

Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Equations différentielles 1
Master 1, EDP et applications
2019-2020

EXAMEN DE RATTRAPAGE

Exercice 1. Soient f une fonction de classe C^1 définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R}_+ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

(1) Supposons que f ne s'annule pas et que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{f(\tau)} d\tau < +\infty.$$

Montrer que le problème de Cauchy

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (\text{Eq-1})$$

admet une solution unique maximale définie sur $]t_0 - T_*, t_0 + T^*[$, où

$$T_* = t_0 - \int_{-\infty}^{x_0} \frac{1}{f(\tau)} d\tau, \quad T^* = t_0 + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{f(\tau)} d\tau.$$

(Observer qu'on peut écrire $\frac{x'(t)}{f(x(t))} = 1$, car f ne s'annule pas).

(2) Supposons maintenant que f s'annule en un unique point noté α . Montrer que l'intervalle de définition de la solution maximale du problème (Eq-1) n'est pas majoré si $x_0 < \alpha$ et n'est pas minoré si $x_0 > \alpha$. (Rappelons que f est à valeurs dans \mathbb{R}_+).

Exercice 2. Considérons l'EDO du second ordre

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + x(t) - \frac{1}{2}x^2(t) = 0, \quad (\text{Eq-2})$$

(1) Trouver une intégrale première pour l'EDO (Eq-2).

(2.1) Ecrire (Eq-2) sous forme d'un système d'EDO d'ordre un, sous la forme

$$\frac{d}{dt}(x_1(t), x_2(t)) = (F_1(x_1(t), x_2(t)), F_2(x_1(t), x_2(t))). \quad (\text{Eq-3})$$

(2.2) Déterminer les points critiques associés à (Eq-3) et préciser leurs natures.

(2.3) Représenter l'allure des courbes à niveau de l'intégrale première associée à (Eq-2), puis déduire le portrait de phase pour (Eq-3).

Exercice 3. Utiliser les coordonnées polaires pour montrer que le système d'EDO d'ordre un

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = x(t) - y(t) - 2x(t)(x^2(t) + y^2(t)) \\ \frac{d}{dt}y(t) = x(t) + y(t) - y(t)(x^2(t) + y^2(t)) \end{cases} \quad (\text{Eq-4})$$

admet un seul cycle limite à l'origine.

Remarque Veuillez m'envoyer vos réponses au mail h.meddour@univ-batna2.dz