac{1-4\alpha^2}{4x^2})u(x) = 0. \tag{6.4.17}$$

Par comparaison entre l'équation W'' et l'équation $u''(x) + u(x) = 0$ (ici $k = 1$), on voit que

$$\rho(x) = 1 + \frac{1-4\alpha^2}{4x^2} \geqslant 1 \text{ si } 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2},$$

et

$$\rho(x) = 1 + \frac{1-4\alpha^2}{4x^2} \leqslant 1 \text{ si } \alpha > \frac{1}{2}.$$

D'où, on peut conclure comme suit

(1) *Si $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, alors dans tout sous intervalle de $]0, +\infty[$ de longueur π , toute solution de l'équation de Bessel (6.4.16) a au moins un seul zéro.*

(2) *Si $\alpha > \frac{1}{2}$, alors dans tout sous intervalle de $]0, +\infty[$ de longueur π, toute solution de l'équation de Bessel (6.4.16) a au plus un seul zéro.*

(3) *Si $\alpha = \frac{1}{2}$, la distance entre les zéros successives de toute solution non triviale de (6.4.16) est exactement π.*

6.5 DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE DES SOLUTIONS

Pour alléger les calculs, on va traiter seulement le cas de l'équation (6.1.1). Considérons l'équation différentielle

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \tag{6.5.1}$$

On a le théorème suivant

Théorème 22. *On suppose que $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ et $q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$, les séries convergent pour $|x| < R$. Alors pour tout $(a_0, a_1) \in K^2$, (6.5.1) admet une solution unique $\varphi(\cdot)$ telle que*

$$\varphi(0) = a_0, \varphi'(0) = a_1$$

et $\varphi(\cdot)$ est développable en série entière convergente sur $] - R, R[$, c'est à dire

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{6.5.2}$$

Preuve *On démontre ici seulement l'expression de la série entière (c'est à dire les valeurs des a_n, $n \geqslant 0$).*
Supposons que $\varphi(\cdot)$ est solution de (6.5.1) telle que $\varphi(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ (a_0, a_1 imposés), la série converge pour $|x| < R$. Alors

$$\left.\begin{array}{l} \varphi'(x) = \sum_{n\geqslant 0} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}x^n \\ \varphi''(x) = \sum_{n\geqslant 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \end{array}\right\} \tag{6.5.3}$$

Il vient que

$$\left.\begin{array}{l} p(x)y'(x) = \sum_{n\geqslant 0}(\sum_{j=0}^{n}(n-j+1)a_{n-j+1}p_j)x^n \\ q(x)\varphi(x) = \sum_{n\geqslant 0}(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}q_j)x^n \end{array}\right\} \tag{6.5.4}$$

Alors $\varphi \cdot .)$ solution de (6.5.1)

$$\varphi''(x) + p(x)\varphi'(x) + q(x)\varphi(x) = 0$$

si et seulement si tous les coefficients de la série entière associée à cette équation sont nuls, c'est à dire si et seulement si pour tout $n \geqslant 0$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = -\sum_{j=0}^{n}(n-j+1)a_{n-j+1}p_i - \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}q_j \tag{6.5.5}$$

Cette relation montre que la donnée de a_0, a_1 impose les valeurs de $a_2, a_3, \cdots$. D'où la preuve est achevée.

6.6 STABILITÉ

Dans ce paragraphe, on va s'intéresser au caractère borné des solutions de l'équation différentielle homogène

$$y''(x) + q(x)y(x) = 0 \tag{6.6.1}$$

où $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, π- périodique et paire. On note $(y_1(.), y_2(.))$ la base canonique de solution de l'équation (6.6.1) associée à $x_0 = 0$, c'est à dire

$$\left.\begin{array}{l} y_1(0) = 1 \ , \ y_1'(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \ , \ y_2'(0) = 1 \end{array}\right\} \tag{6.6.2}$$

On note aussi l'endomorphisme $A : W \longrightarrow W$ défini par

$$Ay(x) = y(x+\pi). \tag{6.6.3}$$

De plus la matrice de A dans la base $(y_1(.), y_2(.))$, encore notée A, est donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{bmatrix} \tag{6.6.4}$$

Et aussi on pose

$$T = trA = a + d = y_1(\pi) + y_2'(\pi) \tag{6.6.5}$$

On a les résultats suivants

Proposition 6.6.1. *1) $y_1(\cdot)$ est paire, $y_2(\cdot)$ est impaire et* $\det A = 1$.

2) $a = d$ c'est à dire $y_1(\pi) = y_2'(\pi)$.

3) Si $|T| < 2$, alors les solutions de (6.6.1) sont bornées.

4) Si $|T| = 2$, alors l'équation (6.6.1) possède une solution non nulle bornée.

5) $|T| = 2$ si seulement si $bc = 0$.

6) Si $|T| > 2$, alors toutes les solutions non nulles de (6.6.1) sont non bornées.

