Solution de la série de TD N°2

Solution de l'exercice 01:

1) On a pour $x \in \mathbb{R}^+$:

Si $x = 0,\ f_n(x) = 0$ pour tout $n \geq 1$

Si $x \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pout tout $n \geq 1$

Alors $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

2) On a $\max_{x\geq 0} f_n(x) = \max_{x\geq 0} |f_n(x)| = \max_{x\geq 0} \left|\frac{n^2x}{1+n^3x^3}\right| = \frac{2n}{3(\sqrt{2})^{1/3}} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$

donc on a pas une convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Solution de l'exercice 02:

1) On a pour $x \in [0,1]$:

Si $x = 0,\ f_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$

Si $0 < x \leq 1$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $n \geq 1$

Alors $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

2) On a :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x^n}{n^3(1+x^n)}\right| = \frac{1}{2n^3} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

d'où la convergence uniforme de $\{f_n\}_{n\geq 1}$

Solution de l'exercice 03:

1) On a pour $x \in \mathbb{R}$:

Si $x \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pout tout $n \geq 1$

Alors $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ (sachant que $f_n(0) = 0$).

2) On a $f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\sin^2(n\frac{\pi}{2n})}{n\frac{\pi}{2n}} = \frac{2}{\pi}$, donc on trouve que

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \ |f_n(x)| \geq \frac{2}{\pi}$$

et on aura $\|f_n\|_\infty$ ne tend pas vers zéro , donc $\{f_n\}_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

$3)$ Posant $E = \{x : x \geq a : a > 0\}$, alors on a:

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in E} \ |f_n(x)| \leq \frac{1}{na} \underset{n\to\infty}{n \to 0}$$

d'où la convergence uniforme si $x \in E$.

Solution de l'exercice 04:

$1)$ Si $x = 0$ ou $x = \dfrac{\pi}{2}$ on a $U_n(x) = 0$, d'autre part on a

$$\lim_{n\to\infty} U_n(x) \sim \lim_{n\to\infty} nt^n = 0 \quad \text{pour } (0 < t < 1).$$

donc $\{U_n\}_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,\dfrac{\pi}{2}]$.

$2)$ Calculant l'intégral I_n en faisant un changement de variable tel que $cosx = t$, il en résulte que

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} n \ sinx(cosx)^n \ dx = \int_0^1 nt^n \ dt = \frac{n}{n+1}$$

et on a alors

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to\infty} \ U_n \ dx \ = 0$$

donc on a pas une convergence uniforme sur $[0,\dfrac{\pi}{2}]$.

Solution de l'exercice 05:

$1)$ On a pour $x \in [0,1]$:

Si $x = 0,\ f_n(x) = 0$ pour tout $n \geq 1$

Si $x \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pout tout $n \geq 1$

Alors $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

$2)$ On a

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}\, dx = \frac{ln(1 + 2^n n)}{2n}$$

on a aussi

$$\lim_{n \to \infty} I_n = \lim_{n \to \infty} \frac{ln(1 + 2^n n)}{2n} = \frac{ln 2}{2} \neq \int_0^1 \lim_{n \to} f_n(x)\, dx = 0$$

donc on a pas une convergence uniforme.

3) On a $f_n(\frac{1}{2^n}) = \frac{1}{1 + \frac{n}{2^n}}$ donc $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| > \frac{1}{1 + \frac{n}{2^n}} \to 1 \neq 0$ pour tout $n \geq 1$

Solution de l'exercice 06:

Posant $U_n(x) = x(1 - x)^n$, si $x = 0$ alors la somme de la série de terme général $U_n(x)$ est nulle, si $x \neq 0$ alors la série converge ssi

$|1 - x| < 1$, donc $0 < x < 2$ et dans ce cas là on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} x(1 - x)^n = 1$$

Ça nous donne que $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ converge simplement vers une fonctions f telle que $f(0) = 0$ et $f(x) = 1$ si $x \neq 0$ donc d'après le théorème du continuité on déduit que $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ ne converge pas uniformément.

Solution de l'exercice 07:

Dans cette exercice on pose $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$

1) En utilise le critère de d'Alembert on trouve que .

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = e^{-x}$$

donc $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge simplement si $e^{-x} < 1$et donc si $x > 0$ et il en résulte que D$_f$ $= \{x : x > 0\}$

2) Soit $x \geq a > 0$, dans ce cas là on a

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \geq a} \left| \frac{e^{-nx}}{n} \right| = \frac{e^{-na}}{n}$$

qui est le terme général d'une série convergente (d'après la 1°er question), donc $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge normalement si $x \geq a > 0$, et alors la convergence et aussi uniforme sur le même domaine.

