

Cour 9

Mme Medouer Nawel

Variables Aléatoires

1. Variable aléatoire discrète

2. Variable aléatoire continue

Variable aléatoire discrète

1.1 Définition:

Une variable aléatoire X est une application définie sur un univers Ω dans un ensemble E de \mathbb{R} .

$$X: \Omega \rightarrow E$$

Si E est dénombrable, on dit que la variable aléatoire X est **discrète**

Exemple introductif

Soit une famille de 4 enfants dont les deux parents sont porteurs d'un gène d'une maladie héréditaire. La variable aléatoire

X nombre d'enfants atteints de cette maladie dans la famille c'est une variable aléatoire a cinq réalisations possibles:
 $X = 0; 1; 2; 3; 4.$

1.2 Loi de probabilité de variable aléatoire discrète

A chacune des réalisations x_i de la variable aléatoire X est associée une

probabilité $P(X = x_i) = p_i$, ($0 \leq p_i \leq 1, \forall i$).

L'ensemble de couples $(x_i; p_i)$ forme une loi de probabilité si

La somme de toutes les probabilités est égale à 1.

C'est-à-dire

Etablir la loi de probabilité d'une expérience aléatoire, c'est :

- Déterminer l'ensemble E de toutes les issues possibles de l'expérience $x_1; x_2; \dots ; x_n$
- Calculer les probabilités correspondantes $p_1; p_2; \dots ; p_n$
- Résumer dans un tableau les résultats :

Valeur possible de la variable aléatoire	x_1	x_2	x_n	Total
Probabilité correspondante	p_1	p_2		p_n	1

2.3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition :

La fonction de répartition associée à la variable aléatoire X , est la

fonction, notée F ou $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ par :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

1.4 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ P_1 & x_1 \leq x < x_2 \\ P_1 + P_2 & x_2 \leq x < x_3 \\ P_1 + P_2 + P_3 & x_3 \leq x < x_4 \\ P_1 + P_2 + P_3 + P_4 & x_4 \leq x < x_5 \\ \vdots & \vdots \\ P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n = 1 & x \geq x_n \end{cases}$$

2.3 Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire :

La représentation graphique est une fonction en escalier.

Propriétés:

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

2) *Elle est croissante au sens large:*

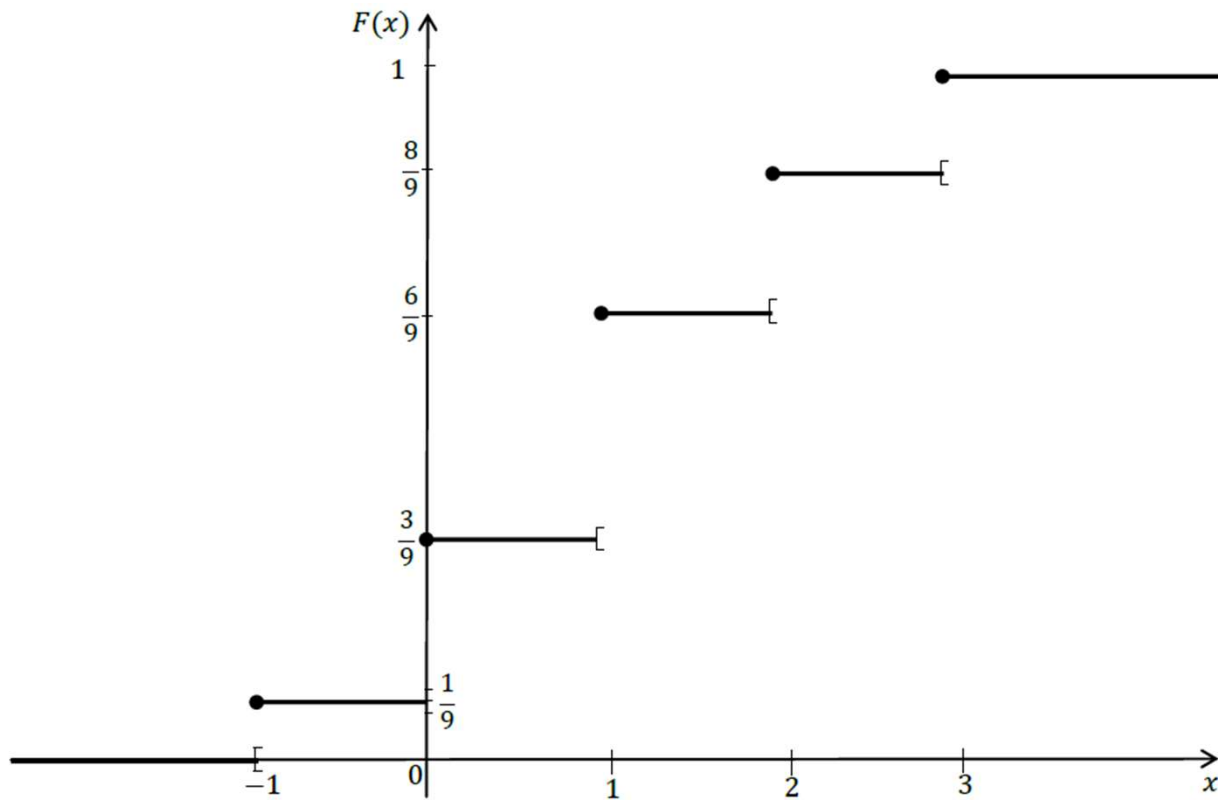
Si $a \leq b$ alors $F(a) \leq F(b)$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Example:

