*Université de Batna 2*

*Faculté de médecine*

*1ère année médecine*

# *Corrigé-type de TD N° : 9 (2021 /2022)*

# *Les tests d'hypothèses*

**Exercice 1 :** *Lors d'une enquête sur la durée de sommeil des enfants de 2 à 3 ans dans un département algérien, on a trouvé une moyenne du temps de sommeil par nuit de 10.2 heures dans un groupe de 40 enfants. L'écart-type S est de 2.1 heures. La moyenne attendue de sommeil est de 11.7 heures chez les enfants de cet âge. Les enfants examinés dorment autant que ceux de la population ? ($\alpha$ = 0.05)*

**Solution :** (Test de conformité cas 2) $\boldsymbol{m}$ = 10.2 $S$ = 2.1 1

***Choix des hypothèses :***

$H0$: $m = \mu$

$H1$: $m < \mu$

Il s'agit d'un test unilatéral à gauche (égale contre inférieure)

***2) Calcul de la statistique de test observée :*** $T_0 = \frac{m-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ = - 4.517

3) Identification de seuil critique : $\boldsymbol{n} > \mathbf{30}$ $\boldsymbol{\sigma}$ Inconnu Alors on cherche le seuil critique dans la table 2(de la variable normale réduite) $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.05}$ $\bar{Z}_{2\alpha} = \bar{Z}_{0.1}$ = =1.645

Test unilatéral à gauche : (égale contre inférieure)

$$-\infty \xrightarrow[de\ HO]{Zone\ de\ rejet} -\bar{Z}_{2\alpha} = -1.645 \xrightarrow[de\ HO]{Zone\ d'acceptation} +\infty$$

***4) Décision :***

***Décision statistique :*** La statistique de test observée se trouve dans la zone de rejet de $\boldsymbol{H0}$ .
***Décision pratique :*** Les enfants examinés présentent un temps de sommeil plus court que les enfants de la population générale

**Exercice 2 :** On teste deux traitements anti-cancéreux A et B sur deux populations de patients PA et PB(De même taille nA=nB =50). L'efficacité d'un traitement est évaluée par l'éventuelle diminution de la taille de la lésion tumorale, estimée par l'imagerie médicale, après un an detraitement.

*Pour la population soumise au traitement A on observe une diminution de la taille destumeurs dans 27 cas sur 50, pour le traitement B, dans 18 cas.*

*Peut-on conclure à une différence d'effet des deux traitements (au seuil de 5%) ?*

*Peut-on conclure que le traitement A est plus efficace que le traitement B (avec le même seuilde signification) ?*

## *Solution :*

## *Question 1:*

1) ***Choix des hypothèses :***

***H0 : P1 = P2***

***H1 : P1 ≠ P2***

Il s'agit d'un test bilatéral (égale contre inégale)

$$\tilde{P}_1 = \frac{27}{50} \qquad \tilde{P}_2 = \frac{18}{50}$$

***2) Calcul de la statistique de test observée :*** $T_0 = \frac{\tilde{P}_1 - \tilde{P}_2}{\sqrt{\tilde{P}(1-\tilde{P})(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}} = 1.8090$

$$avec\,\tilde{P} = \frac{n_1\tilde{P_1} + n_2\tilde{P_2}}{n_1 + n_2} = 0.45$$

*Appelée Proportion commune*

3) Identification de seuil critique : le test est valable, les conditions sont remplies

$n_1 \geq 30$ $\qquad$ $n_1\tilde{P}_1 > 5$ $\qquad$ $n_1\,(1-\tilde{P}_1) > 5$

$n_2 \geq 30$ $\qquad$ $n_2\tilde{P}_2 > 5$ $\qquad$ $n_2\,(1-\tilde{P}_2) > 5$

Alors on cherche le seuil critique dans la table 2(de la variable normale réduite) $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.05}$

