Analyse combinatoire

Mme Medouer Nawel

Analyse combinatoire

Comment compter les objets?

L’analyse combinatoire est une branche en mathématique qui étudie comment compter les objets, elle nous donne des méthodes particulières utilisées dans la théorie de probabilités.

1) Arrangements

2) Permutations

3) Combinaisons

1. Arrangements

1.1 Arrangements sans répétition:

1.1.1 Définition:

Etant donné un ensemble E de n éléments, on appelle arrangement de p $(p \leq n)$ éléments sans répétition toute disposition ordonnée de p éléments parmi les n éléments.

C'est-à-dire toute suite ordonnée de p éléments

C'est-à-dire l'ordre intervient

Le nombre d'arrangements de p éléments pris parmi n sans répétition est noté par:

$$A_n^P$$

Deux arrangements sont différents par la nature et l'ordre des éléments

1. Arrangements

1.1 Arrangements sans répétition:

1.1.2 Exemple:

Etant donné un ensemble E de 3 éléments

$$E = \{a, b, c\}$$

Alors $(a, b)(a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)$ *sont des arrangements de deux éléments de E*

$A_3^2 = 3 \times 2 = 6$

1. Arrangements

1.1 Arrangement sans répétition:

Combien y a-t-il d'arrangement de p élément d'un ensemble de n éléments sachant que chaque élément ne figure qu'une seule fois?

Soit *E un ensemble de n éléments .*

Pour le 1er élément on a n façon de le choisir

Il reste (n-1) éléments, alors pour le 2ème élément on a n-1 façon de le choisir

Il reste (n-2) éléments, alors pour le 3ème élément on a n-2 façon de le choisir

1. Arrangements

1.1 Arrangement sans répétition:

Il reste (n-(p-1)) éléments, alors pour le $P^{\text{ième}}$ *élément , on a (n-(p-1))=(n-p+1) façon de le choisir, Alors:*

$$\boldsymbol{A_n^P = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

1. Arrangements

1.2 Arrangements avec répétition:

1.2.1 Définition:

Lorsqu'un élément peut être observé plusieurs fois dans un arrangement, le nombre d'arrangement avec répétition de p élément pris parmi n élément est alors:

$$\boldsymbol{R_n^p} = \underbrace{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} \times \cdots \times \boldsymbol{n}}_{p\ fois} = \boldsymbol{n^p}$$

Voici pourquoi?

Pour le 1er élément on a n façon de le choisir

Pour le 2ème élément on a également n possibilités de le choisir car le premier élément fait de nouveau parti des n objets .

Ainsi pour les p éléments tirés, il aura $\underbrace{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} \times \cdots \times \boldsymbol{n}}_{n\ fois}$

arrangements possibles .

2. Permutation

2.1 Permutation sans répétition:

2.1.1 Définition:

Etant donné un ensemble E de n éléments, on appelle permutation sans répétition de n objets distincts tout arrangement n à n de ces n objets

C'est-à-dire toute suite ordonnée de n éléments

Le nombre permutations de p éléments pris parmi n sans répétition est noté par P_n

Ainsi le nombre de permutations sans répétition

de n éléments est de:

$$P_n = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{1}) \times (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{2}) \times \cdots \times 1 = n!$$

Exemple

Combien de mots que l'on peut construire à partir des lettres du mot « table »?

Bien sur sans tenir compte du sens.

Alors le nombre que l'on peut écrire en permutant

ces 5 lettres est $P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$

2. Permutation

2.2 Permutation avec répétition:

Dans le cas où un élément est répété r fois, on se trouve dans le cas d'une permutation avec répétition symbolisée par $P_{n,r}$

En effet $P_{n,r} = \frac{n!}{r!}$

Pourquoi?

Exemple

Combien de mots que l’on peut construire à partir des lettres du mot « cellule »?

Bien sur sans tenir compte du sens.

Alors le nombre que l’on peut écrire en permutant

ces 7 lettres est $P_7 = 7 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = 7!$

Exemple

Mais !

Dans les 5040 mots possibles il y a des répétions

Pourquoi?

Lorsqu'on permute les lettres identiques (la lettre L et la lettre E) on trouve des répétitions

Donc il faut les éliminer.

Comment?

$$P_{7,3,2} = \frac{7!}{3!2!} = 420$$

3. combinaisons

3.1 Combinaisons sans répétitions:

3.1.1 Définition:

Etant donné un ensemble E de n éléments, on appelle combinaison de p éléments sans répétition toute liste de p éléments parmi les n éléments.

C'est-à-dire l'ordre n'est pas important.

Le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n sans répétition est noté par:

$$C_n^P$$

Deux combinaisons sont différentes par la nature des éléments, quel que soit l'ordre des éléments.

