

Série d'exercice N°3

Analyse combinatoire

Exercice 01

Combien de nombres différents de 6 chiffres existe-t-il

- a) S'il n'y a aucune restriction ?
- c) si les répétitions de chiffres sont exclues ?

Corrigé

Le premier chiffre ne peut pas être 0 car si tel était, le nombre aurait 5 chiffres.

a) On applique le principe de dénombrement et on obtient

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000000.$$

c) On applique toujours le même principe mais cette fois-ci on aura $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 136080$, car chaque chiffre choisi ne peut plus être utilisé à nouveau

Exercice 02

- a) Dénombrer les anagrammes du mot MATHS.
- b) Combien y a-t-il de nombres de 10 chiffres tous différents alternant chiffres pairs et impairs ?
Notons que les nombres 1234567890 et 2345678901 sont convenables, mais pas le nombre 0123456789 qui n'a en fait que 9 chiffres (il s'écrit 123456789).

Corrigé

- a) Une anagramme correspond à une permutation des lettres d'un mot.
Comme MATHS a 5 lettres toutes différentes, on calcule donc : $5! = 120$
Le mot MATHS possède donc 120 anagrammes.
- b) Il y a 4 possibilités paires et 5 possibilités impaires pour le premier chiffre (qui ne peut être nul).
Supposons que le premier chiffre soit pair. Cela donne 4 possibilités (car il ne peut être nul).
On répartit alors les 4 autres chiffres pairs sur leurs emplacements (de rangs 3, 5, 7 et 9). Cela donne $4!$ permutations possibles.
On répartit les 5 chiffres impairs sur leurs emplacements (de rangs 2, 4, 6, 8 et 10). Cela donne $5!$ permutations possibles.
On calcule alors : $4 \times 4! \times 5! = 11520$
Il y a **11520** nombres convenables dont le premier chiffre est pair.
Comptons de même les nombres convenables dont le premier chiffre est impair.
Supposons donc que le premier chiffre soit impair. Cela donne 5 possibilités.
On répartit alors les 4 autres chiffres impairs sur leurs emplacements (de

rangs 3, 5, 7 et 9). Cela donne $4!$ permutations possibles.
 On répartit les 5 chiffres pairs sur leurs emplacements (de rangs 2, 4, 6, 8 et 10). Cela donne $5!$ permutations possibles.
 On calcule alors : $5 \times 4! \times 5! = 5! \times 5! = 14400$
 Il y a **14400** nombres convenables dont le premier chiffre est impair.
 On utilise alors le **principe additif**.
 On somme : $11520 + 14400 = 25920$
 Il y a donc 25920 nombres de 10 chiffres tous différents alternant chiffres pairs et impairs.

Exercice 03

De 25 calculatrices, 5 ont un défaut. On en choisit 4 de manière aléatoire.
 Quelle est le nombre de façons :
 Aucune des 4 calculatrices soit défectueuse ?

Corrigé

12650 possibilités de choisir 4 machines parmi 25 sans contraintes.
 Le nombre de choisir "4 machines non défectueuses" est de $C_{20}^4 = 4845$ (le choix de 4 calculatrices parmi 20 en état de marche)

Exercice 04

Pour se mettre en tenue réglementaire un chirurgien possède :

Sept Callots (3 bleus et 4 blancs)

Six Bavettes (3 bleues et 3 blanches)

Huit Blouses (5 bleues et 3 blanches)

- a) De combien de façons peut-il s'habiller ?
- b) Le chirurgien refuse de s'habiller tout en bleus, quels est le nombre de tenues qu'il pourra mettre ?

Corrigé

- a) Le chirurgien peut s'habiller de : $7 \times 6 \times 8 = 336$ façons
- b) Puisque le chirurgien refuse de s'habiller tout en bleu, les possibilités sont schématisées comme suit :

Callots bleus	Bavettes bleues	Blouses bleues	Nbre de façons
0	0	0	$4 \times 3 \times 3 = 36$
1	0	0	$3 \times 3 \times 3 = 27$
1	1	0	$3 \times 3 \times 3 = 27$
1	0	1	$3 \times 3 \times 5 = 45$
0	1	0	$4 \times 3 \times 3 = 36$
0	1	1	$4 \times 3 \times 5 = 60$
0	0	1	$4 \times 3 \times 5 = 60$

On obtient 291 façons

Exercice 5

Dans un groupe il y a 10 hommes, 8 femmes et 7 enfants. De combien de manières différentes peut-on les placer sur une ligne si

- a) ils peuvent se placer librement ?
- b) Les hommes désirent rester groupés ?

Corrigé

a) On considère les individus comme étant tous discernables, nous sommes dans le cas d'une permutation de 25 éléments, le résultat est 25 ! permutations possibles.

b) On considère les hommes comme étant un seul et unique individu. Ayant regroupé les 8 hommes il nous reste $1+8+7 = 16$ éléments à permuter donc 16 !

