Cour 7

Mme Medouer Nawel

Théorie des probabilités

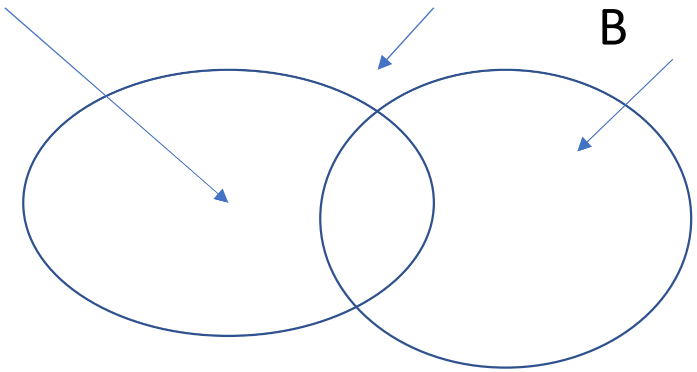
Vocabulaires des événements

Dans une expérience aléatoire, l'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles

- Un événement est une partie de Ω .
- Un événement élémentaire est un événement possédant un seul élément.
- Des événements $A\ et\ B$ sont disjoints ou exclusifs, ou incompatibles si et seulement si $A \cap B = \emptyset$
- L'événement contraire d'un événement A est l'ensemble des éléments de $\bar{A}$

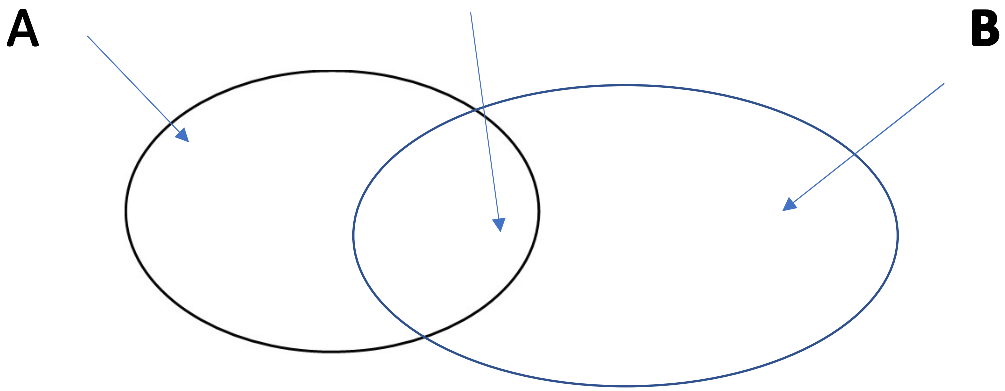
Logique des événements

A $\quad A \cup B = A\ est\ r\acute{e}lis\acute{e}\ \boldsymbol{OU}\ B\ est\ r\acute{e}alis\acute{e}$



$P(\overline{A \cup B})$= P$(\bar{A} \cap \bar{B})$

$A \cap B \ = A \ est \ Réalisé \ \boldsymbol{ET} \ B \ est \ réalisé$



$$P(\overline{A \cap B}) = \mathrm{P}(\bar{A} \cup \bar{B})$$

Définition axiomatique :

Définitions:

Soit Ω un univers fini.

$Soient\ les\ \acute{e}v\acute{e}nements\ A\ et\ B\ dans\ \Omega$

Axiome 1: $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$

Axiome2*:* La probabilité de l'événement certain est :

$$\mathrm{P}(\Omega) = 1$$

Axiome 3*: Pour tous événements A et B si* $A \cap B = \emptyset$, alors:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Conséquences:

1) $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$

2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Définition

La probabilité d'un événement A d'un univers fini Ω à été définie comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent

$P(A)$ *est une mesure, une valeur* $\mathbf{0 \leq \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) \leq 1}$

Attention !

Tout calcul conduisant à des probabilités négatives ou supérieures à 1 est faux.

