Cours déstiné aux étudiants de 1ère année master

Spécialité

Mathématiques

Option : EDP et applications

INTITULÉ

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES 1

Enseignée par

Meddour Halima

Année Universitaire

2020-2021

TABLE DES MATIÈRES

1 INITIATIONS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES 5
- 1.1 Introduction 5
- 1.2 Définitions 6
- 1.3 Notions élémentaires 9
- 1.4 Exercices 16

1

INITIATIONS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

1.1 INTRODUCTION

Une équation différentielle est un modèle destiné à décrire l'évolution, au cours du temps, d'un système physique ou abstrait décrit par un nombre fini de paramètres. On appelle espace d'état X du système l'ensemble dans lequel cet état est à priori autorisé à varier, et dans lequel on le recherche. Cet espace est supposé de **dimension fini**, (par exemple : $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ ou tout espace vectoriel de dimension fini, ou encore tout sous ensemble non vide ouvert de l'un de ces espaces. l'inconnu est une fonction dépendant d'un paramètre temps, à valeurs dans l'esppace des états. Une équation différentielle est une relation entre **dérivées de la fonction inconnue** $t \to x(t)$.
Avant de faire une mise en départ, donnons quelques exemples.

Exemple. **(1)** *On modélise la croissance $x(t)$ d'une quantité radioactive dans un espace d'états $X = \mathbb{R}_+$, par l'équation différentielle*

$$x'(t) = -ax(t)$$

.

(2) *La position d'une bille roulant dans un bol sans frottement est modélisé dans un espace d'état X qui est une surface ouverte de $\mathbb{R}^3$ (X est la surface du bol), l'équation différentielle est*

$$mx''(t) = -mge_y + R(x(t)),$$

où m la masse de le bille, g la force de gravité, e_y le vecteur unitaire verticale et $R(x)$ est la réaction exercée par le bol sur la bille.

On notera par convention t la variable de temps, qui sera une variable réelle qui varie toujours dans **un intervalle** de $\mathbb{R}$.

1.2 DÉFINITIONS

Définition 1.2.1. (équation déterministe) *Une équation est dite déterministe si toute solution $x(t)$ de cette équation, définie sur un intervalle de temps $I =]a, b[$, est entièrement déterminée par ses valeurs sur un intervalle de temps $]a, a + \varepsilon[$, avec ε est arbitrairement petit.*

Cela signifie que si $x(t)$ et $\widetilde{x}(t)$ sont deux solutions sur $]a, b[$, telles que

$$x(t) = \widetilde{x}(t), \quad t \in]a, a + \varepsilon[,$$

alors

$$x(t) = \widetilde{x}(t), \quad t \in]a, b[.$$

Par suite on peut dire que **le système est entièrement prédictible à partir de son observation initiale**.

Exemple. *Il est facile de vérifier que l'équation $x'(t) = -ax(t)$ est déterministe, tandis que l'équation $|x'(t)| \leq 1$ n'est pas déterministe.*

De ce fait, on va restreidre notre étude le long de ce cours aux équations différentielles de la forme $x'(t) = f(t, x(t))$ ou $x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$. De telles équations sont dites explicites car la dérivée de plus haut degré de $x(t)$ est donnée comme **une fonction des dérivées de degré inférieur**. Cependant, une définition plus générale autorise des équations implicites.

Définition 1.2.2. **(1)** *Une "EDO", équation différentielle ordinaire, est une équation de la forme*

$$F\big(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(n)}(t)\big) = 0,$$

où n est un entier et $x^{(j)}(\cdot)$ est la dérivée d'ordre j de $x(\cdot)$ par rapport à t. On appelle n l'ordre de l'équation différentielle.

(2) *Une EDO explicite est une EDO de la forme*

$$x^{(n)}(t) = G(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(n-1)}(t)$$

(3) *Une EDO est* **linéaire** *si elle est définie par une fonction F linéaire, et polynomiale si elle est définie par une fonction F polynomiale.*

Exemple. **(1)** *L'EDO $x''(t) = (x'(t))^3 + x^2(t) + 1$ est une équation explicite polynomiale non linéaire.*

(2) *L'EDO $(x''(t))^2 x(t) + (x'(t))^2 = 1$ est une équation implicite polynomiale non linéaire.*

Remarque. *On peut réecrire toute EDO comme une EDO d'ordre un, d'une manière simple et importante : si l'on a une EDO*

$$F\big(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(n)}(t)\big) = 0,$$

on définit une nouvelle fonction inconnue

$$z(t) = (x(t), x'(t), \cdots, x^{(n-1)}(t).$$

Et si par exemple $x(t)$ varie dans l'espace d'états $X = \mathbb{R}$, alors $z(t)$ varie dans l'espace d'états $Z = \mathbb{R}^n$.

