Corrigé du devoir N 1

Exercice 1 *Soient X et Y deux variables aléatoires* ***continues et indépendantes****.*
Sachant que $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy$ et $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx$.

1- (2pts)

$$\begin{aligned}
E(X+Y) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} (x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (x+y)f(x,y)dy\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy + \int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dy\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx\right] dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy = E(X)+E(Y).
\end{aligned}$$

2- (1pt) Comme X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

$$\begin{aligned}
Var(X+Y) &= E\left[(X+Y)^2\right] - E^2(X+Y) \\
&= E\left[X^2+Y^2+2XY\right] - \left[E^2(X)+E^2(Y)+2E(X)E(Y)\right] \\
&= E(X^2) - E^2(X) + E(Y^2) - E^2(Y) + 2E(XY) - 2E(X)E(Y) \\
&= Var(X) + Var(Y).
\end{aligned}$$

3- (1pt) Nous savons que : Si deux variables X et Y sont indépendantes donc la covariance est nulle $Cov(X,Y) = 0$. Mais la réciproque est fausse !
Contre-exemple. Il suffit de trouver deux variables X et Y de covariance nulle et qui ne sont pas indépendantes. Soit Z une variable discrète qui peut prendre les valeurs 1 ou -1 de manière équiprobable. Soit X une variable aléatoire quelconque indépendante de Z. Alors X et $Y = z$ X ne sont clairement pas indépendantes. Cependant $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(Z)Var(X) = 0$.

Exercice 2 *Notons par* ***X :*** *la variable aléatoire qui correspond au nombre de boules blanches.* $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$
Y : *la variable aléatoire qui correspond au nombre de boules vertes.*$Y(\Omega) = \{0,1,2,3\}$
mais $X+Y \leq 3$.

1. ***(2pts)*** *La loi du couple (X,Y) est définie sur l'ensemble*

$$(X,Y)(\Omega) = X(\Omega)\times Y(\Omega) = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(0,2),(2,0),(0,3),(3,0),(1,2),(2,1)\}$$

et par les probabilités $p_{i,j} = P(X=i \cap Y=j) = \dfrac{C_3^i C_4^j C_5^{3-i-j}}{C_{12}^3}$

On obtient alors le tableau :

$X\diagdown Y$	0	1	2	3	Loi de X ($p_{i.}$)
0	10/220	30/220	15/220	1/220	56/220
1	40/220	60/220	12/220	0	112/220
2	30/220	18/220	0	0	48/220
3	4/220	0	0	0	4/220
Loi de Y ($p_{.j}$)	84/220	108/220	27/220	1/220	220/220=1

2. ***(2pts)****Pour les lois marginales, il suffit de faire les sommes des lignes du tableau précédent pour le loi de Y et les sommes des colonnes pour la loi de X, comme suit :*

$X(\Omega)$	*0*	*1*	*2*	*3*	*totale*
$(p_{i\cdot})$	*56/220*	*112/220*	*48/220*	*4/220*	*1*

La loi de X

$Y(\Omega)$	*0*	*1*	*2*	*3*	*totale*
$(p_{\cdot j})$	*84/220*	*108/220*	*27/220*	*1/220*	*1*

La loi de Y

– *On constate sans difficulté que les variables X et Y* ***ne sont pas indépendantes*** *car le tableau de la loi conjointe contient des 0.*

3. ***(2+2pts)****La covariance*

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{i,j=0}^{3} x_i y_j P(X = x_i \cap Y = y_j) \\ &= \frac{60}{220} + 2\frac{12}{220} + 2\frac{18}{220} \\ &= \frac{6}{11}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=0}^{3} x_i P(X = x_i)) \\ &= 0\frac{56}{220} + 1\frac{112}{220} + 2\frac{48}{220} + 3\frac{4}{220} \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j=0}^{3} y_j P(Y = y_j) \\ &= 0\frac{84}{220} + 1\frac{108}{220} + 2\frac{27}{220} + 3\frac{1}{220} \\ &= \frac{33}{44}. \end{aligned}$$

Enfin,

$$Cov(X,Y) = \frac{6}{11} - 1\frac{33}{11} = \frac{-9}{44}$$

Lorsque $Cov(X,Y) < 0$*, on dit que les variables X et Y sont négativement corrélées. L'interprétation d'une covariance négative est alors la suivante : plus X est élevé, plus, en moyenne, Y est petit (et réciproquement).*

Exercice 3 *La loi conjointe de X et Y est donnée par la densité :*

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{4}(x+y)e^{-y} \ \text{pour}\ y \geq 0,\ 0 \leq x \leq 2.$$

1- ***(2pts)****La densité marginale de X est donnée par :* $f_X(x) = \int_0^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy$ *pour tout* $x \in [0,2]$.

$$f_X(x) = \int_{y\geq 0} \frac{1}{4}(x+y)e^{-y}dy = \frac{1}{4}\left[x\int_0^{+\infty} e^{-y}dy + \int_0^{+\infty} ye^{-y}dy\right] = \frac{x+1}{4}\ \forall x \in [0,2]$$

*2- **(2pts)** Non, on n'a pas une indépendance car la loi conjointe f_{XY} n'est pas produit d'une fonction de x et d'une fonction de y.*

*3- **(2pts)** L'espérance $E(X)$.*

$$E(X) = \int_0^2 x \times \frac{x+1}{4} dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{7}{6}.$$

*4- **(2pts)** On calcule $E(Z) = E(12XY) = 12\int_0^{+\infty}\int_0^2 xy \times \frac{1}{4}(x+y)e^{-y}dxdy$*

$$\begin{aligned} E(Z) &= \frac{12}{4}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^2 (x^2y + xy^2)e^{-y}dx\right]dy \\ &= 3\int_0^{+\infty}\left[(\frac{x^3}{3}y + \frac{x^2}{2}y^2)e^{-y}\right]_0^2 dy \\ &= 3\int_0^{+\infty}(\frac{8}{3}y + 2y^2)e^{-y}dy = 3 \times \frac{20}{3} = 20. \end{aligned}$$

utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} ye^{-y}dy$.
Posons $u = y \longrightarrow du = dy$ et $dv = e^{-y}dy \longrightarrow v = -e^{-y}$.
On a $\int udv = uv - \int v\,du$, ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} ye^{-y}dy = -ye^{-y}|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy = -e^{-y}|_0^{+\infty} = 1.$$