Calcul des probabilités

Dans le cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{Nombre\ d'éléments\ de\ A}{Nombre\ d'éléments\ de\ \Omega}$$

$$P(A) = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ de\ cas\ possibles}$$

Exemple

Un comité de 5 personnes doit être choisi parmi 20 hommes et 5 femmes, quelle est la probabilité

a) *qu'il se compose de 5 femmes ?*

b) *qu'il se compose de 4 hommes et 1 femme ?*

Corrigé

Le nombre total de possibilités est C_{25}^{5} =53130

a) Il n'y a qu'une seule manière de choisir 5 femmes ,
Donc: probabilité est 1/ 53130 = 0.00001882.

b) Il y a C_{20}^{4} = 4845 possibilités de choisir 4 hommes parmi 20 et C_{5}^{1} = 5 possibilités de choisir une femme parmi 5 donc $C_{20}^{4} \times C_{5}^{1}$ le nombre de cas favorables

La probabilité est de $\frac{C_{20}^{4} \times C_{5}^{1}}{C_{25}^{5}}$

Probabilité de l'union

- *Pour trois événements A et B quelconques:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- *Pour trois événements A, B et C quelconques:*

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B)$$
$$-P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Généralisation de la formule de l'union

Pour n événements quelconques:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i,j=1}^{n} P(A_i \cap A_j)$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \quad \dots$$

$$\mp P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \qquad [(-)si\ n\ pair\ et (+) si\ n\ impair]$$

Exemple:

Un étudiant estime à 65% ses chances de réussir son cours de statistiques, à 80% ses chances de réussir son cours de Biophysique et à 50% se chances de réussir les deux matières.

- Notons S l'événement "réussir en Statistiques", et B l'événement "réussir en Biophysique". Alors, nous représentons la probabilité que ces événements se produisent par $P(S)=0,65$ $P(B)=0,8$
- Respectivement. Pour ce qui est de l'événement "réussir les deux matières", il s'agit ici de l'intersection des événements S et B ...rappelons-nous que l'intersection représente bien le fait que l'un et l'autre des événements sont réalisés. Ainsi, selon l'énoncé de l'étudiant $P(S\cap B)= 0,5$.

1) Quelle est la probabilité qu'il réussisse en Biophysique ou en Statistiques?

Corrigé

L'événement "réussir en Biophysique ou en Statistiques est représenté par S∪B. Nous voulons donc évaluer:

$$P(S \cup B) = P(S) + P(B) - P(S \cap B)$$
$$= 0{,}65 + 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}95$$

Il y a donc 95% des chances que l'étudiant réussisse l'un ou l'autre de ces cours.

2) Quelle est la probabilité qu'il ne réussisse ni en Biophysique, ni en Statistiques?

D'abord, il faut bien identifier l'événement "échouer les deux matières". Il faut voir en celui-ci que venons de présenter,

$$\mathrm{P}(\bar{B} \cap \bar{S}) = P(\overline{B \cup S}) = 1 - P(B \cup S) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$$

Il y a donc 5% des chances que l'étudiant échoue les deux cours.

Probabilité conditionnelle

Considérons deux événements A et B et tel que la réalisation de A influence celle de B , alors la probabilité conditionnelle est définie par la probabilité de réaliser A sachant que B a été réalisé et s'écrit : $P(A/B)$*:*

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

→*Il permet de calculer la probabilité de réaliser A **Et** B.*
On a:

$$P(\bar{\boldsymbol{A}}/B) = 1 - P(A/B)$$

Théorème des probabilités composées:

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ avec $\mathrm{P(B)} \neq 0$

Or $P(A \cap B) = \mathrm{P(B \cap A)}$

$P(A \cap B) = \mathrm{P(B \cap A)} = \mathrm{P(B)P}(A/B) = \mathrm{P(A)P}(B/A)$

Exemple

→On jette une paire de dés bien équilibrés (espace équiprobable).

On observe une réalisation de l'événement

{somme des dés = 6}.

Quelle est la probabilité pour qu'un des deux dés ait donné le résultat 2 ?

