Cours 11

Mme medouer Nawel

Lois de probabilités

1. Lois discrètes

1.1 Loi de Bernoulli
1.2 Loi Binomiale
1.3 Loi de Poisson

2. Lois continues

2.1 Loi Normale

Loi de Bernoulli

Définition

Cette loi est celle de toute variable aléatoire X modélisant une expérience dont l'issue ne possède que deux alternatives de type "succès ou échec", "vrai ou faux", "marche ou arrêt", pile ou face", etc. Un succès est représenté par l'évènement $\{X = 1\}$ tandis que $\{X = 0\}$ correspond à un échec

$X(\Omega) = \{0; 1\}$.

Puisque l'on a $P[X = 0] = 1 - P[X = 1]$, la loi de X ne dépend que d'un paramètre (la probabilité de succès) ; on parle alors de la loi de Bernoulli de paramètre p caractérisée par

$P[X = 1] = p$, $P[X = 0] = 1 - p$.

Paramètres de la Loi de Bernoulli

$$E(X) = p \qquad\qquad V(X) = p(1-p)$$

Loi Binomiale

Une somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès p est une variable aléatoire discrète qui suit une loi Binomiale de paramètres $n\ et\ p(0 \leq p \leq 1)$:

Notation:

$$X \sim B(n; p)$$

$Remarque$:

Une variable qui suit la loi Binomiale de paramètres 1 et p est une variable aléatoire de Bernoulli

Loi Binomiale

D'une façon générale, la loi Binomiale est utilisé dès qu'il s'agit d'un décompte de succès

parmi n épreuves répétées, identiques et indépendantes
(même probabilités de succès p), alors:

Condition de validité de la loi Binomiale:

- ✓ ***La répétition (n épreuves)***
- ✓ ***L'alternance (p probabilité de succès et q probabilité d'échec)***
- ✓ ***L'indépendance***

Loi Binomiale

D'une façon générale, la loi Binomiale est utilisé dès qu'il s'agit

d'un décompte de succès parmi n épreuves répétées, identiques et

indépendantes(même probabilités de succès p)

Soit $X \sim B(n;p)$

$$\underbrace{P(X=k)}_{\substack{Probabilité\ d'obtenir\\ k\ succès\ et\\ n-k\ échecs}} = \underbrace{C_n^k}_{\substack{Nombre\ de\ combinaisons\\ de\ k\ succès\ parmi\\ les\ n\ épreuves}} \underbrace{p^k}_{\substack{probbilité\ d'obtenir\\ k\ succès}} \underbrace{q^{n-K}}_{\substack{probabilité\ d'obtenir\\ (n-k)échecs}}$$

Loi Binomiale

Loi de probabilité:

k	0	1	.....	n	
$P(X = k)$	q^n	npq^{n-1}		p^n	=1

$$E(X) = np \qquad et \qquad V(X) = npq$$

Loi Binomiale

Théorème:

Si $X_1 \sim B(n_1; p)$ et $X_2 \sim B(n_2; p)$ avec X_1 et X_2 deux

variables aléatoires indépendantes de même paramètres p, alors

$$X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2; p)$$

Loi Binomiale

Exemple:

Si un service produit un effet indésirable chez 15% des sujets vaccinés, quelle est la probabilité d'observer au moins 4 sujets présentant un tel effet au cours d'une séance de vaccination de 10 sujets?

Loi Binomiale

Solution:
Conditions de validité de la loi Binomiale:

- ***La répétition (n =10)***

- ***L'alternance***

(p =0,15 probabilité de succès et q =1-p=0,85 probabilité d'échec)

- ***L'indépendance***

Alors:

$X \sim B(10; 0{,}15)$

$P(X \geq 4) = P(x = 4) + \ldots + P(X = 10)$

$= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3))$

$= 1 - (0{,}197 + 0{,}347 + 0{,}276 + 0{,}130) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$

Loi de Poisson

Cette loi peut modéliser les événements rares. Par exemple, elle peut modéliser le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique, le nombre

de voyageurs se présentant à un guichet dans la journée, etc.
Pour des raisons tues ici, elle s'exprime à l'aide de la fonction exponentielle

et dépend d'un paramètre $\lambda > 0$, qui correspond au nombre moyen

d'occurrence du phénomène observé pendant la durée donnée. Plus

formellement :

Loi de poisson

Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ > 0, notée P(λ)

lorsque X(Ω) = N et pour tout k ∈ N

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Loi de Poisson

Loi de probabilité: $X \sim P(\lambda)$

k	0	1	. . .	n	. . .	
$P(X = k)$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$		$e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	. . .	1

$$E(X) = \lambda \quad et \quad V(X) = \lambda$$

Loi de Poisson

Remarques

- ✓ Loi discrète infinie

- ✓ La loi de poisson dépend d'un seul paramètre λ.

- ✓ Loi des phénomènes rares

- ✓ Variation dans une unité du temps ou espace

Loi de Poisson

Théorème:

Si $X_1 \sim P(\lambda) et\ X_2 \sim P(\mu)$ **(avec** X_1 et X_2 **deux**

variables aléatoires indépendantes, alors

$$X_1 + X_2 \sim P(\lambda + \mu)$$

Loi de Poisson

Exemple:

On a observé dans un service un arrondissement d'un département, la survenue de 4 cas de leucémie pendant une année. Depuis 20 ans, la moyenne annuelle du nombre de cas de leucémie dans cet arrondissement est de 1,4 cas. Peut-on conclure à un risque accru de leucémie cet année là?

Loi de Poisson

Solution:

Alors: Soit $X \sim P(1,4)$

$$P(X \geq 4) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3))$$
$$= 1 - (0,246 + 0,345 + 0,242 + 0,113) = 1 - 0,947 = 0,053 = (5,3\%)$$

Il y a donc plus de 5 chances sur 100 d'observer au moins 4 cas au cour d'une année.
On ne peut donc pas conclure à un risque majoré.