Théorème 23. *Supposons que $q(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$ et que $q(.)$ n'est pas identiquement nulle. Si*

$$\int_0^{\pi} q(x)dx \leqslant \frac{4}{\pi}$$

alors, toute les solutions de (6.6.1) sont bornées.

6.7 EXERCICES

Exercice 1. *Considérons l'équation différentielle*

$$y''(x) + e^{x^2} y(x) = 0 \tag{6.7.1}$$

Soit $y(\cdot)$ une solution réelle non nulle de (6.7.1) et soit (x_n) le nombre de ses zéros positifs en ordre croissant.
• *Montrer que $x_n \sim \sqrt{2\log n}$ quand $n \longrightarrow +\infty$*

Solution

Posons $q(x) = e^{x^2}$ et soit $a = 0$. On montre que les hypothèses du théorème des zéros sont vérifiées clairement.
Il vient que le nombre des zéros de la solution $y(\cdot)$, est donnée par :

$$N(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_a^x \sqrt{q(s)}ds = \frac{1}{\pi}\int_0^x e^{\frac{s^2}{2}} ds \quad \text{quand} \quad x \longrightarrow +\infty.$$

On a :

$$\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt \sim \frac{1}{x} e^{\frac{t^2}{2}} \qquad x \longrightarrow +\infty,$$

car

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt \sim \int_1^x e^{\frac{t^2}{2}} dt &= \int_1^x \frac{1}{t} t e^{\frac{t^2}{2}} dt \\ &= [\frac{1}{t} t e^{\frac{t^2}{2}}]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2} e^{\frac{t^2}{2}} dt.\end{aligned}$$

D'où

$$\int_1^x e^{\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{x} e^{\frac{x^2}{2}} + 0(\int_1^x e^{\frac{t^2}{2}} dt).$$

Il vient que :

$$N(x) \sim \frac{1}{\pi x} e^{\frac{x^2}{2}} \quad \text{quand} \quad x \longrightarrow +\infty.$$

Mais, par définition $N(x_n) = n$, d'où $n \sim \frac{1}{\pi x_n} e^{\frac{x_n^2}{2}}$. Il vient que

$$\frac{x_n^2}{2} \sim \log n \quad et \quad x_n \sim \sqrt{2\log n} \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Exercice 2. *Considérons l'équation différentielle d'ordre deux*

$$y''(x) + q(x)y(x) = 0 \tag{6.7.2}$$

où $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, non nulle et négative et soit $y(\cdot)$ une solution de (6.7.2).

(1) *Montrer que si $y(\cdot)$ est réelle, alors $y^2(\cdot)$ est convexe.*

(2) *Montrer que si $y(\cdot)$ est réelle et positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $y(\cdot)$ est convexe sur I.*

(3) *Montrer que si $y(\cdot)$ est réelle et bornée sur $\mathbb{R}$, alors $y(\cdot)$ est nulle.*

(4) *Soit $\phi(\cdot)$ une solution de (6.7.2) vérifiant $\phi(0) = 1$ et $\phi'(0) = 0$. Montrer que $|\phi(x)| \geq 1$, puis $\phi(x) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $\phi(\cdot)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.*

(5) *On suppose qu'il existe une constante θ telle que $q(x) \leq -\theta^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\phi(x) \geq \cosh(\theta x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
(Indication : observer que $y''(x) - \theta^2 y(x) = -(q(x) + \theta^2)y(x) \doteq r(x)$ et utiliser la formule de Lagrange.)

Exercice 3.

Soit l'équation différentielle d'ordre deux

$$y''(x) + e^{x^2} y(x) = 0 \tag{6.7.3}$$

Soit $y(\cdot)$ une solution non nulle réelle de (6.7.3), et soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite de ses zéros positifs, en ordre croissant.
Montrer que

$$x_n \sim \sqrt{2 \log n}, \quad n \to +\infty.$$

Exercice 4.

Soit $q(\cdot)$ et $r(\cdot)$ deux fonctions réelles continues sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ telles que

$$r(x) \geq q(x), \forall x \in [a, b].$$

Soit $y(\cdot)$ et $z(\cdot)$ deux solutions réelles respectives (sur $[a, b]$) des deux équations différentielles

$$y''(x) + q(x)y(x) = 0 \tag{6.7.4}$$

et

$$z''(x) + r(x)z(x) = 0 \tag{6.7.5}$$

(1) *Montrer que si x_0, x_1 avec $x_0 < x_1$ deux zéros successifs de $y(\cdot)$, alors $z(\cdot)$ s'annule en un point de $[x_0, x_1]$. Si de plus $z(x_0) = 0$ alors $z(\cdot)$ s'annule en un point de $]x_0, x_1]$.*

(2) *Montrer que si $y_1(\cdot)$, $y_2(\cdot)$ deux solutions non proportionnelles de (6.7.4) et x_0, x_1 avec $x_0 < x_1$ deux zéros successifs de $y_1(\cdot)$, alors $y_2(\cdot)$ s'annule en un point de $]x_0, x_1[$.*

Exercice 5.

