Université de Batna2

Faculté de médecine

1ère année médecine

Série d'exercice N°3

Analyse combinatoire

Exercice 01

Combien de nombres différents de 6 chiffres existe-t-il

a) S'il n'y a aucune restriction ?

c) si les répétitions de chiffres sont exclues ?

Corrigé

Le premier chiffre ne peut pas être 0 car si tel était, le nombre aurait 5 chiffres.
a) On applique le principe de dénombrement et on obtient
$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times = 9000000$.

c) On applique toujours le même principe mais cette fois-ci on aura $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times = 1360080$, car chaque chiffre choisi ne peut plus être utilisé à nouveau

Exercice 02

a) Dénombrer les anagrammes du mot MATHS.
b) Combien y a-t-il de nombres de 10 chiffres tous différents alternant chiffres pairs et impairs ?
Notons que les nombres 1234567890 et 2345678901 sont convenables, mais pas le nombre 0123456789 qui n'a en fait que 9 chiffres (il s'écrit 123456789).

Corrigé

a) Une anagramme correspond à une permutation des lettres d'un mot.
Comme MATHS a 5 lettres toutes différentes, on calcule donc : $5! = 120$
Le mot MATHS possède donc $\boxed{120}$ anagrammes.
b) Il y a 4 possibilités paires et 5 possibilités impaires pour le premier chiffre (qui ne peut être nul).
Supposons que le premier chiffre soit pair. Cela donne 4 possibilités (car il ne peut être nul).
On répartit alors les 4 autres chiffres pairs sur leurs emplacements (de rangs 3, 5, 7 et 9). Cela donne $4!$ permutations possibles.
On répartit les 5 chiffres impairs sur leurs emplacements (de rangs 2, 4, 6, 8 et 10). Cela donne $5!$ permutations possibles.
On calcule alors : $4 \times 4! \times 5! = 11520$
Il y a **11520** nombres convenables dont le premier chiffre est pair.
Comptons de même les nombres convenables dont le premier chiffre est impair.
Supposons donc que le premier chiffre soit impair. Cela donne 5 possibilités.
On répartit alors les 4 autres chiffres impairs sur leurs emplacements (de

rangs 3, 5, 7 et 9). Cela donne 4 ! permutations possibles.
On répartit les 5 chiffres pairs sur leurs emplacements (de rangs 2, 4, 6, 8 et 10). Cela donne 5 ! permutations possibles.
On calcule alors : 5×4 ! ×5 ! =5 ! ×5 ! =14400
Il y a **14400** nombres convenables dont le premier chiffre est impair.
On utilise alors le **principe additif**.
On somme : 11520+14400=25920
Il y a donc $\boxed{25920}$ nombres de 10 chiffres tous différents alternant chiffres pairs et impairs.

Exercice 03

De 25 calculatrices, 5 ont un défaut. On en choisit 4 de manière aléatoire.
Quelle est le nombre de façons :
Aucune des 4 calculatrices soit défectueuse ?
Corrigé
12650 possibilités de choisir 4 machines parmi 25 sans contraintes.
Le nombre de choisir "4 machines non défectueuses" est de C_{20}^{4}= 4845 (le choix de 4 calculatrices parmi 20 en état de marche)

Exercice 04

Pour se mettre en tenue réglementaire un chirurgien possède :

Sept Callots (3 bleus et 4 blancs)

Six Bavettes (3 bleues et 3 blanches)

Huit Blouses (5 bleues et 3 blanches)

a) De combien de façons peut-il s'habiller ?
b) Le chirurgien refuse de s'habiller tout en bleus, quels est le nombre de tenues qu'il pourra mettre ?

Corrigé

a) Le chirurgien peut s'habiller de : $7 \times 6 \times 8 = 336$ façons
b) Puisque le chirurgien refuse de s'habiller tout en bleu, les possibilités sont schématisées comme suit :

Callots bleus	Bavettes bleues	Blouses bleues	Nbre de façons
0	0	0	$4 \times 3 \times 3 = 36$
1	0	0	$3 \times 3 \times 3 = 27$
1	1	0	$3 \times 3 \times 3 = 27$
1	0	1	$3 \times 3 \times 5 = 45$
0	1	0	$4 \times 3 \times 3 = 36$
0	1	1	$4 \times 3 \times 5 = 60$
0	0	1	$4 \times 3 \times 5 = 60$

On obtient 291 façons

Exercice 5

Dans un groupe il y a 10 hommes, 8 femmes et 7 enfants. De combien de manières différentes peut-on les placer sur une ligne si

a) ils peuvent se placer librement ?

b) Les hommes désirent rester groupés ?