$\overline{Z}_\alpha = \overline{Z}_{0.05} = 1.96$

***4) Décision :***

***Test bilatéral : (égale contre inégale)***

$$-\infty \xrightarrow[\quad]{\substack{\textit{Zone de rejet}\\ \textit{de HO}}} -\overline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{\alpha}} \xrightarrow[\quad]{\substack{\textit{Zone}\\ \textit{d'acceptation}\\ \textit{de HO}}} \overline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{\alpha}} \xrightarrow[\quad]{\substack{\textit{Zone de rejet}\\ \textit{de HO}}} +\infty$$

***-1.645 <1.8096 < 1.645***

**Décision statistique :** La statistique de test observée se trouve dans la zone d'acceptation de $\boldsymbol{H0}$ .

**Décision pratique :** On conclut qu'il n'y a pas une différence d'effet entre les deux traitements

***Question 2 :*** *(Test d'homogénéité cas 5) Il s'agit d'un test unilatéral droit (égale contre supérieur)*

***Choix des hypothèses :***

$H0$: $P_1 = P_2$

$H1$: $P_1 > P_2$

***2) Calcul de la statistique de test observée :*** $T_0 = \frac{\tilde{P}_1 - \tilde{P}_2}{\sqrt{\tilde{P}(1-\tilde{P})(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}} = 1.809$

***avec*** $\tilde{P} = \frac{n_1\tilde{P}_1 + \boldsymbol{n_2}\tilde{P}_2}{\boldsymbol{n_1}+\boldsymbol{n_2}}$*=0.45*

***Appelée Proportion commune***

3) Identification de seuil critique : le test est valable, les conditions sont remplies

$n_1 \geq 30$ $n_1\tilde{P}_1 > 5$ $n_1 (1- \tilde{P}_1) > 5$

$n_2 \geq 30$ $n_2\tilde{P}_2 > 5$ $n_2 (1- \tilde{P}_2) > 5$

Alors on cherche le seuil critique dans la table 2(de la variable normale réduite) $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.05}$

$\overline{Z}_{2\alpha} = \overline{Z}_{0.1} = 1.645$

***4) Décision :***

***Test unilatéral à droite : (égale contre supérieure)***

$$-\infty \xrightarrow[\textbf{\textit{de HO}}]{\textbf{\textit{Zone d'acceptation}}} \overline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{2\alpha}} = \mathbf{1.645} \xrightarrow[\textbf{\textit{de HO}}]{\textbf{\textit{Zone de rejet}}} +\infty$$

***1.8096 < 1.645***

**Décision statistique :** La statistique de test observée se trouve dans la zone d'acceptation de $\boldsymbol{H0}$ .

**Décision pratique :** On conclut que les deux traitements ayant une efficacité identique

**Exercice 3 :** Des études en psychologie du développement on montre qu'à l'âge de 12 mois, 50% desbébés « normaux » marchent.

*On souhaite mener une étude sur les retards de développent des bébés prématurés.*

*On tests l'hypothèse que les bébés prématurés marchent plus tardivement que les bébésnormaux.*

*On observe une population de 80 bébés prématurés. A 12 mois, 35 de ces 80 bébés*

*marchent.Faut-il réaliser un test unilatéral ou bilatéral ?*

*Peut-on, au seuil de signification de 5%, valider l'hypothèse de recherche ?*

***Solution :***

1) *Choix des hypothèses :* ***(test de conformité cas 5)***

$H0 : \tilde{P} = P$

$H1 : \tilde{P} < P$

*Il s'agit d'un test unilatéral à gauche (égale contre inférieure)* ***<u>(plus tardivement)</u>***

2) *Calcul de la statistique de test observée :*

$$\tilde{P} = \frac{35}{80} = 0.4375 \qquad P = 0.5$$

$T_0 = \frac{\tilde{P}-P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}$=-1.118

*3) Identification de seuil critique :*

*le test est valable car les trois conditions sont bien remplies :*

$\boldsymbol{n > 30}$ $\boldsymbol{nP} = 40 > \boldsymbol{5}$ $\boldsymbol{n(1-P)} = 40 > \boldsymbol{5}$