Le théorème de continuité nous donne que f est continue si $x \geq a > 0.$

3) On a pour tout $n \geq 1$ les fonctions f_n sont dérivables sur $[a, \infty[$ et on a $f_n^{'}(x) = -e^{-nx}$ pour tout $x \in [a, \infty[$, de plus on a:

$$\|f_n^{'}\|_\infty = \sup_{x \geq a} |e^{-nx}| = e^{-na}$$

Qui est le terme général d'une série géométrique convergente, donc on déduit que $\sum_{n \geq 1} f_n^{'}(x)$ converge normalement.

Alors d'après le théorème de dérivation on trouve que f est dérivable sur $[a, \infty[$ et on a:

$$f^{'}(x) = \sum_{n \geq 1} f_n^{'}(x) = \sum_{n \geq 0} -e^{-nx} - 1 = \frac{e^{-x} - 2}{1 - e^{-x}}$$

<u>Solution de l'exercice 08:</u>

1) Posant $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^3}$ pour tout $n \geq 1$, On a :

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$$

Et comme la série $\sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^3}$ est convergente on déduit que $\sum_{n \geq 1} \dfrac{\sin nx}{n^3}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

2) D'après la première question on a vue que $\sum_{n \geq 1} \dfrac{\sin nx}{n^3}$ converge normalement (donc uniformément convergente), et pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sin kx}{k^3}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (somme finie des fonctions continue)

Alors le théorème de continuité nous assure que $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{sin\ nx}{n^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$3)$ Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle est intégrable sur tout intervalle E de $\mathbb{R}$, et comme la série $\sum_{n\geq 1} \frac{sin\ nx}{n^3}$ converge uniformément on a:

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{sin\ nx}{n^3} dx = \sum_{n\geq 1} \int_0^{\pi} \frac{sin\ nx}{n^3} dx = \sum_{n\geq 1} \frac{1 - cos\ n\pi}{n^4}$$

et on garde que les termes impairs puisque dans le cas où n est pair on a $1 - cos\ n\pi = 0$.

$4)$ On a pour tout $n \geq 1$, $f_n^{'}(x) = \frac{cos\ nx}{n^2}$,et de la même façon que la première question on peut prouver la convergence normale de $\sum_{n\geq 1} f_n^{'}(x)$, donc comme $\sum_{n\geq 1} \frac{sin\ nx}{n^3}$ converge normalement (simplement) et comme $\sum_{n\geq 1} f_n^{'}(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de dérivation on déduit que f est dérivable et on a $f^{'}(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{cos\ nx}{n^2}$.

<u>Solution de l'exercice 09:</u>

$1)$ En appliquant le critère de Cauchy, pour tout $x \neq 0$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{nxe^{-nx^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|x|}\, e^{-x^2} = e^{-x^2} < 1$$

et si $x = 0$ on a : $\sum_{n\geq 1} u_n(x) = 0$, donc $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

$2)$ Soit $x \in [1,2]$; on a :

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x\in[1,2]} |nxe^{-nx^2}| = 2ne^{-n}$$

Tel que $\sum_{n\geq 1} 2ne^{-n}$ est convergente (critère de Cauchy), donc on a $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est normalement convergente, donc uniformément convergente.

$3)$ De la même façon que la deuxième question, on a :

$$\|v_n\|_\infty = \sup_{x\in[1,2]} |-\frac{1}{2}e^{-nx^2}| = \frac{1}{2}e^{-n}$$

et tel que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2}e^{-n}$ est convergente (série géométrique), donc on obtient la convergence normal et uniforme de $\sum_{n\geq 1} v_n(x)$ sur $[1,2]$.

Pour la fonction $g(x)$, on a :

$$g(x) = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} e^{-nx^2} = -\frac{1}{2}\Big(\sum_{n\geq 0} e^{-nx^2} - 1\Big) = -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-e^{-x^2}} - 1\Big)$$

De plus vu que g est dérivable sur $[1,2]$, et sa dérivé $g^{'}(x) = \dfrac{xe^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2}$ est continue sur $[1,2]$ donc d'après le théorème de dérivation on a :

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} v_n^{'}(x) = g^{'}(x)$$