Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Master -1- EDP et applications
Module : **EDO 1**
2021 - 2022

Travaux Dirigés (1)

Exercice 1.

(1) Donner les solutions maximales des problèmes de Cauchy suivants

$$x'(t) = x^3(t), x(0) = 0 \quad \text{et} \quad x'(t) = \frac{1}{x(t)}, x(0) = 1$$

(2) Montrer que toute solution maximale du problème de Cauchy

$$x'(t) = t\sqrt{t^2 + x^2(t)}, \quad x(t_0) = x_0$$

est globale.

Exercice 2.

Vérifier le théorème d'existence et unicité pour les problèmes de Cauchy suivant

$$x'(t) = \frac{1}{x^2(t)}, x(1) = 0 \quad \text{et} \quad x'(t) = tx(t) + e^{-x(t)}, x(t_0) = x_0$$

Exercice 3.

Considérons l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1. Supposons que ϕ et ψ sont deux solutions de cette équation telle qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ avec

$$\phi(t_0) < \psi(t_0)$$

Montrer alors que

$$\phi(t) < \psi(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Indication : Utiliser le raisonnement par absurde.

Exercice 4.

Considérons l'équation différentielle

$$x'(t) = (a - x(t))(b - x(t)),$$

où a et b sont deux constantes réelles avec $a \leq b$.

(1) Montrer que pour toute donnée initiale $x_0 \in \mathbb{R}$ fixée, cette équation admet une solution unique maximale $x(\cdot)$ telle que $x(0) = x_0$.

(2) que vaut cette solution si $x_0 = a$ ou $x_0 = b$?

(3) Supposons que $a = b$.
Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle. Tracer l'allure de ces solutions en fonctions de a et x_0.

(4) Supposons que $a = 1$, $b = 2$, $x_0 \neq a$ et $x_0 \neq b$.
Déterminer dans cas la solution en fonction de $x(0) = x_0$ puis tracer l'allure de la solution en fonction de x_0.

Solutions

Exercice 1.

(1) Donner les solutions maximales des problèmes de Cauchy suivants

$$x'(t) = x^3(t), x(0) = 0 \quad \text{et} \quad x'(t) = \frac{1}{x(t)}, x(0) = 1$$

— La fonction $f(x) = x^3$ est localement lipschitzienne, par conséquent le problème de Cauchy associé admet une solution unique maximale $x(t)$, $t \in J \subset \mathbb{R}$. Supposons que cette solution ne s'annule pas pour tout t, alors

$$\frac{x'(t)}{x^3(t) = 1}.$$

Par intégration sur $[t_0, t]$, on trouve

$$\frac{-1}{2x^2(t)} + \frac{1}{2x^2(t_0)} = t - t_0.$$

Alors

$$x^2(t) = \frac{x^2(t_0)}{1 - 2x^2(t_0)(t - t_0)}.$$

D'après la condition initiale $x(0) = 0$, in vient que $x^2(t) = 0$.
Par suite, la fonction nulle $x(t) = 0, \forall t$ est la solution maximale unique vérifiant la condition initiale $x(0) = 0$.

— La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est localement lipschitzienne, par conséquent le problème de Cauchy associé admet une solution unique maximale $x(t), t \in J \subset \mathbb{R}$. Supposons que cette solution ne s'annule pas pour tout t, alors

$$x'(t)x(t) = 1.$$

Par intégration sur $[t_0, t]$, on trouve

$$x^2(t) - x^2(t_0) = t - t_0$$

D'où

$$x^2(t) = x^2(t_0) + 2(t - t_0).$$

Mais $x(0) = 1$, donc $x(t) = \sqrt{1 + 2t}$ est la solution unique maximale de ce problème de Cauchy avec $x(0) = 1$.

(2) Montrer que toute solution maximale du problème de Cauchy

$$x'(t) = t\sqrt{t^2 + x^2(t)}, \quad x(t_0) = x_0$$

est globale.