*Alors on cherche le seuil critique dans la table 2 (de la variable normale réduite)*

$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0.05}$ $\bar{Z}_{2\alpha} = 1.645$

***Décision :***

*Test unilatéral à gauche : (égale contre inférieure)*

$$-\infty \xrightarrow[de\ HO]{Zone\ de\ rejet} -\bar{Z}_{2\alpha} = -1.645 \xrightarrow[de\ HO]{Zone\ d'acceptation} +\infty$$

$-\boldsymbol{1.645} < -\boldsymbol{1}.118 = T_0$

***Décision statistique :*** *la statistique de test observée se trouve dans la zone d'acceptation de $H0$ .*

***Décision pratique*** *: C'est-à-dire les bébés prématurés ne marchent pas plus tardivement que les bébés normaux*

**Exercice 4 :** *On désire comparer la pression artérielle diastolique d'un groupe de sujets sains et d'un groupe de sujets atteints de drépanocytose (hémoglobinopathie). Une étude donne les résultats suivants :*

| | *Effectif n* | *Pression artérielle diastolique moyenne (mm Hg)* | *Variance $S^2$* |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Sujets sains(A)* | *88* | *70.1* | *10.8* |
| *Sujets Drépanocytaires (B)* | *85* | *61.8* | *6.9* |

*1) La pression artérielle est différente chez les sujets drépanocytaires ?*

*2) La pression artérielle est plus basse chez les sujets drépanocytaires ? ($\alpha$ = 0.01)*

***Solution : (test d'homogénéité cas 2)***

1. Il s'agit d'un test bilatéral (égale conte inégale)

***1) Choix des hypothèses :***

$H0$: $\mu1 = \mu2$

$H1$: $\mu1 \neq \mu2$

Il s'agit d'un test bilatéral (égale contre inégale)

***3) Calcul de la statistique de test observée***
***$n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$ $\sigma_X$ et $\sigma_Y$ inconnus***

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(\frac{S_X^2}{n_1} + \frac{S_Y^2}{n_2})}} = 18.38$$

3) Identification de seuil critique :

Alors on cherche le seuil critique dans la table 2(normale)

$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.0}1 \quad \overline{Z}_{\alpha} = \overline{Z}_{0.01} = 2.575$

***4) Décision :***

***Test bilatéral : (égale contre inégale)***

$$-\infty \xrightarrow[\textit{de HO}]{\textit{Zone de rejet}} -\overline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{\alpha}} \xrightarrow[\textit{de HO}]{\substack{\textit{Zone} \\ \textit{d'acceptation}}} \overline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{\alpha}} \xrightarrow[\textit{de HO}]{\textit{Zone de rejet}} +\infty$$

***2.575 < 18.38***

**Décision statistique :** La statistique de test observée se trouve dans la zone de rejet de $\boldsymbol{H0}$ .

**Décision pratique :** La pression artérielle est différente chez les sujets drépanocytaires

***2. Il s'agit d'un test unilatéral à droite (égale conte supérieure)***

***1) Choix des hypothèses :***

$H0$: $\mu1$ = $\mu2$

$H1$: $\mu1$ > $\mu2$

1) ***Calcul de la statistique de test observée***
   $n_1 \geq 30, n_2 \geq 30$ $\sigma_X$ ***et*** $\sigma_Y$ ***in****connus*

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(\frac{S_X^2}{n_1} + \frac{S_Y^2}{n_2})}} = 18.38$$

3) Identification de seuil critique :

Alors on cherche le seuil critique dans la table 2(de la variable normale réduite) $\boldsymbol{\alpha}$ = $\mathbf{0.0}1$

$\overline{Z}_{2\alpha} = \overline{Z}_{0.02} = 2.362$

***4) Décision :***

$\mathbf{18.38} > \mathbf{2.362}$

***Décision statistique :*** La statistique de test se trouve dans la zone de rejet de $H0$

***Décision pratique :*** La pression artérielle est plus basse chez les sujets drépanocytaires

***Exercice 5 :*** *On a mesuré un marqueur biologique chez 2 séries de sujets, l'une composée des sujets sains, l'autre de sujets atteints d'hépatite alcoolique.*

