جامعة باتنة ٢ كلية الرياضيات و الاعلام الالي قسم الرياضيات

Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Master 1- EDP et Applications
Module : Equations différentielles ordinaires 2

EXAMEN DE RATTRAPAGE
DURÉE D'EXAMEN : 1H 30

Exercice 1. On considére le système de Lotka-Volterra :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}N(t) = N(t)\big(a - bP(t)\big), & t \in \mathbb{R}_+ \\ \frac{d}{dt}P(t) = P(t)\big(cN(t) - d\big) \end{cases} \tag{I}$$

où a, b, c et d sont des constantes strictement positives.

(1) Déterminer les points critiques du système (I), linéariser le système à l'origine puis déduire sa nature.

(2) Montrer que l'ensemble $\Omega = \{(N,P) \in \mathbb{R}^2 : N > 0, P > 0\}$ est invariant par le système (I), c-à-d pour toute solution $\big(N(t), P(t)\big)$ de donnée initiale $N(0) > 0$ et $P(0) > 0$ alors $N(t) > 0$ et $P(t) > 0$ pour tout t.

(3) Déterminer une intégrale première pour le système (I) sous forme

$$E(t) = F(N(t)) + G(P(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

où F et G sont deux fonctions à déterminer.

(4) Déduire que toutes les solutions pour lesquelles $N(0) > 0$ et $P(O) > 0$ sont périodiques.

Exercice 2. Considérons le système de Van Der Pol

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = y(t) - x(t) + x^3(t), & t \in \mathbb{R}_+ \\ \frac{d}{dt}y(t) = -x(t) \end{cases} \tag{II}$$

(1) Montrer que $V(x,y) = x^2 + y^2$ est une fonction de Lyapunov à l'origine pour le système (II) dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$ à déterminer .

(2) Montrer que l'ensemble $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \subset \Omega$ est invariant par le flot associé au système de Van Der Pol (II).

(3) Montrer que pour tout $(x_0, y_0) \in \Omega$, la solution $(x(t), y(t))$ de (II) telle que $x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$, tend vers $(0,0)$ quand $t \to +\infty$. Que peut-on déduire ?