3. Combinaisons

3.1 Combinaisons sans répétitions:

3.1.2 Exemple:

Etant donné un ensemble E de 3 éléments

$$E = \{a, b, c\}$$

Alors $\{a, b\}$ $\{b, c\}$ $\{a, c\}$ *sont des combinaisons de deux éléments de E*

$$C_3^2 = 3$$

Chaque liste non ordonnée $\{a, b\}$ *engendre deux dispositions ordonnées* $(a, b) et$ (b, a)

3.1.2 Exemple:

Chaque disposition non ordonnée $\{a, b\}$ *engendre deux dispositions ordonnées* $(a, b) et\ (b, a)$

Alors

$$A_3^2 = 2 \times C_3^2$$

$$C_3^2 = \frac{A_3^2}{2!}$$

Par récurrence $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Exemple

La formation d’une délégation de 4 étudiants parmi 100

est une combinaison sans répétition avec p=4 et n=100

Pourquoi?

L’ordre n’est pas important dans le chois des délégués

Chaque délégué ne pouvant intervenir qu’une fois

$$C_{100}^{4} = \frac{A_{100}^{4}}{4!} = \frac{100!}{4!\,(100-4)!}$$

Propriétés:

1. $C_n^0 = 1$
2. $C_n^n = 1$
3. $C_n^{n-p} = C_n^p$

Formule des combinaisons composées:

(Formule de Pascale)

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$$

3. combinaisons
3.2 Combinaisons avec répétitions:

3.2.1 Définition:

Etant donné un ensemble E de n éléments, on appelle combinaison de p éléments avec répétition toute liste de p éléments parmi les n éléments.

C'est-à-dire l'ordre n'est pas important.

Le nombre de combinaisons avec répétitions de p éléments pris parmi n sans répétition est noté par:

$$K_n^P = C_{n+p-1}^p$$

Voici Pourquoi?

Etant donné un ensemble E de 5 éléments

$$E = \{a, b, c, d, f\}$$

Alors pour avoir le nombre de combinaisons avec répétition de 3 lettres, on distingue trois catégories:

1. Nombre de combinaisons de trois lettres différentes est

de C_5^3

2. Nombre de combinaisons de deux lettres différentes et une lettre redondante

(deux identiques)

C'est-à-dire $C_5^2 \times 2$

(C_5^2*: choix de deux lettres, la 1ère redondante figure deux fois et la 2ème une seule fois)*

(2: lorsque je permute les deux lettres)

3. Nombre de combinaisons de trois lettres identiques

$$C_5^1$$

En utilisant la formule de pascale

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$$

Soit

$$C_5^3 + C_5^2 \times 2 + C_5^1 =$$
$$C_5^3 + C_5^2 + C_5^2 + C_5^1 =$$
$$C_{5+1}^3 + C_{5+1}^2 = C_6^3 + C_6^2 = C_{6+1}^3 = C_7^3$$

On obtient:

$$K_5^3 = C_{5+3-1}^3 = C_7^3$$

3. combinaisons

3.2 Combinaisons avec répétitions:

Par récurrence, on trouve:

$$K_n^P = C_{n+p-1}^p$$

Remarque:

Pour la combinaison avec répétition ca peut

$p \geq n$

Exercices d'entrainement

Dans le codage génétique de biologie cellulaire, l'Alphabet de base est constitué de 4 nucléotides désignés par les lettres, A « Adénine », C « Cytosine », G « Guanine » et U « Uracile ». On admet que les acides aminés sont des « mots » formés par une

chaine de 3 nucléotides :

1. Combien y a-t-il théoriquement d'acides aminés de ce genre ?
2. Parmi ces acides combien y en a-t-il qui contiennent 3 nucléotides différents ?
3. Combien y en a-t-il d'acides aminés contenant 3 nucléotides identiques ?
4. En déduire le nombre d'acides aminés contenant 2 nucléotides identiques.

Corrigé

Les différentes lettres sont dans l'ensemble

{A ; C ; G ; U} de cardinal 4.

1) *Un acide aminé est formé de 3 lettres. Arrangement avec répétition* R_4^3= *64 acides*

2) *3 nucléotides : Arrangement sans répétition* A_4^3 = *24 acides*

3) *3 nucléotides identiques : comme il y a 4 lettres , il y aura 4 acides*

4) *Déduction des acides à 2 nucléotides identiques : 64 – 24 – 4 = 36 acides*

Exercice 2

Dans un concours de résidanat le nombre de candidats retenus est égal à 25.

On sait que ces 25 admis sont répartis sur trois spécialités : 10 en orthopédie, 8 en pédiatrie et 7 en gynécologie.

1. De combien de façons possibles peut-on répartir ces 25 admis sur les 3 spécialités en respectant ces quotas ?
2. On connaît les noms de 2 admis affectés en orthopédie, et ceux de 5 affectés en pédiatrie. De combien de façons peut-on terminer la répartition des autres admis sur les trois spécialités, toujours selon les quotas préfixés ?

Corrigé

1) C’est une *permutation avec répétition* :

$$\frac{25!}{10!\times 8!\times 7!}$$ façons possibles.

2) On retranche 7 candidats connus (2 en orthopédie et 5 en pédiatrie) de 25 et c’est une permutation avec répétition des candidats restants : $\frac{18!}{8!\times 3!\times 7!}$ =5 250 960 façons possibles.