*L'étude a retrouvé les résultats suivants :*

| | *Effectif n* | *Moyenne du marqueur (g\l)* | *Ecart-type* |
|---|---|---|---|
| *Sujets sains (A)* | *15* | *1.6* | *0.19* |
| *Sujets sains (B)* | *12* | *1.4* | *0.21* |

*On suppose que le marqueur se distribue normalement chez les deux populations et que les deux écarts-types sont égaux.*

*Le marqueur biologique est-il différent chez les sujets atteints d'hépatite alcoolique ? ($\alpha$ = 0.05).*

***Solution :***

Il s'agit d'un test bilatéral (égale conte inégale)

***1) Choix des hypothèses :***

$H0$: $\mu1$ = $\mu2$

$H1$: $\mu 1 \neq \mu 2$

1) ***Calcul de la statistique de test observée***
***$n_1 < 30$, $n_2 < 30$ $\sigma_X$ et $\sigma_Y$ inconnus mais égaux et loi Normale***

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_C\sqrt{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = 2.595$$

$$avec\ {S_C}^2 = \frac{(n_1 - 1)S_X^2 + (n_2 - 1)S_Y^2}{n_1 + n_2 - 2} = 0.199^2$$

3) Identification de seuil critique :

Alors on cherche le seuil critique dans la table 3 de Student

$\alpha = 0.05 \quad ddl = n A + n B - 2 = 25 \quad t_\alpha = 2.06$

***Décision :***

***Test bilatéral : (égale contre inégale)***

$$-\infty \xrightarrow[de\ HO]{Zone\ de\ rejet} -t_\alpha \xrightarrow[de\ HO]{Zone\ d'acceptation} t_\alpha \xrightarrow[de\ HO]{Zone\ de\ rejet} +\infty$$

$T_0 \notin [\ -t_\alpha\ ;\ t_\alpha\ ]$

***Décision statistique :*** *la statistique de test se trouve dans la zone de rejet de $H0$*

***Décision pratique :*** *On conclut que les malades atteints de l'hépatite alcoolique présentent une valeur du manque différente de celle des sujets sains*

***Exercice 6 :*** *Les spécifications d'un médicament indiquent que chaque comprimé doit contenir enmoyenne 1.5g de substance active.*

*100 comprimés sont choisis au hasard dans la production, puis analysés.*

*Les mesures en g des quantités de substance active étant trop nombreuses, seules leursomme et la somme de leurs carrés vous sont données :*

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 155 \qquad \sum_{i=1}^{100} {x_i}^2 = 248$$

*Au risque de 5%, pouvez-vous dire que la production respecte l'indication mentionnée ?*

**Solution :**(Test de conformité cas 2)

Dans l'énoncé vous avez les deux sommes $\sum(x_i)$ $et \sum(x_i)^2$, alors : $m = \frac{\sum(x_i)}{n} = 1.55$

Calculer l'écart-type empirique de l'échantillon

$\tilde{S} = \sqrt{\frac{\sum(x_i)^2}{n} - m^2}$ $=\sqrt{0.0775}$ $=0.27838$

Pour identifier l'écart-type de l'échantillon $S$, on utilise la relation : $S = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\tilde{S}$ $=0.2797$

***Choix des hypothèses :***

$H0$: $m = \mu$

$H1$: $m \neq \mu$

Il s'agit d'un test bilatéral (égale contre inégale)

***2) Calcul de la statistique de test observée :*** $T_0 = \frac{m-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ = 1.7876

3) Identification de seuil critique : $\boldsymbol{n} > \mathbf{30}$ $\boldsymbol{\sigma}$ Inconnu

Alors on cherche le seuil critique dans la table 2(de la variable normale)

$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.05}$ $\overline{Z}_{\alpha} = \overline{Z}_{0.05}$ = =1.96

