Travaux Dirigés (1)

Exercice 1.

(1) Donner les solutions maximales des problèmes de Cauchy suivants

$$x'(t) = x^3(t), x(0) = 0 \quad \text{et} \quad x'(t) = \frac{1}{x(t)}, x(0) = 1$$

(2) Montrer que toute solution maximale du problème de Cauchy

$$x'(t) = t\sqrt{t^2 + x^2(t)}, \quad x(t_0) = x_0$$

est globale.

Exercice 2.

Vérifier le théorème d'existence et unicité pour les problèmes de Cauchy suivant

$$x'(t) = \frac{1}{x^2(t)}, x(1) = 0 \quad \text{et} \quad x'(t) = tx(t) + e^{-x(t)}, x(t_0) = x_0$$

Exercice 3.

Considérons l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1. Supposons que ϕ et ψ sont deux solutions de cette équation telle qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ avec

$$\phi(t_0) < \psi(t_0)$$

Montrer alors que

$$\phi(t) < \psi(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Indication : Utiliser le raisonnement par absurde.

Exercice 4.

Considérons l'équation différentielle

$$x'(t) = (a - x(t))(b - x(t)),$$

où a et b sont deux constantes réelles avec $a \leq b$.

(1) Montrer que pour toute donnée initiale $x_0 \in \mathbb{R}$ fixée, cette équation admet une solution unique maximale $x(\cdot)$ telle que $x(0) = x_0$.

(2) que vaut cette solution si $x_0 = a$ ou $x_0 = b$?

(3) Supposons que $a = b$.
Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle. Tracer l'allure de ces solutions en fonctions de a et x_0.

(4) Supposons que $a = 1$, $b = 2$, $x_0 \neq a$ et $x_0 \neq b$.
Déterminer dans cas la solution en fonction de $x(0) = x_0$ puis tracer l'allure de la solution en fonction de x_0.

Solutions

Exercice 1.

(1) Donner les solutions maximales des problèmes de Cauchy suivants

$$x'(t) = x^3(t), x(0) = 0 \quad \text{et} \quad x'(t) = \frac{1}{x(t)}, x(0) = 1$$

— La fonction $f(x) = x^3$ est localement lipschitzienne, par conséquent le problème de Cauchy associé admet une solution unique maximale $x(t)$, $t \in J \subset \mathbb{R}$. Supposons que cette solution ne s'annule pas pour tout t, alors

$$\frac{x'(t)}{x^3(t) = 1}.$$

Par intégration sur $[t_0, t]$, on trouve

$$\frac{-1}{2x^2(t)} + \frac{1}{2x^2(t_0)} = t - t_0.$$

Alors

$$x^2(t) = \frac{x^2(t_0)}{1 - 2x^2(t_0)(t - t_0)}.$$

D'après la condition initiale $x(0) = 0$, in vient que $x^2(t) = 0$.
Par suite, la fonction nulle $x(t) = 0, \forall t$ est la solution maximale unique vérifiant la condition initiale $x(0) = 0$.

— La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est localement lipschitzienne, par conséquent le problème de Cauchy associé admet une solution unique maximale $x(t), t \in J \subset \mathbb{R}$. Supposons que cette solution ne s'annule pas pour tout t, alors

$$x'(t)x(t) = 1.$$

Par intégration sur $[t_0, t]$, on trouve

$$x^2(t) - x^2(t_0) = t - t_0$$

D'où

$$x^2(t) = x^2(t_0) + 2(t - t_0).$$

Mais $x(0) = 1$, donc $x(t) = \sqrt{1 + 2t}$ est la solution unique maximale de ce problème de Cauchy avec $x(0) = 1$.

(2) Montrer que toute solution maximale du problème de Cauchy

$$x'(t) = t\sqrt{t^2 + x^2(t)}, \quad x(t_0) = x_0$$

est globale.

— Posons $f(t, x) = t\sqrt{t^2 + x^2}$ et montrons que cette fonction est globalement lipschitzienne. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on ait

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| = |t(\sqrt{t^2 + x^2} - \sqrt{t^2 + y^2})| &\leq |t| \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{t^2 + x^2} + \sqrt{t^2 + y^2}} \\ &\leq |t| \frac{|x| + |y|}{\sqrt{t^2 + x^2} + \sqrt{t^2 + y^2}} |x - y| \\ &\leq |t||x - y|. \end{aligned}$$

Cela veut dire que f est globalement lipschitzienne de rapport de lipschitz $k(t) = |t|, \forall t \in \mathbb{R}$.
Par le biais du thèorème de Cauchy Lipschitz (des solutions globales), le problème ci-dessus admet une solution unique globale.

