Corrigé TD N °1

Exercice 1 *I- Domaine de définition.*

1. $f_1(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^4 + 2}$. $D_1 = \mathbb{R}^2$.
2. $f_2(x,y) = \dfrac{x\cos y}{x^2 - 4y^2}$. $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \pm\dfrac{1}{2}x\}$. *Le plan tout entier privé des deux droites* $y = \pm\dfrac{1}{2}x$.
3. $f_3(x,y) = \dfrac{\ln(4 - x^2 - y^2)}{\ln(x^2 + y^2 - 1)}$. $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4$ *et* $x^2 + y^2 \neq 2\}$. *La couronne ouverte de centre* $(0,0)$ *et de petit rayon* $r = 1$ *et grand rayon* $R = 2$ *privée du cercle* $C((0,0);\sqrt{2})$.
4. $f_4(x,y,z) = \dfrac{\cos x + \ln y}{y + z}$. $D_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0$ *et* $y + z \neq 0\}$.
5. $f_5(x,y) = (\sqrt{y - x^2}, \dfrac{\sin y}{y})$. $D_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 \geq 0$ *et* $y \neq 0\}$. *Au dessus de la parabole* $y = x^2$.
6. $f_6(x,y,z) = y\, e^{z+1} \sin x$. $D_6 = \mathbb{R}^3$.

II- Les courbes à niveau.

(a) $f(x,y) = y - x^2$. *Les courbes à niveau d'ordre* k *sont* $\mathcal{C}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 + k\}$.
En particulier
Pour $k = 0$, $\mathcal{C}_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$. *Une parabole de sommet confondu à l'origine.*
Pour $k = 1$, $\mathcal{C}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 + 1\}$. *Une parabole de sommet* $(0,1)$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. *Les courbes de niveau* k *sont :* $\mathcal{C}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm\sqrt{\dfrac{1-k}{1+k}}x\}$.
Pour $k = 0$, *les courbes à niveau* $\mathcal{C}_0$ *sont la première et la deuxième bissectrice.*
Pour $k = 1/2$, *les courbes* $\mathcal{C}_{1/2}$ *sont les deux droites* $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$.

Exercice 2 *Les limites*

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x + y - 3}{x + 5y + 4} = \dfrac{-1}{10}$.
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x + y|}{x^2 + y^2}$. *Cette limite n'existe pas car, par passage aux coordonnées polaires, on obtient* $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{1}{r}|\cos\theta + \sin\theta|$ *dépend de* θ.
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin(xy)}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} y.\dfrac{\sin(xy)}{xy} = 2$.
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{1}{x - y} = +\infty$.

5.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\cos x - \cos y}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{-2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}{x-y}$$
$$= -\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\frac{x-y}{2}} \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = -\sin 1.$$

6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2-xy}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{-|xy|} = \lim_{r\to 0} r(1-\sin\theta\cos\theta)\, e^{-r^2|\cos\theta\sin\theta|} = 0.$

Exercice 3 *A. Soit* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x.y}{|x.y|+(x+y)^2}, & si\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$

A.1) Montrons que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *n'existe pas. Si on prend le chemin* $y = x$*, on trouvera* $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{5x^2} = \frac{1}{5}$*, par contre, si on prend* $y = -x$*, on trouvera* $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,-x) = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{x^2} = -1$*. Les deux limites sont différentes, donc la limite n'existe pas.*

A.2) $\displaystyle\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} \frac{x.y}{|x.y|+(x+y)^2}) = 0$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = 0.$

B. Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $g(x,y) = x.u(y) + y.u(x)$*, où* $u(x) = \begin{cases} 1, & si\ \ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & si\ \ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

B.1) On a :

$$g(x,y) = \begin{cases} x+y & si\ \ x,y \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ \ x,y \notin \mathbb{Q} \\ y & si\ \ x \in \mathbb{Q},\ \ et\ \ y \notin \mathbb{Q} \\ x & si\ \ x \notin \mathbb{Q},\ \ et\ \ y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Donc $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0.$

B.2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x,y) = \begin{cases} y, & si\ \ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & si\ \ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ *Donc la limite n'existe pas.*