B = {somme des deux dés = 6}

A = {au moins un des deux dés donne 2}

B = {(2, 4), (4, 2), (1, 5), (5, 1), (3, 3)}

$A \cap B$= {(2, 4), (4, 2)}

Nombre de réalisations de $A \cap B = |A \cap B|$= 2

D'où , $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$.

$$P(A/B) = \frac{2}{5}$$

Alors que $P(A) = \frac{11}{36}$

Evénements indépendants:

Indépendance :

Deux événements sont indépendants si la réalisation ou la non-réalisation de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre.

Soit $P(A)$:

$$P(A/B) = P(A)$$

=> **On dit que A et B sont indépendants, et alors:**

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

Attention!

Ne pas confondre « indépendance » et « incompatibilité ».

→Si $P(A \cap B) \neq 0$, les deux événements sont compatibles, ils pourront

être dépendants ou indépendants

Incompatibles, sont-ils dépendants ou indépendants?

→ $P(A \cap B) = 0$ (incompatibles) et $\mathrm{P(A)} \neq 0 et\ P(B) \neq 0$:

Alors, puisque $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0 \neq P(A)$: les événements sont dépendants.

Ensemble exhaustif (complet ou partition de Ω)

Un ensemble d'événements A_i $(i = 1, \dots, n)$, vérifiant les propriétés suivantes:

$$A_i \neq \emptyset \ (i = 1, \dots, n)$$
$$A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$$
$$A_i \cup A_j = \Omega$$

Forme *une partition de Ω*

Théorème de probabilité totales (ou théorème de multiplication)

Deux événements A_1 , A_2 forment une partition de Ω et $B \subset \Omega$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset \; et \, A_1 \cup A_2 = \Omega$

$P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap (A_1 \cup A_2)) = P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2))$

0

= $P(B \cap A_1)$+ $P(B \cap A_2)$ -$P(B \cap A_1 \cap B \cap A_2)$

= $P(B \cap A_1)$+ $P(B \cap A_2)$

En utilisant le théorème des probabilités composées:

On obtient:

$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B/A_1) + \mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(B/A_2)$

Théorème de probabilités totales

$$P(B) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B/A_1) + \mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(B/A_2)$$

:

Théorème de Bayes

Maintenant, pour identifier la probabilité $P(A_1|B)$:

Par la définition de probabilité conditionnelle:

$$\mathrm{P}(A_1/\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P(B)}} = \frac{P(A_1) \times P(B|A_1)}{\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B/A_1)+\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(B/A_2)}$$

