

1^{ère} Année Médecine, 2021/2022

TD sur les variables aléatoires

Exercice 1

Un agriculteur a entreposé dans un local humide 15 doses d'un herbicide total et 10 doses d'un fongicide. Après plusieurs mois de séjour, les étiquettes sont indifférenciables. Chaque dose a la même probabilité d'être tirée.

En vue d'un traitement, l'agriculteur prend 5 doses au hasard. Soit X la Variable Aléatoire égale au nombre de doses d'herbicide prises parmi ces 5 doses.

- 1) Déterminer la distribution de probabilité de X .
- 2) Calculer la fonction de répartition et tracer son graphe.
- 3) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .

Exercice 2

Les compagnies aériennes acceptent parfois que le nombre de réservations dépasse la capacité de l'avion. On suppose que pour un avion de 50 sièges, 55 personnes avaient acheté des billets. On note par X la variable aléatoire désignant le nombre de voyageurs ayant réservé qui se présentent effectivement à l'enregistrement. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
p_i	0.06	0.11	0.12	0.14	0.25	0.17	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01

- 1) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $\sigma^2(X)$.
- 2) Quelle est la probabilité que tous les passagers qui se présentent à l'enregistrement soient admis à bord ?
- 3) Quelle est la probabilité que les passagers munis de billets ne sont pas tous admis à bord ?
- 4) Si vous étiez le 1^{er} sur la liste d'attente, quelle est la probabilité que vous seriez admis à bord ?
- 5) Calculer la fonction de répartition de X .
- 6) Si vous étiez le 2^{ème} sur la liste d'attente, quelle est la probabilité que vous seriez admis à bord ?
- 7) Si vous étiez le 3^{ème} sur la liste d'attente, quelle est la probabilité que vous seriez admis à bord ?

Exercice 3

Afin de mener une expérimentation de pharmacologie animale, on tire au hasard 2 comprimés dans un lot opaque qui en contient 8, indiscernables au toucher. Parmi ces comprimés, 1 comprimé est sans principe actif (excipients seuls), 1 est dosé à 100 mg de principe actif, 2 sont dosés à 200 mg, 2 sont dosés à 300 mg et les 2 derniers sont dosés à 400 mg.

Les 2 comprimés tirés sont administrés à un animal donné, et l'on considère la Variable Aléatoire : X représentant la dose active ingérée par l'animal.

- 1) Calculer la loi de probabilité de X .
- 2) Calculer l'espérance et la variance.
- 3) Calculer la fonction de répartition et tracer son graphe.

Exercice 4

Dans une boîte, il y a 6 comprimés dont 4 blancs et 2 rouges. On extrait un comprimé de la boîte puis on le remet. Ensuite on effectue des tirages sans remise jusqu'à obtenir un comprimé de même couleur.

- 1) Déterminer la loi de probabilité du nombre X de tirages après remise du comprimé extrait initialement
- 2) Déterminer l'espérance mathématique et la variance de X .

Exercice 5

$$\text{On pose } f(x) = \begin{cases} e^{4x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ c e^{-2x} & \text{si } x > 2 ; (c \geq 0) \end{cases}$$

Calculer la valeur du nombre positif c pour laquelle $f(x)$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X ; Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

Exercice 6

Une variable aléatoire X prenant les valeurs de l'intervalle $[-2 ; 3]$ avec la fonction de densité $f(x)$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{15}{32} + \frac{x}{32} & \text{si } x \in [-2 ; 0] \\ \frac{3}{4} + c * x & \text{si } x \in [0 ; 3] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- 1) Trouver c puis représenter le graphe de $f(x)$.
- 2) Déterminer la fonction de répartition $F(x)$ puis tracer son graphique.
- 3) Calculer $P(-1 < X < 1)$.

Exercice 7

Soit X une Variable Aléatoire avec une fonction de densité donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{3} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1/3 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ c - \frac{x}{3} & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- 1) Vérifier que $f(x)$ est bien une fonction de densité et tracer son graphe.
- 2) Calculer $P(X \leq 2.5)$.
- 3) Déterminer la fonction de répartition associée à X .
- 4) Déterminer l'espérance et la variance de X et de $Y = X - 2.5$

Exercice 8

Une variable aléatoire continue X de densité $c(x^2 - 4x + 4)$ est définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$.

- a) Calculer c .
- b) Représenter graphiquement la loi de probabilité.
- c) Donner la fonction de répartition $F(X)$.
- d) Calculer $P(1 \leq X \leq 3)$.
- e) Déterminer l'espérance et la variance de X et de $Y = X - 2$