Corrigé

a) On considère les individus comme étant tous discernables, nous sommes dans le cas d'une permutation de 25 éléments, le résultat est 25 ! permutations possibles.

b) On considère les hommes comme étant un seul et unique individu. Ayant regroupé les 8 hommes il nous reste 1+8+7 = 16 éléments à permuter donc 16 !

Mais, à l'intérieur du groupe d'homme nous avons 10 ! permutations possibles. En appliquant le principe fondamental du dénombrement on obtient finalement 16 ! ×10 !

Exercice 06

L'enseignant de Biostatistique dispose de 6 exercices de dénombrement, 15 exercices statistique univariée et 9 statistique double.

a) Il compose un sujet de 1er EMD contenant un exercice de dénombrement, un statistique univariée et un exercice de statistique double.
   L'ordre des exercices n'a pas d'importance.
   Combien de devoirs différents peut-il composer ?
b) L'enseignant se rend compte que de tels sujets sont trop long. Il pense qu'un sujet contenant exactement 2 exercices de types différents suffit.
   L'ordre des exercices n'a toujours pas d'importance.
   Combien de sujets différents peut-il finalement composer ?

Corrigé

a) On utilise le **principe multiplicatif**. On calcule : $6\times15\times9=810$
   Le professeur peut composer **810 sujets différents**.
b) On cherche combien y-a-t-il de sujets contenant un exercice de dénombrement et un exercice statistique univariée.
   On calcule: $6\times15=90$
   Le professeur peut composer 90 sujets de ce type.
   On fait de même avec les sujets contenant un exercice de dénombrement et un exercice de statistique bivariée.
   On calcule: $6\times9=54$
   Le professeur peut composer 54 sujets de ce type.
   On recommence avec les sujets contenant un exercice de statistique univariée et un exercice de statistique double.
   On calcule: $15\times9=135$
   Le professeur peut composer 135 sujets de ce type.
   On utilise le **principe additif**. On calcule : $90+54+135=279$
   Le professeur peut composer **279 sujets différents**.

Exercice 7

L'états de santé d'un malade nécessite la prescription de deux sirops différents et de trois variétés de comprimés. Son médecin traitant détient 3 types de sirops et 4 variétés de comprimés qui auraient des effets analogues :

De combien de façons différentes pourra t il rédiger son ordonnance, Sachant toutefois qu'un certain sirop ne doit en aucun cas être pris en même temps qu'un certain comprimé.

Corrigé

- Nombre total d'ordonnances que le médecin peut prescrire sans tenir comte du sirop x et de comprimés y :

$$\underbrace{C_3^2} \times \underbrace{C_4^3} = 12 \text{ Ordonnances}$$

- Nombre d'ordonnances ou le sirop x et le comprimé y sont prescrits ensemble :
- $\underbrace{\underbrace{C_1^1}_{Sirop\ x} \times C_{3-1}^1}_{Sirops} \times \underbrace{\underbrace{C_1^1}_{Comprimé\ y} \times C_{4-1}^2}_{Comprimés} = 6$ Ordonnances

  D'où le nombre d'ordonnances ou le sirop x et le comprimé y ne figurent pas ensemble est 12-6=6

Exercice 08 :

Une ville d'Algérie dispose de 5 cliniques. Une intoxication alimentaire a touché 15 personnes. De combien de façons ces 15 personnes intoxiquées peuvent-elles être réparties sur les 5 cliniques (au regard du nombre d'intoxiqués affectés à chaque clinique : les intoxiqués ne sont pas discernables).

1. Si le nombre d'intoxiqués que reçoit chaque clinique n'est pas limité ?

2. Si une certaine clinique des 5 reçoit exactement 7 personnes intoxiquées ?

3. Si deux certaines cliniques (A et B) reçoivent entrent-elles 10 intoxiqués ?

Corrigé

1) Nous avons 5 cliniques et 15 intoxiqués.

L'ordre ne doit pas être respecté car les intoxiqués ne sont pas discernables. Il y a répétition car plusieurs intoxiqués peuvent aller dans la même clinique. La formule du dénombrement à utiliser est donc la combinaison avec répétition des 15 intoxiqués dans les 5 cliniques : $K_5^{15} = C_{19}^{15}$= 3 876 résultats possibles.

2) Si une certaine clinique (par exemple A connue) reçoit exactement 7 intoxiqués ; ces 7 intoxiqués vont être choisis de C_{15}^{7} = 6435 manières différentes et le reste des intoxiqués va être distribué sur les 4 cliniques restantes :

$C_{15}^{7}K_{4}^{8} = 1061775$ Résultats possibles

3) Les cliniques connues A et B reçoivent entre-elles 10 intoxiqués et ces 10 intoxiqués vont être choisis parmi 15 de C_{15}^{10} = 3003 manières différentes :

$$C_{15}^{10}K_{2}^{10}K_{3}^{5} = 693693$$

Cas différents.