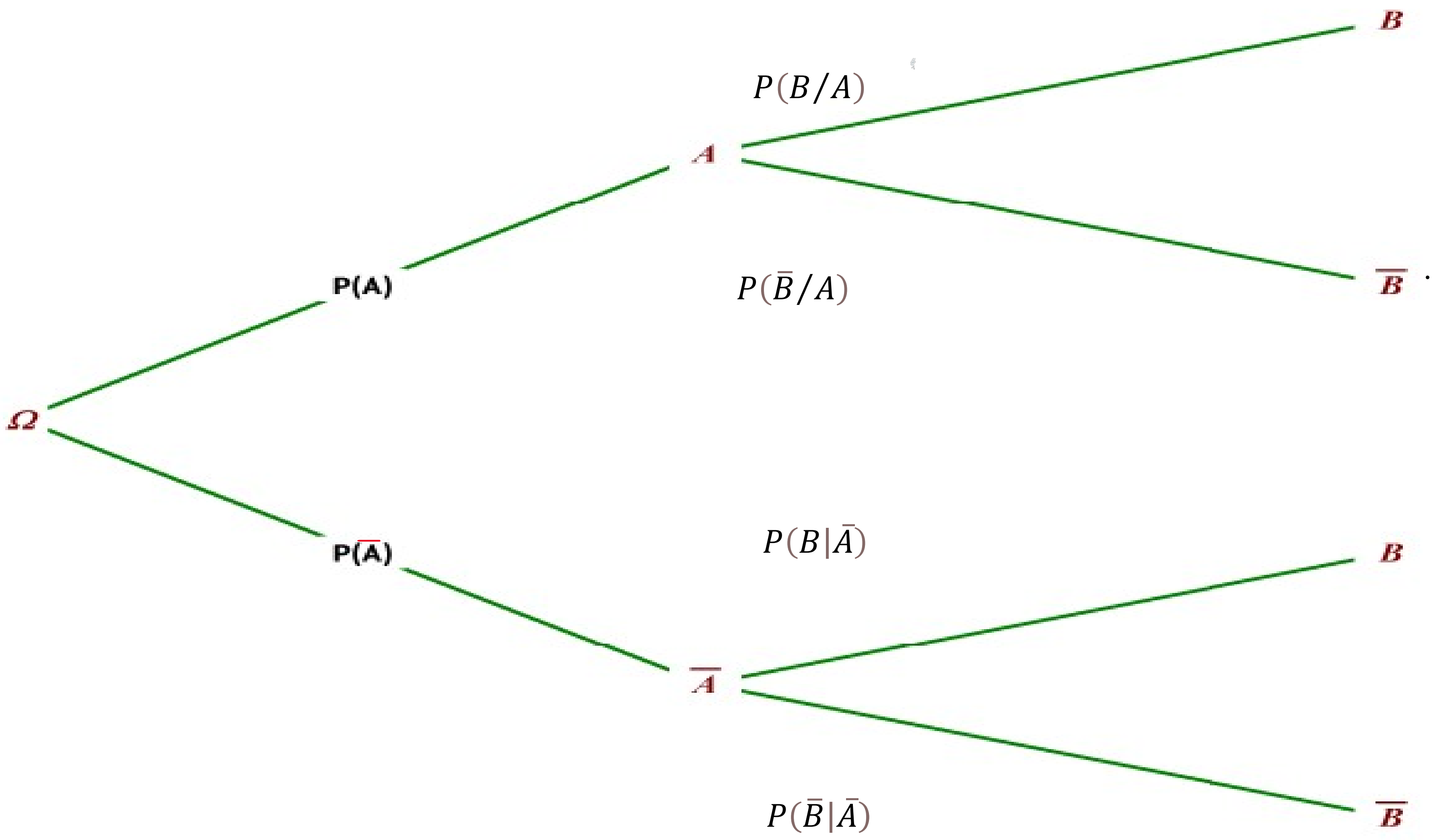
Théorème de Bayes:

$$\mathrm{P}(A_1/\mathrm{B}) = \frac{P(A_1) \times P(B|A_1)}{\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B/A_1)+\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(B/A_2)}$$

Usage d’un arbre pondéré dans les situations de probabilités conditionnelles

Il est parfois utile de représenter une situation de probabilités par un arbre et de savoir l’utiliser pour faire des calculs de probabilités

On appelle arbre pondéré un arbre pour lequel chaque branche est associée à une probabilité, comme ci-dessous