Exercice 2.

Vérifier le théorème d'existence et unicité pour les problèmes de Cauchy suivant
$$x'(t) = \frac{1}{x^2(t)}, x(1) = 0 \quad \text{et} \quad x'(t) = tx(t) + e^{-x(t)}, x(t_0) = x_0.$$

— En intégrant $x'(t)x^2(t) = 1$ sur $[t_0, t]$, on trouve
$$x^3(t) = x^3(t_0) + 3(t - t_0).$$
Doù
$$x(t) = \left(x^3(t_0) + 3(t - t_0)\right)^{\frac{1}{3}}.$$
Mais $x(1) = 0$, d'où une solution générale est
$$x(t) = \left(3(t - 1)\right)^{\frac{1}{3}}.$$
On démontre maintenant que ce problème ne vérifie pas les conditions d'existence et unicité.
En revanche, si on pose $f(t,x) = \frac{1}{x^2}$, alors on remarque f et sa dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{2x}$ sont discontinues sur l'axe (Ox) au point $(t_0, 0)$ et ne sont pas bornées pour $x \to 0$.

— On pose $f(t,x) = tx + e^{-x}$.
Il est clair que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et que $\frac{\partial f}{\partial x} = t - e^{-x}$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquent ce problème admet une solution unique maximale $x(t)$, $t \in J \subset \mathbb{R}$.

Exercice 3.

Considérons l'équation différentielle
$$x'(t) = f(t, x(t)),$$
où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1. Supposons que ϕ et ψ sont deux solutions de cette équation telle qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ avec
$$\phi(t_0) < \psi(t_0)$$
Montrer alors que
$$\phi(t) < \psi(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$
Indication : Utiliser le raisonnement par absurde.

— Supposons quil existe $a \in \mathbb{R}$ telle que
$$\phi(a) \geq \psi(a)$$
Comme les deux solutions ϕ et psi sont continues (en effet elle sont de classe C^2 car f est de classe C^1)., alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $b \in \mathbb{R}$ telle que
$$\phi(b) = \psi(b).$$
Mais on déduit l'unicité de solution au problème de Cauchy au point b d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (qui s'applique car $f \in C^1$ sur le convexe $\mathbb{R}^2$).
Il vient que
$$\phi(t) = \psi(t), \forall t$$
Ce qui est absurde car $\phi(t_0) < \psi(t_0)$.

Exercice 4.

Considérons l'équation différentielle
$$x'(t) = (a - x(t))(b - x(t)),$$
où a et b sont deux constantes réelles avec $a \leq b$.

(1) Montrer que pour toute donnée initiale $x_0 \in \mathbb{R}$ fixée, cette équation admet une solution unique maximale $x(\cdot)$ telle que $x(0) = x_0$.

— On pose $f(x) = (a-x)(b-x)$. Il est clair que f est continue et de classe C^1 sur le convexe $\mathbb{R}$. Donc, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique, c-à-d, ce problème admet une solution nunique maximale $x(t), t \in \mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale $x(0) =_0$, avec $x_0 \in \mathbb{R}$.

(2) que vaut cette solution si $x_0 = a$ ou $x_0 = b$?
— Si $x_0 = a$ ou $x_0 = b$ alors, la solution est la fonction constante

$$x(t) = x_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(3) Supposons que $a = b$. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle. Tracer l'allure de ces solutions en fonctions de a et x_0.
— Si $a = b$ alors $x'(t) = (a - x(t))^2$. On peut diviser par (a-x(t))^2 car si $x_0 \neq a$ alors

$$x(t) \neq a, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Par suite on peut écrire

$$\frac{x'(t)}{(a-x(t))^2} = 1$$

Par intégration sur $[t_0, t]$:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{(a-x(s))^2} ds = \int_{t_0}^{t} ds.$$

D'où

$$\frac{-1}{a-x(t)} + \frac{1}{a-x(t_0)} = t - t_0$$

Alors

$$x(t) = a - \frac{a - x(t_0)}{1 - (a - x(t_0))(t - t_0)}.$$

Mais $x(0) = x_0$, alors une solution est

$$x(t) = a - \frac{a - x_0}{1 - (a - xt_0)t}.$$

Pour tracer l'allure des solutions $x(t)$, on étudie la dérivée $x'(t)$.
Mais $x'(t) = (a - x(t))^2$, donc on va étudier la fonction $f(x) = (a-x)^2$.
On a $f'(x) = -2(a-x)$, d'ou f est croissante si $x < a$ et décroissante si $x > a$.