Mais, à l'intérieur du groupe d'homme nous avons 10 ! permutations possibles. En appliquant le principe fondamental du dénombrement on obtient finalement $16 ! \times 10 !$

Exercice 06

L'enseignant de Biostatistique dispose de 6 exercices de dénombrement, 15 exercices statistique univariée et 9 statistique double.

- a) Il compose un sujet de 1^{er} EMD contenant un exercice de dénombrement, un statistique univariée et un exercice de statistique double.
L'ordre des exercices n'a pas d'importance.
Combien de devoirs différents peut-il composer ?
- b) L'enseignant se rend compte que de tels sujets sont trop long. Il pense qu'un sujet contenant exactement 2 exercices de types différents suffit.
L'ordre des exercices n'a toujours pas d'importance.
Combien de sujets différents peut-il finalement composer ?

Corrigé

- a) On utilise le **principe multiplicatif**. On calcule : $6 \times 15 \times 9 = 810$
Le professeur peut composer **810 sujets différents**.
- b) On cherche combien y-a-t-il de sujets contenant un exercice de dénombrement et un exercice statistique univariée.
On calcule: $6 \times 15 = 90$
Le professeur peut composer 90 sujets de ce type.
On fait de même avec les sujets contenant un exercice de dénombrement et un exercice de statistique bivariée.
On calcule: $6 \times 9 = 54$
Le professeur peut composer 54 sujets de ce type.
On recommence avec les sujets contenant un exercice de statistique univariée et un exercice de statistique double.
On calcule: $15 \times 9 = 135$
Le professeur peut composer 135 sujets de ce type.
On utilise le **principe additif**. On calcule : $90 + 54 + 135 = 279$
Le professeur peut composer **279 sujets différents**.

Exercice 7

L'états de santé d'un malade nécessite la prescription de deux sirops différents et de trois variétés de comprimés. Son médecin traitant détient 3 types de sirops et 4 variétés de comprimés qui auraient des effets analogues :

De combien de façons différentes pourra t il rédiger son ordonnance, Sachant toutefois qu'un certain sirop ne doit en aucun cas être pris en même temps qu'un certain comprimé.

Corrigé

- Nombre total d'ordonnances que le médecin peut prescrire sans tenir compte du sirop x et de comprimés y :

$$\underbrace{C_3^2} \times \underbrace{C_4^3} = 12 \text{ Ordonnances}$$

- Nombre d'ordonnances ou le sirop x et le comprimé y sont prescrits ensemble :

$$\underbrace{C_1^1 \times C_{3-1}^1}_{\substack{\text{Sirop } x \\ \text{Sirops}}} \times \underbrace{C_1^1 \times C_{4-1}^2}_{\substack{\text{Comprimé } y \\ \text{Comprimés}}} = 6 \text{ Ordonnances}$$

D'où le nombre d'ordonnances ou le sirop x et le comprimé y ne figurent pas ensemble est $12-6=6$

Exercice 08 :

Une ville d'Algérie dispose de 5 cliniques. Une intoxication alimentaire a touché 15 personnes. De combien de façons ces 15 personnes intoxiquées peuvent-elles être réparties sur les 5 cliniques (au regard du nombre d'intoxiqués affectés à chaque clinique : les intoxiqués ne sont pas discernables).

1. Si le nombre d'intoxiqués que reçoit chaque clinique n'est pas limité ?
2. Si une certaine clinique des 5 reçoit exactement 7 personnes intoxiquées ?
3. Si deux certaines cliniques (A et B) reçoivent entrent-elles 10 intoxiqués ?

Corrigé

1) Nous avons 5 cliniques et 15 intoxiqués.

L'ordre ne doit pas être respecté car les intoxiqués ne sont pas discernables. Il y a répétition car plusieurs intoxiqués peuvent aller dans la même clinique. La formule du dénombrement à utiliser est donc la combinaison avec répétition des 15 intoxiqués dans les 5 cliniques : $K_5^{15} = C_{19}^{15} = 3\,876$ résultats possibles.

2) Si une certaine clinique (par exemple A connue) reçoit exactement 7 intoxiqués ; ces 7 intoxiqués vont être choisis de $C_{15}^7 = 6435$ manières différentes et le reste des intoxiqués va être distribué sur les 4 cliniques restantes :

$$C_{15}^7 K_4^8 = 1061775 \text{ Résultats possibles}$$

3) Les cliniques connues A et B reçoivent entre-elles 10 intoxiqués et ces 10 intoxiqués vont être choisis parmi 15 de $C_{15}^{10} = 3003$ manières différentes :

$$C_{15}^{10} K_2^{10} K_3^5 = 693693$$

Cas différents.