Cour 9

Mme Medouer Nawel

Variables Aléatoires

1. Variable aléatoire discrète

2. Variable aléatoire continue

Variable aléatoire

1.1 Définition:

Une variable aléatoire X est une application définie sur

un univers Ω dans un ensemble E de $\mathbb{R}$.

$$X : \Omega \rightarrow E$$

Si E est dénombrable, on dit que la variable aléatoire X est ***discrète***

Exemple introductif

Soit une famille de 4 enfants dont les deux parents sont

porteurs d'un gène d'une maladie héréditaire. La variable

aléatoire

X nombre d'enfants atteints de cette maladie dans la famille
c'est une variable aléatoire a cinq réalisations possibles:
$X = 0; 1; 2; 3; 4.$

1.2 Loi de probabilité de variable aléatoire discrète

A chacune des réalisations x_i de la variable aléatoire X est associée une

probabilité $P(X = x_i) = p_i, \quad (0 \leq p_i \leq 1, \forall i)$.

L'ensemble de couples $(x_i; p_i)$ *forme une* ***<u>loi de probabilité</u>*** *si*

La somme de toutes les probabilités est égale à 1.

C'est-à-dire

Etablir la loi de probabilité d'une expérience aléatoire, c'est :

- Déterminer l'ensemble E de toutes les issues possibles de l'expérience $x1; x2; \ldots ; xn$
- Calculer les probabilités correspondantes $p1; p2; \ldots ; pn$
- Résumer dans un tableau les résultats :

Valeur possible de la variable aléatoire	$x1$	$x2$	....	xn	Total
Probabilité correspondante	$p1$	$p2$		pn	1

1. 3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition :

La fonction de répartition associée à la variable aléatoire X, est la

fonction, notée F *ou* $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ *par* :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

1.4 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ P_1 & x_1 \leq x < x_2 \\ P_1 + P_2 & x_2 \leq x < x_3 \\ P_1 + P_2 + P_3 & x_3 \leq x < x_4 \\ P_1 + P_2 + P_3 + P_4 & x_4 \leq x < x_5 \\ \\ P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n & x \geq x_n \end{cases}$$

1. 3.1 Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire :

La représentation graphique est une fonction en escalier.

Propriétés:

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

2) Elle est croissante au sens large:

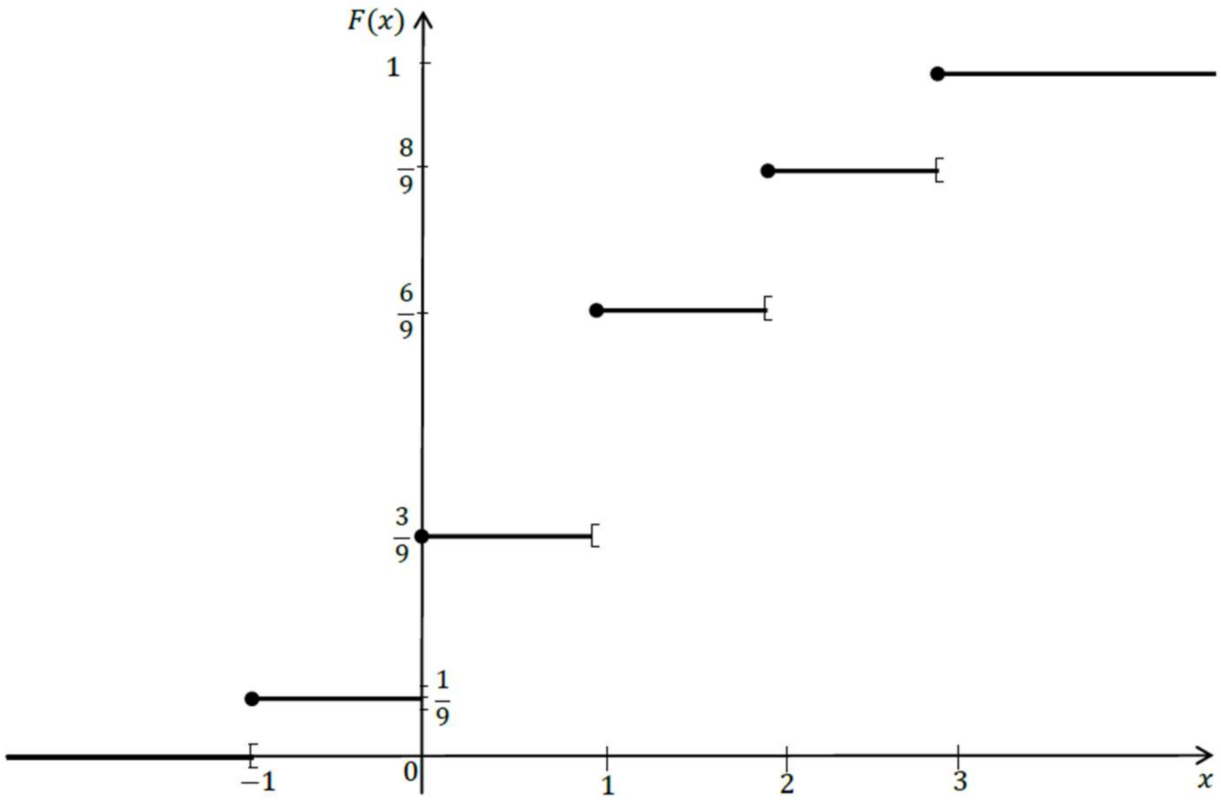
Si $a \leq b \quad alors\ F(a) \leq F(b)$