(4) Supposons que $a = 1$, $b = 2$, $x_0 \neq a$ et $x_0 \neq b$.
Déterminer dans cas la solution en fonction de $x(0) = x_0$ puis tracer l'allure de la solution en fonction de x_0.
— Dans ce cas $x'(t) = (1 - x(t))(2 - x(t))$ avec $x_0 \neq 1$ et $x_0 \neq 2$. D'où

$$\frac{x'(t)}{(1-x(t))(2-x(t))} = 1.$$

On remarque que

$$\frac{x'(t)}{(1-x(t))(2-x(t))} = x'(t)\left(\frac{1}{1-x(t)} - \frac{1}{2-x(t)}\right).$$

Alors, si on intègre sur $[t_0, t]$, on obtient

$$-\ln|1-x(t)| + \ln|1-x(t_0)| + \ln|2-x(t)| - \ln|2-x(t_0)| = t - t_0.$$

Mais $x(0) = x_0$, alors

$$\ln\left|\frac{1-x_0}{1-x(t)}\right| + \ln\left|\frac{2-x(t)}{2-x_0}\right| = t$$

D'où

$$\left|\frac{1-x_0}{1-x(t)} \frac{2-x(t)}{2-x_0}\right| = e^t.$$

Par suite, une solution $x(t)$ vérifie que

$$|\frac{2-x(t)}{1-x(t)}| = |\frac{2-x_0}{1-x_0}|e^t.$$

Pour tracer l'allure de la solution il faut tout d'abord discuter pour éliminer la valeur absolue. Soit alors J l'intervalle d'existence de la solution maximale. On va étudier les cas suivants :

(A) Si $1 < x_0 < 2$, alors pour tout $t \in J$, $1 < x(t) < 2$, et par conséquent

$$\frac{2-x(t)}{1-x(t)} = \frac{2-x_0}{1-x_0}e^t.$$

D'où

$$x(t) = \frac{2 - \frac{2-x_0}{1-x_0}e^t}{1 - \frac{2-x_0}{1-x_0}e^t} = \frac{2-2x_0-(2-x_0)e^t}{1-x_0-(2-x_0)e^t}.$$

On remarque que dans ce cas, la solution $x(t)$ est définie sur $\mathbb{R}$, de plus $x(t)$ est décroissante et $\lim_{t\to+\infty} = 1$, $\lim_{t\to-\infty} = 2$.

(B) Faire une étude analogue pour les deux cas $x_0 < 1$ et $x_0 > 2$.

Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Master -1- EDP et applications
Module : **EDO 1**
2021 - 2022

Travaux Dirigés (2)

Exercice 1. On cherche à analyser le phénomène de la vague solitaire, ou soliton. Le problème est modélisé comme un long canal considéré comme unidimensionnel. La quantité intéressante est le profil $u(\cdot,\cdot)$ de la surface de l'eau, qui est une fonction du temps t et de la position x le long du canal. Ce profil est mesuré par rapport à la hauteur h de l'eau au repos. Il satisfait l'équation aux dérivées partielles dite de Korteweg–de Vries :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{\partial}{\partial x}\Big(hu + \frac{3}{4}u^2 + \frac{\sigma}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big), \tag{A}$$

où g est la constante de gravitation et $\sigma > 0$ est une constante (qui dépend de h, de g et de la tension superficielle). On appelle soliton, une solution $u(t,x)$ de l'équation aux dérivées partielles (A) telle que :

$$u(t,x) = z(s), \quad \text{où} \quad s = x - vt,$$

où v étant une constante (c'est la vitesse de la vague).
On suppose que $z(s)$ et toutes ses dérivées tendent vers 0 quand s tend vers l'infini.
Le but de l'exercice est de mettre en évidence l'existence de telles solution et de préciser la vitesse et l'amplitude de la vague.

(1) Montrer qu'un soliton $z(s)$ vérifie l'équation différentielle ordinaire

$$\sigma z''(s) = bz(s) - \frac{3}{2}z^2(s), \tag{A'}$$

où b est une constante.

(2) Ecrire (A') sous forme d'un système différentiel d'ordre un $X'(s) = f(X(s))$. Déterminer les équilibres de f et discuter leur stabilité en utilisant la méthode de linéarisation. Que peut-on dire sur l'existence de solitons ?

(3) Trouver une constante du mouvement, c'est-à-dire une intégrale première.