$X=x_i$	-1	0	1	2	3
$P(X=x_i)$ $=P_i$	$1/9$	$2/9$	$3/9$	$2/9$	$1/9$
$F(x_i)$	$1/9 =$ p_1	$3/9 =$ $p_1 + p_2$	$6/9 =$ $p_1 + p_2 + p_3$	$8/9 =$ $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$	$1 =$ $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 +$ p_5

Fonction de répartition



2. Paramètres d'une variable aléatoire

2.1 Espérance mathématique d'une variable aléatoire

Définition :

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X qui suit une loi de probabilité est la moyenne :

$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + p_3 \times x_3 + \dots + p_n \times x_n$$

$$E(X) = \sum p_i \times x_i$$

2. Paramètres d'une variable aléatoire

2.2 Variance d'une variable aléatoire

Définition :

Il s'agit d'un indicateur mesurant la dispersion des valeurs x_i autour de $E(X)$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Transformation affine d'une variable aléatoire

DÉFINITION

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n$.

Pour tous réels a et b , on peut définir une autre variable aléatoire, en

associant à chaque issue donnant la valeur x_i , le nombre $ax_i + b$.

On note cette variable aléatoire $aX + b$.

Propriétés:

- Pour X et Y deux variables aléatoires quelconques

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

- $E(aX) = aE(X) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

- $E(X + b) = E(X) + b \quad \forall b \in \mathbb{R}$

- $E(aX + b) = aE(X) + b$

Propriétés

• *Par définition:*

$$1) V(X) \geq 0.$$

$$2) 2) V(X + b) = V(X) \text{ et } V(aX) = a^2 V(X).$$

3) *Pour tout réel Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :*

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

Exemple

On donne $E(X) = 3$ et $V(X) = 16$.

Calculer :

1) $E(2X + 5)$

2) $V(2X + 5)$

Correction

1) $E(2X + 5) = 2E(X) + 5 = 2 \times 3 + 5 = 12$

2) $V(2X + 5) = (-2)^2 \times V(X) = 4 \times 16 = 64$

Variable aléatoire discrète

On donne les lois de probabilités du gain X et Y de deux jeux.

Jeu N° 1

x_i	5	1	0	1	3
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,1	0,1	0,3

Jeu N° 2

y_i	3	1	0	1	2
$P(Y = y_i)$	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

Pour le jeu N° 1 : $E(X) = 0,3$, $V(X) = 8,01$.

Pour le jeu N° 2 : $E(Y) = 0,3$, $V(Y) = 1,81$.

Variable aléatoire continue:

Une variable aléatoire est dite continue si son domaine de variation est l'ensemble \mathbb{R} ou un ensemble de \mathbb{R}

Variable aléatoire continue:

Une variable aléatoire continue est déterminée par une fonction dite

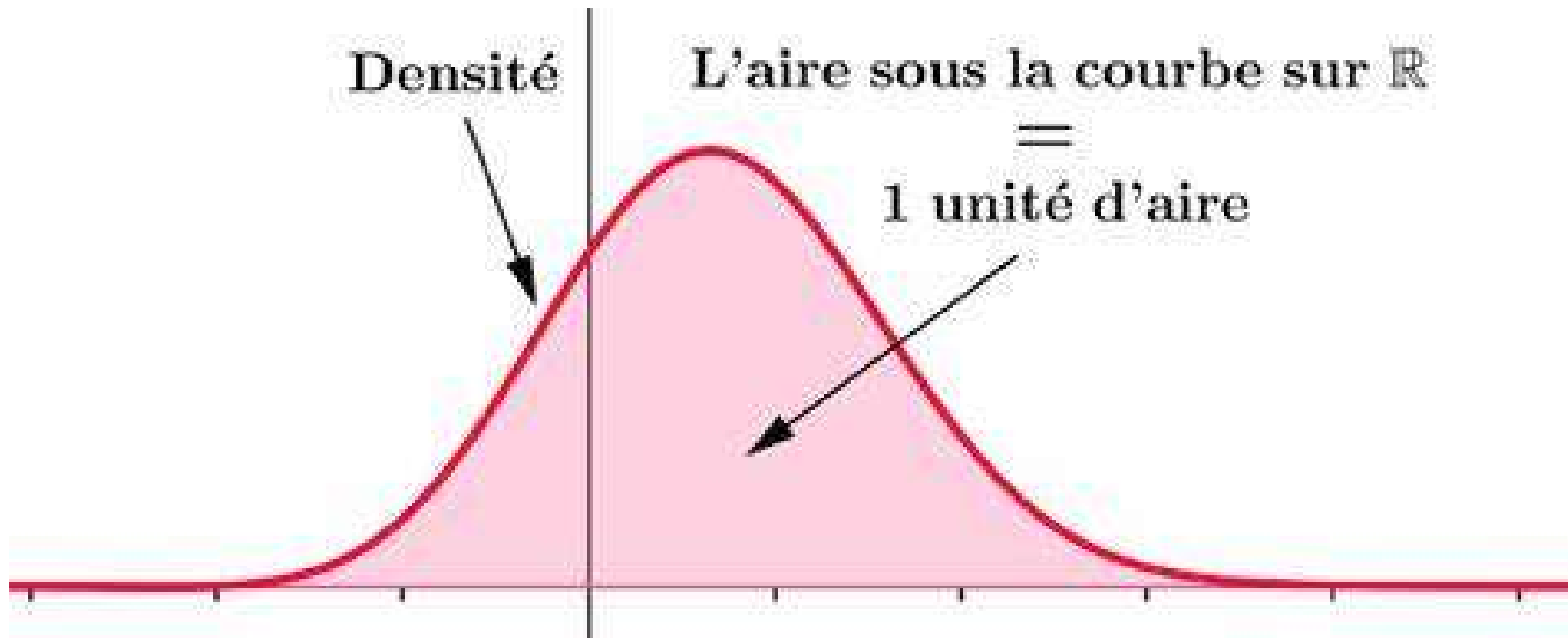
fonction de densité de probabilités notée $f(x)$ vérifiant:

1) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ (f est une fonction positive)

2)

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (*L'aire au dessous de la courbe de f est égale à 1*)

Fonction de densité



Exemple

Soit :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \in [0; 2] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On va vérifier que f est une densité de probabilité:

1) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$

2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^2 \frac{x}{2} = \frac{x^2}{4} \Big|_0^2 = 1$$

Variable aléatoire continue:

Pour une variable aléatoire continue X , on a:

$$1) P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

$$2) P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue:

La fonction de répartition associée à la variable aléatoire X ,

est la fonction, notée F ou $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ par :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue:

Propriétés:

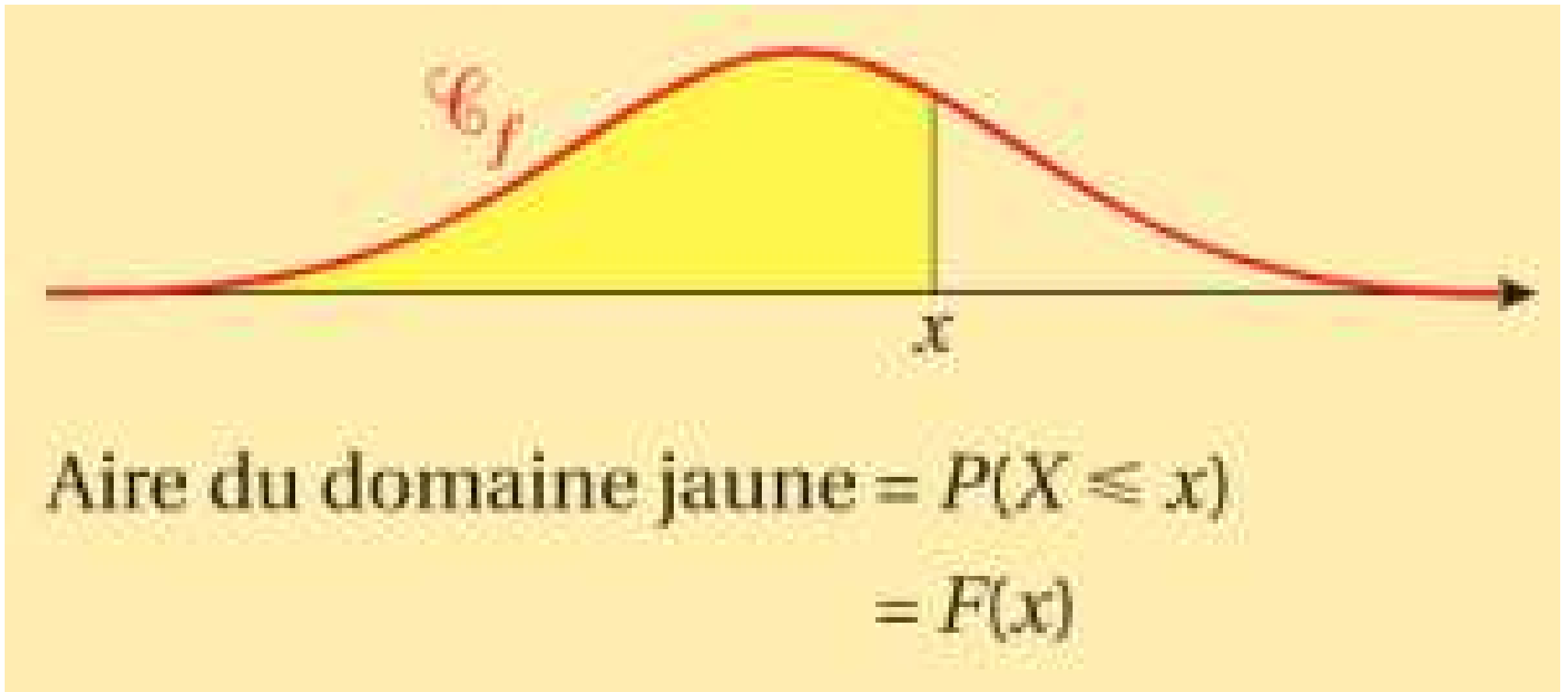
1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