$\displaystyle\lim_{y\to 0} g(x,y) = \begin{cases} x, & si\ \ y \in \mathbb{Q} \\ 0, & si\ \ y \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ *Donc la limite n'existe pas.*

Par conséquent, $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} g(x,y))$ *et* $\displaystyle\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} g(x,y))$ *n'existent pas.*

C. Conclusion :

De (A) on déduit qu'on ne peut pas calculer la limite d'une fonction à deux variables par passage aux fonctions partielles et d'autre part l'existence de la limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ *ne garantit pas l'existence des limites* $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} g(x,y))$ *et* $\displaystyle\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} g(x,y))$*.*

Exercice 4 *La continuité*

1. Soit la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x-y}, & si\ \ x \neq y, \\ 0 & si\ \ x = y. \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}^2$*. La fonction* f *est continue sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ *étant fraction de deux fonctions continues. Étudions la continuité sur la droite* $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ *en* *distinguons les cas suivants :*

• *Si* $x_0 = y_0 = 0$, *on prend le chemin* $x = 0$ *on trouve* $\lim\limits_{y\to 0} \frac{y}{-y} = -1$. *Aussi, si on prend* $y = 0$, *on trouve* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$. *Donc la limite n'existe pas en* $(0,0)$ *et la fonction n'est pas continue au point* $(0,0)$ *et sur* $\mathbb{R}^2$ *tout entier.*

• *Si* $x_0 = y_0 \neq 0$, *on prend les deux chemins* $x = x_0$ *et* $y = y_0$ *la limite n'existe pas aussi. Donc pas de continuité sur* $\mathbb{R}^2$.

2. *Soit la fonction*

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(1+x^2+y^2)\sin y}{y}, & si \;\; y \neq 0 \\ 1 & si \;\; y = 0 \end{cases}$$

La fonction g *est continue sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ *comme quotient de deux fonctions continues. Étudions la continuité sur l'axe des abscisses* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. *On a :*

• *Si* $x = 0$, *alors* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2+y^2)\dfrac{sin(y)}{y} = 1 = g(0,0)$, *car :* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2+y^2) = 1$ *et* $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin y}{y} = 1$. *D'où la continuité de* g *sur* $\mathbb{R}^2$.

• *Si* $x \neq 0$, *alors* $\lim\limits_{(x,y)\to(x,0)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x,0)} (1+x^2+y^2)\dfrac{\sin y}{y} = 1 + x^2 \neq 1$. *D'où* g *n'est pas continue au point* $(0,0)$.

Exercice 5 *La fonction* $g(x,y) = (\ln(|x.y|+1), \exp(x.y), \sin(x.y))$ *est continue car les fonctions* $g_1(x,y) = \ln(|xy|+1)$, $g_2(x,y) = \exp(xy)$ *et* $g_3(x,y) = \sin(xy)$ *sont continues sur* $\mathbb{R}^2$ *(composée de fonctions usuelles.)*

Exercice 6 *Soit la fonction* $f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$.
Le domaine de définition $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
La fonction f *est prolongeable par continuité en* $(0,0)$, *car*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = \lim_{r\to 0} r^2 \ln(r^2) = 0.$$

Exercice 7 *Le prolongement par continuité*

1. *La fonction* $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+3y^2}}$ *est définie et est continue sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *comme étant quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Étudions l'existence de la limite de* f *au point point* $(0,0)$. *On a* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. *(utilisons les coordonnées polaires). Par conséquent* f *est prolongeable par continuité sur* $\mathbb{R}^2$ *et*

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} \frac{x.y}{\sqrt{x^2+3y^2}}, & si \;\; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \;\; (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2. *La fonction* $g(x,y) = \dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{x^2+2y^2}$ *est continue sur* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$ *comme quotient de deux fonctions continues, mais elle n'est pas prolongeable par continuité sur* $\mathbb{R}^2$ *car elle n'admet pas de limite au point* $(0,0)$. *En effet, si prend le chemin* $x = 0$ *passant par* $(0,0)$, *on trouve* $\lim\limits_{y\to 0} g(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin(y^2)}{2y^2} = 1/2$ *et si on prend le chemin* $y = 0$ *passant par* $(0,0)$, *on trouve* $\lim\limits_{x\to 0} g(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{x^2} = 1$.