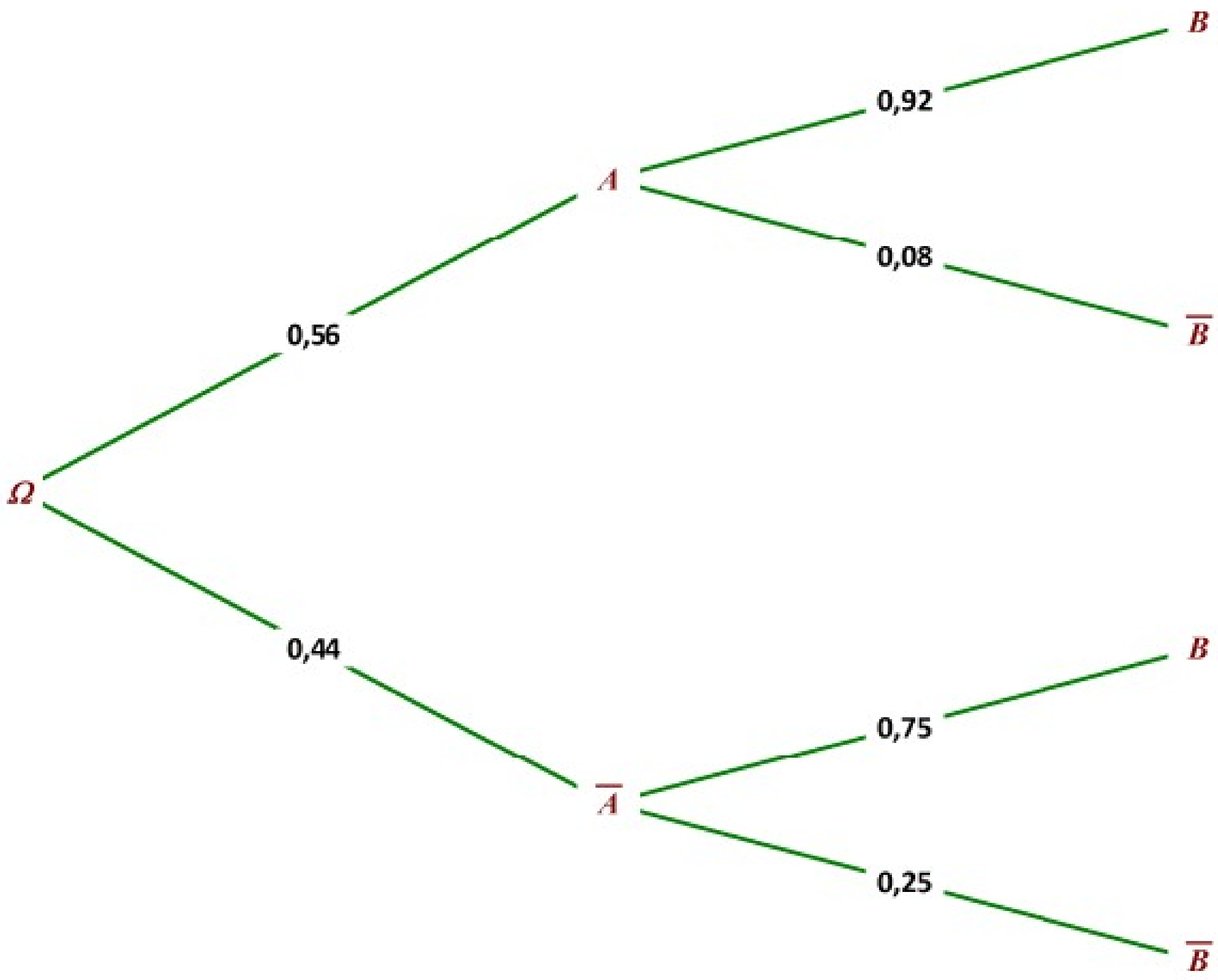
Ω
P(A)
$P(\bar{A})$
A
$\bar{A}$
$P(B/A)$
$P(\bar{B}/A)$
$P(B|\bar{A})$
$P(\bar{B}|\bar{A})$
B
$\bar{B}$
B
$\bar{B}$

Exemple d'entrainement

Dans un service de prise en charge des brulés, 56% des pansements sont réalisés par un médecin généraliste (évènement A) et le reste des pansements sont assurés par un chirurgien (évènement $\bar{A}$).

La guérison au bout de 25 jours de la plaie causée par la brûlure est obtenue à 75% si le pansement est réalisé par le chirurgien et elle est obtenue à 92% lorsque le pansement est fait par le généraliste.

Un malade brûlé est pris au hasard, il s'est avéré guéri de sa plaie au bout de 25 jours. Quelle est la probabilité que son pansement ait été réalisé par le chirurgien ?



B
0,92
A
0,08
$\overline{B}$
0,56
Ω
0,44
B
0,75
$\overline{A}$
0,25
$\overline{B}$

Corrigé

$$\mathrm{P}(\bar{A}/\mathrm{B}) = \frac{P(\bar{A}) \times P(B|\bar{A})}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B/A)+\mathrm{P}(\bar{A})\mathrm{P}(B/\bar{A})}$$

$$= \frac{0{,}44 \times 0{,}75}{0{,}56 \times 0{,}92 + 0{,}44 \times 0{,}75} = 0{,}39 \quad (39\%)$$