Soient $y_1(\cdot)$, $y_2()$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \tag{6.7.6}$$

Montrer que

$$p(x) = \frac{y_2 y_1'' - y_1 y_2''}{w(x)}, \quad q(x) = \frac{y_1' y_2'' - y_2' y_1''}{w(x)}.$$

où $w(x)$ est le Wronksien associe à (6.7.6).

Exercice 6.

1. *Déterminer une solution gńérale pour chacune des EDO suivantes*

$$y''(x) - 4y'(x) + 7y(x) = e^x,$$

$$xy''(x) - y'(x) = 3x^2,$$
$$x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = x - 1.$$

2. *Pour chacune des paires de solutions suivantes, trouver une équation différentielle correspondante sous forme $a_0y''(x) + a_1y'(x) + a_2y(x) = 0$, où a_0, a_1, a_2 sont des constantes à déterminer dans chaque cas.*

$$x, \quad \frac{1}{x},$$
$$1, \quad logx,$$
$$e^{-x}cos2x, \quad e^{-2x}sin2x.$$

Exercice 7.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $q_1, q_2 : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I telle que

$$q_1(x) \geq q_2(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{6.7.7}$$

Soient $\alpha < \beta$ deux zéros d'une solution non nulle de l'EDO

$$y''(x) + q_2(x)y(x) = 0. \tag{6.7.8}$$

(1) *Montrer que toute solution non nulle de l'EDO $y''(x) + q_1(x)y(x) = 0$ s'annule sur $[\alpha, \beta]$.*

(2) *Application. Consiérons l'EDO*

$$y''(x) + e^x y(x) = 0, \quad I = \mathbb{R}_+. \tag{6.7.9}$$

Montrer que toute solution non nulle de l'EDO (6.7.9) admet une infinité dénombrable de zéros que l'on peut ordonner en une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que :

$$x_n \sim \frac{\pi^2 n^2}{4}.$$

Exercice 8.

Parmis les équations différentielles suivantes, déterminer celles qui admettent des solutions oscillantes

$$y''(x) + (sin^2x + 1)y(x) = 0,$$
$$y''(x) - x^2y(x) = 0,$$
$$y''(x) + \frac{1}{x}y(x) = 0.$$

Exercice 9.

Considérons l'équation de Bessel d'ordre λ suivante

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + (1 - \frac{\lambda^2}{x^2})y(x), \quad x \in_{+}^{\star} . \tag{6.7.10}$$

(1) *On pose $u(x) = \sqrt{x}y(x)$. Montrer que l'EDO (6.7.10) s'écrit alors sous la forme équivalente :*

$$u''(x) + (1 - \frac{1 - 4\lambda^2}{4x^2})u(x) = 0. \tag{6.7.11}$$

(2) *En comparant l'EDO* (6.7.11) *avec l'EDO* $u''(x) + u(x) = 0$, *déterminer le nombre des zéros des solutions non nulles de* (6.7.11) *en fonction de* λ.
Conclure les résultats obtenus auparavant, pour l'équation de Bessel (6.7.10).

(3) *On prend* $\lambda = \frac{1}{2}$.
Trouver une solution générale pour (6.7.10) *dans ce cas, puis déterminer les zéros de chaque solution indépendante.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] *V. Arnold :* E*quations différentielles ordinaires, Éditions Mir, Moscow, 1974.*

[2] *C. Chicone.* O*rdinary differential equations with applications, Texts in Applied Mathematics, vol. 34, Springer-Verlag, New York, 1999.*

[3] *E. A. Coddington, N. Levinson :* T*heory of ordinary differential equations, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1955.*

[4] *S. B. Gavage :* C*alcul différentiel et équations différentielles*

[5] *M. Al. Gwai :* S*turm Liouville theory and its applications, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2008.*

[6] *P. Hartman :* O*rdinary differential equations, Classics in Applied Mathematics, vol. 38, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002.*

[7] *S. W. Hirsch S. Smale :*D*ifferential equations, dynamical systems and linear algebr, University of California, Berkely, Academic press, 1970.*

[8] *A.C. King, J. Billingham, S. R. Otto :* D*ifferential equations : Linear, nonlinear, ordinary, partial, Cambridge niversity press, 2003.*

[9] *J. P. La Salle :* S*ome extensions of Liapunov's second method, IRE Trans. CT-7, p. 520-527, 1960.*

[10] *Y. Pinchover, J. Robinstein :*A*n introduction to partial differential equations, Cambridge University Press, 2005.*

[11] *W. Rudin :* A*nalyse réelle et complexe, Masson, Paris, 1980.*

[12] *S. Villani :* E*quations d'évolution, Université de Lyon, Institut Henri Poincaré.*