3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Exemple:

X=xi	-1	0	1	2	3
P(X=xi) =Pi	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9
F(xi)	1/9= p1	3/9= p1+p2	6/9= p1+p2+p3	8/9= p1+p2+p3+p4	1= p1+p2+p3+p4+ p5

Fonction de répartition



2. Paramètres d'une variable aléatoire

2.1 Espérance mathématique d'une variable aléatoire

Définition :

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X qui suit une loi de probabilité est la moyenne :

$E(X) = p1 \times x1 + p2 \times x2 + p3 \times x3 + \cdots + pn \times x\mathrm{n}$

$$E(X) = \Sigma pi \times x\mathrm{i}$$

2. Paramètres d’une variable aléatoire
2.2 Variance d'une variable aléatoire

Définition :

Il s’agit d’un indicateur mesurant la dispersion des valeurs x_i autour de E(X)

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

2.4 Transformation affine d’une variable aléatoire

DÉFINITION

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x1 ; x2 ; … ; xn.

Pour tous réels a et b, on peut définir une autre variable aléatoire, en

associant à chaque issue donnant la valeur xi, le nombre axi + b.

On note cette variable aléatoire aX + b.

Propriétés:

- Pour X et Y deux variables aléatoires quelconques
$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

- $E(aX) = aE(X) \qquad \forall a \epsilon R$

- $E(X+b) = E(X) + b \qquad \forall b \epsilon R$

- $E(aX+b) = aE(X) + b$

Propriétés

- *Par définition:*

$$1)\ V(X) \geq 0.$$

$$2)\ 2)\ V(X+b) = V(X) \quad et \quad V(aX) = a^2 V(X).$$

3) *Pour tout réel Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :*

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

Exemple

On donne $E(X) = 3$ et $V(X) = 16$.

Calculer :

1) $E(-2X + 5)$
2) $V(-2X + 5)$

Correction

1) $E(-2X + 5) = -2E(X) + 5 = -2 \times 3 + 5 = -12$
2) $V(-2X + 5) = (-2)^2 \times V(X) = 4 \times 16 = 64$

Exemple 2

On donne les lois de probabilités du gain X et Y de deux jeux.

Jeu N° 1

xi	-5	-1	0	1	3
P(X = xi)	0,2	0,3	0,1	0,1	0,3

Jeu N° 2

yi	-3	-1	0	1	2
P(Y = yi)	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

Pour le jeu N° 1 : $E(X) = -0,3$, $V(X) = 8,01$.
Pour le jeu N° 2 : $E(Y) = -0,3$, $V(Y) = 1,81$.