2) *Elle est croissante au sens large:*

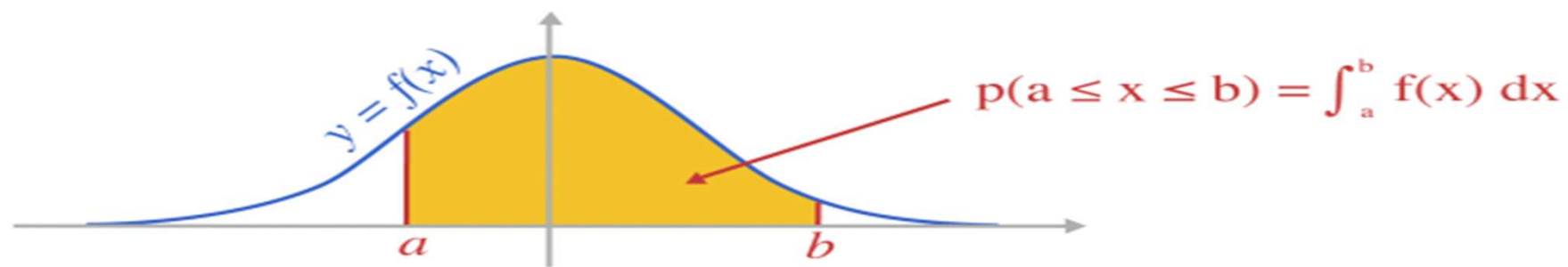
Si $a \leq b$ alors $F(a) \leq F(b)$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Fonction de répartition



$$\begin{aligned} \text{Aire du domaine jaune} &= P(X \leq x) \\ &= F(x) \end{aligned}$$



La fonction de répartition permet de calculer la probabilité :

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$

Remarque:

$$\blacktriangleright P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$$

➤ Pour une variable continue:

$$P(X = a) = 0$$

Exemple

$$\text{Pour } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \in [0; 2] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\text{On a } F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$1) \text{ Pour } x < 0, F_X(x) = 0$$

$$2) \text{ Pour } 0 \leq x < 2, F_X(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{t}{2} dt = \frac{t^2}{4} \Big|_0^x = \frac{1}{4} x^2$$

$$3) \text{ Pour } x \geq 2, F_X(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^2 \frac{t}{2} dt + \int_2^{+\infty} 0 dt = 1$$

Alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2 & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

On a $F'_X(x) = f(x)$

Espérance mathématique d'une variable aléatoire continue

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X qui suit une densité de probabilité est donnée par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

On reprend l'exemple précédent:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 = \frac{8}{6}$$

Variance d'une variable aléatoire continue

La variance d'une variable aléatoire X suit une densité de probabilité est donnée par :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right)^2$$

On reprend l'exemple précédent:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right)^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{x^3}{2} = \frac{x^4}{8} \Big|_0^2 = 2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

=

$$V(X) = \frac{2}{9}$$

Définition

Une variable aléatoire est dite centrée réduite si son espérance est égale à 0 et son écart-type égale à 1.

La variable aléatoire $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite

Démonstration

$Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une transformation affine

$$Y = aX + b = \frac{1}{\sigma(X)} X - \frac{E(X)}{\sigma(X)}$$

Alors : $E(Y) = \frac{1}{\sigma(X)} E(X) - \frac{E(X)}{\sigma(X)} = 0$

$$V(Y) = \left(\frac{1}{\sigma(X)}\right)^2 V(X) = 1$$