(4) Montrer que, si $b < 0$, il n'y a pas de soliton.

(5) Supposons $b > 0$. Montrer qu'il existe un unique soliton $u(t,x)$, tracer son orbite et déterminer son amplitude.

Exercice 2. L'évolution d'un circuit électrique d'intensité $i(t)$ et de potentiel $v(t)$ est décrite par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} L\frac{d}{dt}i(t) = v(t) - F(i(t)), \\ C\frac{d}{dt}v(t) = -i(t) \end{cases} \tag{B}$$

où $C > 0$, $L > 0$ et $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(1) Déterminer les points d'équilibres pour (B) et discuter la stabilité en fonction de $F'(0)$.

(2) Pour quelle condition, la fonction $E(i,v) = \frac{1}{2}(Li^2 + Cv^2)$ définie une intégrale première pour (B) ?

Exercice 3. Soit le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t), \quad t \geq 0 \\ y'(t) = \big(x(t) - y^2(t)\big)y(t), \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{C}$$

(1) Déterminer une solution générale pour (C).
(**Indication** : Voir que $\frac{dy}{dx} = -y + \frac{y^3}{x}$ puis utiliser le changement $u = \frac{1}{y^2}$).

(2) Montrer, en utilisant la définition, que le point d'équilibre $(0,0)$ de (C) est asymptotiquement stable.

Exercice 4. "Supplémentaire" On rencontre souvent le phénomène "prédateurs-proies" quand on veut étudier deux populations dont leurs croissances influent l'une sur l'autre. Ce phénomène est représenté par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)\big(1 - x_2(t)\big), & t \geq 0 \\ x_2'(t) = x_2(t)\big(x_1(t) - 1\big), & t \geq 0 \end{cases} \tag{D}$$

(1) Écrire (D) sous forme d'un système autonome $x'(t) = f(x(t))$.

(2) Vérifier que $E(x_1,x_2) = x_1x_2e^{-(x_1+x_2)}$ est une intégrale première pour (D).

(3) Soit (x_1^0,x_2^0) un point de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $x_1^0x_2^0 > 0$. Montrer que toute solution de (D) passant par le point (x_1^0,x_2^0) a une orbite telle que $x_1(t)x_2(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

(4) Déterminer les points d'équilibres pour (D), écrire le système linéarisé au voisinage de chaque point et déduire l'allure des trajectoires pour ce système.

Exercice 5. "Devoir" Dans un modèle d'économie de pure accumulation, on ne fait pas apparaître explicitement le travail, toute production étant accumulée. Le modèle est alors caractérisé par les fonctions de production des biens et par les coefficients de dépréciation des capitaux. Considérons alors un modèle comportant deux biens capitaux, 1 et 2. On note $Y_i(\cdot)$ la quantité de bien i produite et $k_i(\cdot)$ la quantité de bien i entrant comme capital dans la production. Les fonctions de production sont de la forme

$$\begin{cases} Y_1(t) = \lambda_1 k_1^{\alpha_1}(t) k_2^{\beta_1}(t), \\ Y_2(t) = \lambda_2 k_1^{\alpha_2}(t) k_2^{\beta_2}(t), \end{cases} \tag{E}$$

Avec les coefficients $\lambda_i, \alpha_i, \beta_i \in [0,1]$ et le coefficient de dépréciation du capital i est un réel $\rho_i \in [0,1]$. Les équations différentielles du système sont donc

$$\begin{cases} k_1'(t) = Y_1(t) - \rho_1 k_1(t), \\ k_2'(t) = Y_2(t) - \rho_2 k_2(t), \end{cases} \tag{F}$$

(1) Déterminer l'équilibre du système (F)

(2) Etudier sa stabilité par linéarisation.

(3) Considérons maintenant l'équation différentielle

$$\begin{cases} k_1'(t) = k_1(t)k_2(t) - k_1^3(t), \\ k_2'(t) = k_1(t)k_2(t) - k_2^3(t), \end{cases} \tag{G}$$

qui résulte d'un modèle micro-économique simplifié, les variables $k_1(\cdot)$ et $k_2(\cdot)$ pouvant représenter des stocks de capitaux. On étudie l'évolution des stocks de capitaux, que l'on suppose tous deux strictement positifs.

(3.1) Déterminer l'équilibre du système (G) puis étudier sa stabilité par linéarisation.

(3.2) Etudier le portrait de phase, et montrer que toute solution $k(t) = (k_1(t),k_2(t))$ de (G) a une limite quand $t \to +\infty$ puis que cette solution est asymptotiquement stable.