Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

3ème année- LMD
Module : Initiation aux EDP
2022 - 2023

TRAVAUX DIRIGÉS (1)

Exercice 1.

(1) Montrer que la boule unité $\mathbb{B}(0,1)$ de $\mathbb{R}^n$, est un domaine régulier de classe C^k, $k \geq 1$. De plus montrer que le vecteur unitaire sortant vers l'exterieur de la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ en un point $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ est donné par

$$\vec{n} = \frac{x}{\|x\|}.$$

(2) Même question pour le demi espace supérieur $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Dans ce cas

$$\vec{n} = (0, \cdots, 0, -1).$$

(3) Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur l'ouvert borné Ω. Le graphe de la fonction f est donné par l'ensemble $\Gamma = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \Omega\}$. Déterminer le vecteur normal unitaire sortant de l'extérieur de la surface Γ.

Exercice 2. Considérons le champ de vecteurs dans la plan $\mathbb{R}^2$

$$\vec{F}(x, y) = (2xy^2 - y)\vec{i} + (2x^2y - x)\vec{j}.$$

(1) Calculer le rotationnel de $\vec{F}$, c-à-d

$$\text{rot}\,(\vec{F}) = \nabla \wedge \vec{F},$$

où $\wedge$ représente le produit vectoriel.
Déduire que $\vec{F}$ est un champ de gradient et qu'il est dérivé d'un potentiel, c-à-d qu'il existe une fonction régulière $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\vec{F} = \nabla P$.

(2) Montrer que la circulation de $\vec{F}$ le long du demi cercle $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4, y \geq 0\}$ contenu dans le demi plan d'équation $z = 0$ est nulle, c-à-d

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = 0,$$

avec $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$.

(3) Calculer la divergence de $\vec{F}$. Est-ce que F est le rotationnel d'un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$?

(4) Soit V le cube de $\mathbb{R}^3$ de côtés $[0, 1]$, orienté par les vecteurs normaux sortant vers l'éxterieur du cube. Calculer le flux de $\vec{F}$ à travers ∂V en utilisant le théorème de divergence de Gauss.

Exercice 3. Le but de cet exercice est de calculer le flux du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x, y, z) = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$$

sortant de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ notée $\mathbb{S}^2$, où

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

(1) En utilisant la formule de divergence de Gauss, montrer que le calcul de ce flux peut se ramener au calcul de l'intégrale triple
$$\int_{\mathbb{B}(0,1)} 3(x^2+y^2+z^2)dxdydz,$$
où $\mathbb{B}(0,1)$ est la boule unité de $\mathbb{R}^3$.

(2) En faisant un passage aux coordonnées sphériques
$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\Phi, \\ y = r\sin\theta\sin\Phi, \\ z = r\cos\Phi, \end{cases}$$
avec $0 < r < 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq \Phi \leq \pi$, montrer que
$$\int_{\mathbb{B}(0,1)} 3(x^2+y^2+z^2)dxdydz = \frac{12}{5}\pi.$$

Exercice 4. **Définition des coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^n$.** Pour $\mathbb{S}^{n-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, on définit la mesure surfacique $d\sigma$ de $\mathbb{S}^{n-1}$ telle que $dx = drdS = r^{n-1}drd\sigma$. On note alors $\Sigma_n = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\sigma$ la surface de la sphère unité, et par suite le volume de la boule unité $\mathbb{B}(0,1)$ est $\frac{\Sigma_n}{n}$.
Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $x = r\sigma$ où $r = \|x\| \in \mathbb{R}_+$ et $\sigma = \frac{x}{\|x\|} \in \mathbb{S}^{n-1}$. On dit que (r,σ) forment les coordonnées polaires de x.

(1) Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction radiale, c-à-d pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $u(x) = u(\|x\|)$. Montrer que le Laplacien de u est donné par l'expression suivante
$$\Delta u(r) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r) + \frac{n-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}(r),$$
avec $r = \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

(2) On appelle **radialisée** de u, la fonction $\tilde{u}$ définie par
$$\tilde{u}(r) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(r\sigma)d\sigma.$$
Montrer que la radialisation comute avec le Laplacien, c-à-d
$$\Delta\tilde{u} = \widetilde{\Delta u} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (\Delta u)(r\sigma)d\sigma.$$
Indication : Poser $\tilde{u}(x) = v(\|x\|) = v(r)$ et utiliser l'expression du Laplacien en coordonnées polaires.

(3) Ecrire l'expression du Laplacien en coordonnées polaires pour $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.
Indication : Ici u n'est pas supposée radiale, alors on peut écrire en coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$:
$$u(x) = u(r\cos\theta, r\sin\theta).$$