Ainsi, la nouvelles équation prendra la forme

$$F\big(t, z_1(t), z_2(t), \cdots, z_{n-1}(t), z'_{n-1}(t)\big) = 0.$$

Exemple. *Soit l'EDO polynomiale*

$$x''(t) = x^3(t) - a^2(t) + 2tx'(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si on pose

$$z(t) = (x(t), x'(t)) \equiv (z_1(t), z_2(t)).$$

Alors

$$\begin{aligned} z'_1(t) &= x'(t) = z_2(t) \\ z'_2(t) &= x''(t) = x^3(t) - a^2(t) + 2tx'(t) = z_1^3(t) - az_1^2(t) + 2tz_2(t). \end{aligned}$$

Donc, si on pose

$$f(t, z_1(t), z_2(t)) = \big(z_2(t) z_1^3(t) - az_1^2(t) + 2tz_2(t)\big),$$

l'EDO aura la forme

$$z'(t) = f(t, z(t)).$$

Il faut remarquer que **l'ordre de l'équation a été réduit de** 2 **à** 1**, mais la dimension de l'espace d'état est passée de** 1 **à** 2. C'est un phénomène général !

Soit une EDO explicite du premier ordre

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{1.3.1}$$

Pour chaque état z, le vecteur

$$f(t, z)$$

est la variation de la solution "quand elle prend la valeur z". Par ailleurs la fonction $z \to f(t, z)$ est une fonction à valeurs **vectorielles** ou encore **champ de vecteurs**, on peut donc la représenter comme une famille de vecteurs qui dépendent du temps t, telle que $f(t, z)$ a son origine en z. De plus, imposer une **régularité** sur f, revient à parler de la régularité de la variation de ce vecteur en fonction de z et t. Réciproquement, un champ de vecteurs définit une EDO.

Définition 1.3.1. *(courbe intégrale) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Le champ de vecteurs $(t, x) \to f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ définit une EDO*

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{1.3.2}$$

On dit que les **solutions** *de* (1.3.2) *sont* **les courbes intégrales du champ de vecteurs** $f(t, x)$.

Remarque. *Si $f(t, x)$ est un champ de vecteurs, une courbe intégrale $y(t)$ est* **tangente** *en chaque temps t à ce champ de vecteurs. Par suite, la résolution d'une EDO est étroitement liée à un problème que l'on peut formuler en termes purement géométriques.*

Définition 1.3.2. *(équilibre d'une EDO) Soit $f(t, x)$ un champ de vecteurs défini dans $I \times \Omega$. On appelle* **équilibre** *associé à f, tout point $x \in \Omega$ tel que*

$$f(t, x) = 0, \quad \forall t \in I. \tag{1.3.3}$$

Les équilibres sont donc **les états x invariants par l'évolution du système** *: c-à-d que si le système est au départ dans l'état x, il y reste au cours du temps t.*

Définition 1.3.3. *(EDO autonome) Une EDO est dite autonome, si elle est définie par* **un champ stationnaire**, *c-à-d indépendant de la variable t. On peut érire donc une EDO autonome sous forme*

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{1.3.4}$$

Remarque. *Tout EDO est équivalente à une EDO autonome. Cela se montre en introduisant* **un "temps auxilaire"**, *que nous allons noter s, en considérant la nouvelle variable comme partie des données et en faisant en sorte qu'elle coincide automatiquement, le long de la solution, avec le temps naturel t. En effet, soit $f(t,x)$ un champ de vecteurs défini sur $I \times \Omega$ et introduisons une nouvelle variable que l'on note s, et on note $y = (x,s)$ la nouvelle inconnue, explicitement, ce sera une fonction $(x(t), s(t))$. On définit alors la nouvelle EDO par*

$$x'(s) = f(s, x(s)) \tag{1.3.5}$$

$$s'(t) = 1 \tag{1.3.6}$$

La deuxième équation implique $s(t) = t + c$, où c est une constante. Si l'on impose alors une condition $s(t_0) = t_0$ où t_0 est un temps quelconque dans l'intervalle I, alors s et t conicideront automatiquement : pour toute solution, $s(t) = t$. En posant donc

$$F(x,s) \equiv (f(s,x), 1),$$

on aura

$x'(t) = f(t, x(t))$ implique $y'(t) = F(t)$

Cela vient donc avec **une dimension supplémentaire dans l'espace des états et une condition supplémentaire** *$s(t_0) = t_0$.*

Si toutes les équations peuvent se transformer en équations autonomes du premier ordre, il faut *bien s'attendre à ce que ces dernières* **ne soient en général pas résolubles explicitement***. De plus on va voir (dans la suite du cours) que même les équations d'ordre* 1*, explicites, autonomes, en dimension* 1*,* **ne sont pas résolubles explicitement***, par exemple résoudre* $x'(t) = f(x(t))$ *se ramène en dimension* 1*, à calculer une primitive de* $\frac{1}{f}$*, ce qui est en général impossible à faire explicitement.*

Il existe cependant plusieurs exceptions notables : des situations dans lesquelles un calcul explicite est possible. La plus importante est le cas des **équations linéaires à coeffcients constants**, c-à-d des EDO vectorielles prenant la forme $x'(t) = Ax(t)$, où A ou matrice $n \times n$.

