Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Master 1- EDP et applications
Module : EDO 1
2020 - 2021

Travaux Dirigés (1)

Exercice 1. Considérons le problème de Cauchy :

$$x'(t) = -x(t) + \alpha(t)x^2(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0, \tag{I}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $|\alpha(t)| \leq 1$ pout tout $t \in [0, +\infty[$.
Le but de cet exercice est de montrer que si $|x_0| < 1$, la solution maximale de (I) est définie sur $[0, +\infty[$. Pour cela, notons $[0, T^+[$ le domaine de définition de la solution maximale de (I) et supposons que $T^+ < +\infty$.
Posons $|x_0| = 1 - \delta, \quad \delta \in]0, 1[$. Soit $\delta_0 \in]0, \delta[$. On introduit l'ensemble

$$A = \{T \in [0, T^+[: |x(t)| \leq 1 - \delta_0, \quad t \in [0, T^+[\}.$$

On se propose de montrer que $A = [0, T^+[$.

(1) Montrer à partir de (I) que

$$x(t) = e^{-t}x_0 + \int_0^t e^{-(t-s)}\alpha(s)x^2(s)ds, \quad t \in [0, T^+[.$$

(2) Montrer que $0 \in A$ et que A est un intervalle.
On pose $A = [0, a)$, et supposons que $a < T^+$.

(3) Montrer, en utilisant la question (2) ainsi que l'inégalité de Gronwall, que pour $T \in A$ on a

$$|x(t) \leq |x_0|e^{-\delta_0 t}, \quad t \in [0, T].$$

(4) Montrer que $|x(t)| \leq 1 - \delta$ pour tout $t \in [0, a]$ et déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ telle que $a + \varepsilon \in A$.

(5) Conclure que $T^+ = +\infty$.

(6) Montrer que la solution maximale de (I) vérifie

$$|x(t)| \leq |x_0|e^{-\delta_0 t}, \quad t \in [0, +\infty[.$$

Exercice 2. Considérons le problème de Cauchy :

$$x'(t) = -\nabla f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in \mathbb{R}\mathbb{R}^N, \tag{II}$$

où $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^N$ vérifiant $lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$

(1) Montrer que (II) admet une solution unique maximale définie sur $]T_-, T^+[$.

(2) Montrer que f est décroissante.

(3) Déduire que $T^* = +\infty$.

(4) Considérons le cas $N = 1$ et prenons la fonction $f(x) = \frac{x^4}{4}$. Montrer qu'on peut avoir $T_* > -\infty$.

Exercice 3. Considérons le problème de Cauchy

$$x'(t) = \big(1 + cos\, t\big)x(t) - x^3(t), \quad x(t_0) = x_0. \tag{III}$$

(1) Montrer que (III) admet une solution unique maximale $\phi(\cdot) \in C^1$ définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\phi(t_0) = x_0$.

(2) Montrer que s'il existe $t_1 \in J$ telle que $\phi(t_1) = 0$ alors forcément on a $\phi(t) = 0$ pour tout $t \in J$.

(3) Montrer que $\phi'(t) < 2\phi(t), \quad \forall t \in J$ et déduire que $\phi(t) \leq \phi(0)e^{2t}, \quad \forall t \in J$.

(4) Montrer que la solution maximale $\phi(\cdot)$ de (III) est globale sur $\mathbb{R}_+$.

(5) On note $\psi(t, x(t))$ le flot associe à (I) en $t_0 = 0$ et $P(s) = \psi(s, 2\pi), \quad \forall s \in \mathbb{R}_+$.

(5.1) Calculer $P(0)$ et $P'(0)$ puis montrer que $P(\cdot)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$P'(s) = e^{-4\pi}\big(\frac{P(s)}{s}\big)^3.$$

(5.2) Déduire à partir d'une solution de cette EDO, qu'une solution de (III) est 2π- périodique à valeurs strictement positives.

Exercice 4. Considérons le problème de Cauchy :

$$x'(t) = \lambda + a(t)x^2(t), \quad x(0) = 0, \quad t > 0, \tag{IV}$$

où $\lambda > 0$ et $a(\cdot)$ est une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle qu'il existe $\alpha_0 > 0$, pour tout $T > 0$, on a

$$\sup_{t \in]0,T]} \frac{1}{t}\int_0^t s^2 a(s)ds < \alpha_0.$$

(1) Montrer que (IV) admet une solution maximale définie sur un intervalle $[0, T^+[$.
$Supposonsdanscequitsuitque \mathrm{T}^+ < +\infty$.

(2) Pout $T < T^+$, on pose

$$M(t) = \begin{cases} \lambda, & \text{si} \quad t = 0 \\ \sup_{s\in]0,t]} \frac{x(s)}{s}, & \text{si} \quad t \in]0, T]. \end{cases}$$

(2.1) Montrer que M est continue de $[0, T] dans \mathrm{R}_+$. Que peut-on dire de $M([0, T)]$?

(2.2) En transformant l'équation (IV) en une équation intégrale, montrer qu'il existe une constante $\mu \in]0, \alpha_0[$ telle que

$$M(t) \leq \lambda + \mu M^2(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

(2.3) Dédiure que pour tout $t \in [0, T]$, on a
$M(t) \leq \frac{1-\sqrt{1-4\mu\lambda}}{2\mu}$ ou bien $M(t) \geq \frac{1+\sqrt{1-4\mu\lambda}}{2\mu}$.

(2.4) Déduire de (1) que

$$M(t) \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 4\mu\lambda}}{2\mu}, \quad \forall t \in [0, T].$$

(2.4) Conclure que $T^+ = +\infty$.