— Posons $f(t,x) = t\sqrt{t^2 + x^2}$ et montrons que cette fonction est globalement lipschitzienne. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on ait

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| = |t(\sqrt{t^2 + x^2} - \sqrt{t^2 + y^2})| &\leq |t| \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{t^2 + x^2} + \sqrt{t^2 + y^2}} \\ &\leq |t| \frac{|x| + |y|}{\sqrt{t^2 + x^2} + \sqrt{t^2 + y^2}} |x - y| \\ &\leq |t||x - y|. \end{aligned}$$

Cela veut dire que f est globalement lipschitzienne de rapport de lipschitz $k(t) = |t|, \forall t \in \mathbb{R}$.
Par le biais du thèorème de Cauchy Lipschitz (des solutions globales), le problème ci-dessus admet une solution unique globale.

Exercice 2.

Vérifier le théorème d'existence et unicité pour les problèmes de Cauchy suivant

$$x'(t) = \frac{1}{x^2(t)}, x(1) = 0 \quad \text{et} \quad x'(t) = tx(t) + e^{-x(t)}, x(t_0) = x_0.$$

— En intégrant $x'(t)x^2(t) = 1$ sur $[t_0, t]$, on trouve

$$x^3(t) = x^3(t_0) + 3(t - t_0).$$

Doù

$$x(t) = \left(x^3(t_0) + 3(t - t_0)\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Mais $x(1) = 0$, d'où une solution générale est

$$x(t) = \left(3(t-1)\right)^{\frac{1}{3}}.$$

On démontre maintenant que ce problème ne vérifie pas les conditions d'existence et unicité. En revanche, si on pose $f(t,x) = \frac{1}{x^2}$, alors on remarque f et sa dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{2x}$ sont discontinues sur l'axe (Ox) au point $(t_0, 0)$ et ne sont pas bornées pour $x \to 0$.

— On pose $f(t,x) = tx + e^{-x}$.
Il est clair que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et que $\frac{\partial f}{\partial x} = t - e^{-x}$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquent ce problème admet une solution unique maximale $x(t)$, $t \in J \subset \mathbb{R}$.

Exercice 3.

Considérons l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1. Supposons que ϕ et ψ sont deux solutions de cette équation telle qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ avec

$$\phi(t_0) < \psi(t_0)$$

Montrer alors que

$$\phi(t) < \psi(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Indication : Utiliser le raisonnement par absurde.

— Supposons quil existe $a \in \mathbb{R}$ telle que

$$\phi(a) \geq \psi(a)$$

Comme les deux solutions ϕ et psi sont continues (en effet elle sont de classe C^2 car f est de classe C^1)., alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $b \in \mathbb{R}$ telle que

$$\phi(b) = \psi(b).$$

Mais on déduit l'unicité de solution au problème de Cauchy au point b d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (qui s'applique car $f \in C^1$ sur le convexe $\mathbb{R}^2$).
Il vient que

$$\phi(t) = \psi(t), \forall t$$

Ce qui est absurde car $\phi(t_0) < \psi(t_0)$.

Exercice 4.

Considérons l'équation différentielle

$$x'(t) = (a - x(t))(b - x(t)),$$

où a et b sont deux constantes réelles avec $a \leq b$.

(1) Montrer que pour toute donnée initiale $x_0 \in \mathbb{R}$ fixée, cette équation admet une solution unique maximale $x(\cdot)$ telle que $x(0) = x_0$.

— On pose $f(x) = (a-x)(b-x)$. Il est clair que f est continue et de classe C^1 sur le convexe $\mathbb{R}$. Donc, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique, c-à-d, ce problème admet une solution nunique maximale $x(t), t \in \mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale $x(0) =_0$, avec $x_0 \in \mathbb{R}$.