*Test bilatéral : (égale contre inégale)*

$$-\infty \xrightarrow[de\ HO]{Zone\ de\ rejet} -1.96 = -\bar{Z}_{\alpha} \xrightarrow[de\ HO]{\substack{Zone \\ d'acceptation}} \bar{Z}_{\alpha} = 1.96 \xrightarrow[de\ HO]{Zone\ de\ rejet} +\infty$$

-1.96 <$T_0$ <1.96

***4) Décision :***

***Décision statistique :*** La statistique de test observée se trouve dans la zone d'acceptation de $\boldsymbol{H0}$ .

***Décision pratique :*** La production respecte l'indication mentionnée.

**Exercice 7 :** *On désir étudier l'effet d'une nouvelle stratégie de traitement du diabète en mesurant l'effet sur la glycémie.*

*On dose la glycémie (en g\l) chez 15 sujets avant et après le début du nouveau protocole (série A) et 3 mois après (série B)*

| Sujets | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 2.47 | 3.09 | 2.14 | 2.47 | 3.06 | 2.72 | 2.29 | 1.9 |
| B | 2.3 | 2.96 | 2.23 | 2.34 | 2.84 | 2.59 | 2.15 | 1.88 |
| Sujets | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | |
| A | 2.34 | 2.75 | 2.67 | 2.8 | 2.51 | 2.23 | 2.2 | |
| B | 2.32 | 2.65 | 2.68 | 2.58 | 2.43 | 2.02 | 2.17 | |

*Peut-on conclut un abaissement de la glycémie grâce au nouveau protocole ? ( $\alpha$ = 0.05)*

## Solution : (Des échantillons appariés)

| Sujets | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Différences $D_i$ | 0.17 | 0.13 | -0.09 | 0.13 | 0.22 | 0.13 | 0.14 | 0.02 |
| Sujets | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | |
| Différences $D_i$ | 0.02 | 0.1 | -0.01 | 0.22 | 0.08 | 0.21 | 0.03 | |

***Différence= avant-après***

$\overline{\boldsymbol{D}} = \frac{\sum \boldsymbol{D_i}}{\boldsymbol{n}} = 1.5/\ 15\ =\ 0.10$ $\quad \boldsymbol{S_D} = \sqrt{\frac{\sum(\boldsymbol{D_i}-\overline{\boldsymbol{D}})^2}{\boldsymbol{n-1}}} =$ ***0.0911***

***Remarque :*** *directement utiliser la touche $x\sigma n-1$ dans la calculatrice pour identifier $S_D$*

*1)* **Choix des hypothèses :** *(Cas des échantillons appariés)*

$H0$: $\mu = 0$

$H1$: $\mu > 0$

*Il s'agit d'un test unilatéral à droite (égale contre supérieure) (Car on discute ici l'abaissement de la glycémie, c'est-à-dire la glycémie avant supérieure à la glycémie après)*

***2) Calcul de la statistique de test observée :***

$\boldsymbol{T_0} = \frac{\overline{\boldsymbol{D}}}{\frac{\boldsymbol{S_D}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}}$ ***= 4.25***

***3) Identification de seuil critique :***

$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0.05}$ $\quad$ $\boldsymbol{ddl} = \boldsymbol{n-1}$ ***=14*** $\quad$ $\boldsymbol{t_{2\alpha}}$***= 1.761***

***4) Décision :***

$T_0 > t_{2\alpha}$ ***4.25 > 1.761***

***Test unilatéral à droite : (égale contre supérieure)***

$$-\infty \xrightarrow[\text{de HO}]{\text{Zone d'acceptation}} t_{2\alpha} = \mathbf{1.761} \xrightarrow[\text{de HO}]{\text{Zone de rejet}} +\infty$$

***Décision statistique :*** *La statistique de test observée se trouve dans la zone de rejet de H0, alors on accepte H1.*

***Décision pratique :*** *La glycémie est abaissée après administration de la nouvelle stratégie*