Proposition 1.3.4. *Soient A une matrice réelle $n \times n$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors l'EDO*

$$x'(t) = Ax(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.3.7}$$

se résout en

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x(t_0), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.3.8}$$

En particulier, la solution est déterminée par sa valeur en t_0, et l'espace des solutions est exactement de dimension n.

Ici la fonction exponentielle matricielle est définie par

$$e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$$

On rappel que si la matrice A est triangulaire inférieure, alors e^A est aussi triangulaire inférieure, et les coefficients de la diagonale sont les exponentielles des coefficients de la diagonale de A. De plus, le déterminant de l'exponentielle coincide avec l'exponentielle de la trace, c-à-d

$$det e^A = e^{tr(A)}.$$

Exemple. **(1)** *L'EDO* $x'(t) = \alpha x(t)$*, se résout en* $x(t) = x(t_0)e^{\alpha(t-t_0)}$.

(2) *L'EDO* $x''(t) = -x(t)$*, se résout pour* $t_0 = 0$ *sous forme* $x(t) = x(0)\cos t + x'(0)\sin t$.

On peut écrire cette EDO d'ordre deux sous forme d'un système d'EDO d'ordre un, pour ce faire on pose $z(t) = (x(t), x'(t))$*, d'où on obtient* $z'(t) = Az(t)$ *avec* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ *et une solution est* $z(t) = e^{At}z(0)$*, ce qui donne la formule précédente.*

Dans le cas général, en **l'absence de solution explicite, on se retrouve forcé de faire une étude qualitative des solutions.**

Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continue et $x_0 \in \Omega$.

Définition 1.3.5. *(problème de Cauchy) On appelle problème de Cauchy, la recherche d'un intervalle* J *tel que* $t_0 \in J \subset I$ *et d'une solution* $x : J \to \Omega$ *telle que* $x(\cdot)$ *soit dérivable sur* J *et*

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), \quad t \in J \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{PC}$$

Proposition 1.3.6. *Le problème de Cauchy* (PC) *est équivalent à*

$$x(t) = x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \quad \forall t \in J. \tag{1.3.9}$$

Démonstration. Comme f est continue et $x(\cdot)$ est dérivable alors $x'(\cdot)$ est continue et donc $x(\cdot)$ est de classe C^1. Ainsi, on peut écrire

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} x'(s)ds.$$

On remplace $x'(s)$ par $f(s, x(s))$, on trouve la formule désirée.

Inversement, il suffit de dériver la formule intégrale pour obtenir $x'(t) = f(t, x(t))$ et on évalue en t_0 pour avoir $x(t_0) = x_0$. $\square$

Définition 1.3.7. *(solution locale) Un couple $(J, x(\cdot))$ est appelé solution locale du problème de Cauchy* (PC) *si et seulement si $t_0 \in J \subset I$, $x \in C^1(J)$, J un voisinage de t_0 dans I et pour tout $t \in J : x'(t) = f(t, x(t))$ et $x(t_0) = x_0$.*

Définition 1.3.8. *(prolongement de solution) Soient $(J_1, x_1(\cdot))$ et $(J_2, x_2(\cdot))$ deux solutions de* (PC)*. On dit que $(J_1, x_1(\cdot))$ prolonge $(J_2, x_2(\cdot))$ si et seulement si $J_2 \subset J_1$ et $x_1(t) = x_2(t), \quad \forall t \in J_2$.*

Définition 1.3.9. *(solution maximale) Une solution locale est dite maximale si tous ses prolongements lui sont égaux.*

Définition 1.3.10. *(solution globale) Une solution est dite globale si $J = I$.*

Lemme 1.3.11. *Si f est de classe C^k sur $I \times \Omega$, alors toute solution locale $x(\cdot)$ est de classe C^{k+1} sur J*

Démonstration. La preuve se fait par réccurence sur k en utilisant l'EDO dans (PC). □

Exemple. **(1)** *Soit le problème de Cauchy*

$$x'(t) = -2tx^2(t), \quad t \in \mathbb{R}$$
$$x(0) = 1$$

En supposant que $x(t) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = -2t$$

