Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Master 1- EDP et applications
Module : Equations différentielles ordinaires 2

EXAMEN FINAL
DURÉE D'EXAMEN : 2 HEURES

Exercice 1. Considérons le système d'EDO qui décrit le mouvement d'un pendule simple avec amortissement :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = v(t), \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ \frac{d}{dt}x(t) = -kv(t) - \sin x(t), \quad k > 0 \end{cases} \tag{Eq 1}$$

(1) Montrer que $V(x,v) = \frac{1}{2}v^2 - \cos x$ définie sur l'ouvert $\Omega = \{(x,v) \in \mathbb{R}^2 : x \in]-\pi,\pi[, v \in]-2,2[\}$ est une fonction de Lyapunov à l'origine (0,0) pour le système (Eq 1). Que peut-on déduire pour l'origine ?

(2) Soit $\Phi_t(x_0,v_0)$ le flot associé au système (Eq 3), où (x_0,v_0) appartient à l'ouvert $U = \{(x,v) \in \mathbb{R}^2 : V(x,v) < 1\}$ (inclus dans Ω). Montrer que l'ensemble w_θ des points limites est invariant par le flot, puis appliquer le principe d'invariance de La Salle pour démontrer que l'origine est asymptotiquement stable.

Exercice 2. On considère l'EDO du second ordre

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) - \varepsilon\Big(x^2(t) - 1\Big)\frac{d}{dt}x(t) + x(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad \varepsilon \in [0,1[. \tag{Eq 2}$$

(1) Ecrire (Eq 2) sous forme d'un système différentiel d'ordre 1 en posant $(x_1(t),x_2(t)) = (x(t), \frac{d}{dt}x(t))$, puis étudier la stabilité de l'origine par linéarisation.

(2) Montrer que $(x_1(t),x_2(t))$ est solution de (Eq 2) si et seulement si $(x_1(t),x_2(t)) = (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta(t))$ est solution du système

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}r(t) = \varepsilon\Big(r^2(t)\cos^2\theta(t) - 1\Big)r(t)\sin^2\theta(t) \\ \frac{d}{dt}\theta(t) = -1 + \varepsilon\Big(r^2(t)\cos^2\theta(t) - 1\Big)\sin\theta(t)\cos\theta(t) \end{cases} \tag{Eq 3}$$

(3) Soit $(r(t),\theta(t))$ la solution maximale de (Eq 3) pour la donnée initiale $r(0) = r_0 > 1, \quad \theta(0) = 0$ dans l'intervalle $J =]T_*,T^*[$. Montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$, $k > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ on a :

$$|r(t) - r_0| \leq k, \quad |\theta(t) + t| \leq C\varepsilon, \quad \forall t \in I \subset J.$$

Exercice 3. Considérons une équation différentielle linéaire :

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{Eq 4}$$

et supposons que toutes les valeurs propres propres de A sont de parties réelle strictement négative.
Montrer que

$$V(x) = \int_0^\infty ||e^{At}x||^2 dt$$

est une fonction de Lyapunov à l'origine pour le système (Eq 4).
Indication : utiliser le résultat suivant : si $-\alpha < 0$ est strictement plus grand que les parties réelles de toutes les valeurs propres de A alors

$$||e^{At}x|| \leq Ce^{-\alpha t}||x||, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$