(2) que vaut cette solution si $x_0 = a$ ou $x_0 = b$?
— Si $x_0 = a$ ou $x_0 = b$ alors, la solution est la fonction constante
$$x(t) = x_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(3) Supposons que $a = b$. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle. Tracer l'allure de ces solutions en fonctions de a et x_0.
— Si $a = b$ alors $x'(t) = (a - x(t))^2$. On peut diviser par (a-x(t))^2 car si $x_0 \neq a$ alors
$$x(t) \neq a, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
Par suite on peut écrire
$$\frac{x'(t)}{(a-x(t))^2} = 1$$
Par intégration sur $[t_0, t]$:
$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{(a-x(s))^2} ds = \int_{t_0}^{t} ds.$$
D'où
$$\frac{-1}{a-x(t)} + \frac{1}{a-x(t_0)} = t - t_0$$
Alors
$$x(t) = a - \frac{a-x(t_0)}{1-(a-x(t_0))(t-t_0)}.$$
Mais $x(0) = x_0$, alors une solution est
$$x(t) = a - \frac{a-x_0}{1-(a-xt_0)t}.$$
Pour tracer l'allure des solutions $x(t)$, on étudie la dérivée $x'(t)$.
Mais $x'(t) = (a-x(t))^2$, donc on va étudier la fonction $f(x) = (a-x)^2$.
On a $f'(x) = -2(a-x)$, d'ou f est croissante si $x < a$ et décroissante si $x > a$.

(4) Supposons que $a = 1$, $b = 2$, $x_0 \neq a$ et $x_0 \neq b$.
Déterminer dans cas la solution en fonction de $x(0) = x_0$ puis tracer l'allure de la solution en fonction de x_0.
— Dans ce cas $x'(t) = (1-x(t))(2-x(t))$ avec $x_0 \neq 1$ et $x_0 \neq 2$. D'où
$$\frac{x'(t)}{(1-x(t))(2-x(t))} = 1.$$
On remarque que
$$\frac{x'(t)}{(1-x(t))(2-x(t))} = x'(t)\left(\frac{1}{1-x(t)} - \frac{1}{2-x(t)}\right).$$
Alors, si on intègre sur $[t_0, t]$, on obtient
$$-\ln|1-x(t)| + \ln|1-x(t_0)| + \ln|2-x(t)| - \ln|2-x(t_0)| = t - t_0.$$
Mais $x(0) = x_0$, alors
$$\ln\left|\frac{1-x_0}{1-x(t)}\right| + \ln\left|\frac{2-x(t)}{2-x_0}\right| = t$$
D'où
$$\left|\frac{1-x_0}{1-x(t)} \frac{2-x(t)}{2-x_0}\right| = e^t.$$

Par suite, une solution $x(t)$ vérifie que

$$\left|\frac{2-x(t)}{1-x(t)}\right| = \left|\frac{2-x_0}{1-x_0}\right| e^t.$$

Pour tracer l'allure de la solution il faut tout d'abord discuter pour éliminer la valeur absolue. Soit alors J l'intervalle d'existence de la solution maximale. On va étudier les cas suivants :

(A) Si $1 < x_0 < 2$, alors pour tout $t \in J$, $1 < x(t) < 2$, et par conséquent

$$\frac{2-x(t)}{1-x(t)} = \frac{2-x_0}{1-x_0} e^t.$$

D'où

$$x(t) = \frac{2 - \frac{2-x_0}{1-x_0} e^t}{1 - \frac{2-x_0}{1-x_0} e^t} = \frac{2 - 2x_0 - (2-x_0)e^t}{1 - x_0 - (2-x_0)e^t}.$$

On remarque que dans ce cas, la solution $x(t)$ est définie sur $\mathbb{R}$, de plus $x(t)$ est décroissante et $\lim_{t\to+\infty} = 1$, $\lim_{t\to-\infty} = 2$.

(B) Faire une étude analogue pour les deux cas $x_0 < 1$ et $x_0 > 2$.