En intégrant par rapport à t on trouve

$$-\frac{1}{x(t)} + -\frac{1}{x(0)} = -t^2.$$

Alors une solution s'écrit

$$x(t) = \frac{x(0)}{1 + t^2 x(0)}.$$

Mais $x(0) = 1$*, d'où*

$$x(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

On remarque que $x(\cdot)$ *est bien définie sur* $\mathbb{R}$*, d'où* $J = \mathbb{R}$*, c-à-d la solution est globale.*

(2) *Le problème de Cauchy*

$$x'(t) = 2tx^2(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x(0) = 1$$

admet une solution (faire une démarche analogue au premier exemple), sous forme

$$x(t) = \frac{1}{1-t^2}, \quad t \in J =]-1, 1[$$

cette solution est maximale mais non globale ($J \neq \mathbb{R}$*).*

Lemme 1.3.12. *(lemme de Gronwall) Soient* $u, v : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *deux fonctions continues, telle qu'il existe une constante* $c > 0$ *avec*

$$u(t) \leq c + \int_0^t u(\tau)v(\tau)d\tau; \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$u(t) \leq ce^{\int_0^t v(\tau)d\tau}; \forall t \in [0, T].$$

Démonstration. Posons

$$f(t) = c + \int_0^t u(\tau)v(\tau)d\tau, \quad c > 0,$$

$$g(t) = ce^{\int_0^t v(\tau)d\tau}, \quad c > 0.$$

On veut démontrer que $f(t) \leq g(t), \forall t \in [0, T]$. On remarque que $g(t) > 0$ et que $f(0) = g(0) = c$. Il suffit donc de prouver que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) \leq 0$$

Pour cela, on a

$$f'(t) = u(t)v(t) \leq f(t)v(t),$$

mais par hypothèse

$$u(t) \leq c + \underbrace{\int_0^t u(\tau)v(\tau)d\tau}_{f(t)}, \forall t \in [0, T],$$

et

$$g'(t) = cv(t)e^{\int_0^t v(\tau)d\tau} = g(t)v(t),$$

donc

$$f'(t)g(t) - f(t)g'(t) \leq f(t)v(t)g(t) - f(t)g(t)v(t) = 0,$$

par suite

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) \leq 0.$$

Il vient que

$$\frac{f(t)}{g(t)} \leq \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{c}{c} = 1,$$

d'où le résultat

$$f(t) \leq g(t), \forall t \in [0, T].$$

$\square$

On donne aussi deux autre formes de ce lemme (on les cites sans démonstration).

Lemme 1.3.13. *(lemme de Gronwall : forme Différentielle)*

Soit $u : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction continue , dérivable sur* $[0, T]$. *Soit* $v : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction continue telle que*

$$\frac{d}{dt}u(t) \leq v(t)u(t), \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$u(t) \leq u(0)e^{\int_0^t v(\tau)d\tau}, \forall t \in [0, T].$$

Lemme 1.3.14. *(lemme de Gronwall : version générale) Soient* $u, v : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *deux fonctions continues et soit* $c : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$u(t) \leq c(t) + \int_0^t u(\tau)v(\tau)d\tau; \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$u(t) \leq c(t)e^{\int_0^t v(\tau)d\tau}; \forall t \in [0, T].$$

1.4 EXERCICES

Exercice 1.

1. Déterminer $x(\frac{3}{4})$ si $x(\cdot)$ est solution du problème de Cauchy

$$x'(t) = x^3(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x(0) = 1.$$

2. Déterminer $x(\frac{1}{4})$ si $x(\cdot)$ est solution du problème de Cauchy

$$x'(t) = x^{\frac{1}{3}}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x(\frac{1}{2}) = 0$$

Exercice 2.

Montrer que l'EDO

$$x'(t) = (\frac{1}{1+t^2})e^{-x^2 \sin^2 t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

admet une solution unique qui vérifie la condition initiale $x(0) = 1$. Puis vérifier que cette solution est globale (c-à-d $J = \mathbb{R}$).

Exercice 3.

Soit l'EDO du second ordre suivante

$$x''(t) + q(t)x(t) = 0, \quad t \in J \subset \mathbb{R}, \quad x(t) \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

où $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée.

(1) Discuter le domaine de définition d'une solution maximale de (1).

(2) Soit $x(\cdot)$ une solution de (1). Montrer que si $x(\cdot)$ s'annule, alors ses zéros sont isolés ou bien $x(\cdot)$ est identiquement nulle.

(3) Ecrire l'EDO (1) sous forme d'un système d'EDO d'ordre un sous forme

$$z'(t) = A(t)z(t). \tag{2}$$

(1.1) Rappeler la notion de résolvante $R(t,s)$ associée à (2) ainsi que ses propriétés.

(1.2) Déterminer la valeur du déterminant de la résolvante en $s = 0$: $\det R(t,0)$.

(1.3) Montrer que la résolvante $R(t,0)$ admet une valeur propre λ telle que $|\lambda| \leq 1$.