Corrigé TD N°2

Exercice 1

$$f(x,y)=\begin{cases} g(x,y), & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(1) *Si* $g(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, *la fonction* f *n'est pas continue en* $(0,0)$ *car* $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)\neq f(0,0)$, *(prendre le chemin* $x=y$, $\lim\limits_{x\longrightarrow} f(x,x)=\dfrac{1}{2}\neq 0$. *Donc* f *n'est pas continue sur* $\mathbb{R}^2$ *; mais elle admet des dérivées partielles en* $(0,0)$ *car* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$. *De plus f est dérivable sur* $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ *(étant quotient de deux fonctions dérivables), d'où sa dérivabilité sur* $\mathbb{R}^2$ *et on a :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}, & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0).\end{cases}\quad et\quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^2x}{(x^2+y^2)^2}, & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(2) *Si* $g(x,y)=|x|+|y|$ *alors la fonction* f *est continue sur* $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ *et au point* $(0,0)$ *on a :* $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$ *d'où la continuité de* f *sur* $\mathbb{R}^2$. *Mais* f *n'est pas dérivable sur* $\mathbb{R}^2$ *car elle n'est pas dérivable au point* $(0,0)$ *puisque la limite* $\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\dfrac{|h|}{h}$ *n'existe pas.*

(3) *Si* $g(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, *alors la fonction* f *n'est ni continue ni dérivable sur* $\mathbb{R}^2$ *car au point* $(0,0)$ *on a d'une part* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x,x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{1}{2x}$ *n'existe pas donc* $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)\neq f(0,0)$ *et d'autre part la limite* $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h}$ *n'existe pas donc* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ *n'existe pas.*

(4) *Si* $g(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, *alors* f *est continue et est dérivable sur* $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ *étant quotient de deux fonctions continues et dérivables sur* $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, *dont le dénominateur ne s'annule pas. Au point* $(0,0)$ *on a d'une part la continuité puisque en utilisant les coordonnées polaires :*

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)=\lim_{\substack{r\longrightarrow 0\\ 0\leq\theta\leq 2\pi}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\lim_{\substack{r\longrightarrow 0\\ 0\leq\theta\leq 2\pi}} r\cos^2\theta\sin\theta=0=f(0,0),$$

(car la quantité $\cos^2\theta\sin\theta$ *est bornée sur* $[0,2\pi]$*). D'autre part on a la dérivabilité au point* $(0,0)$ *car* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$. *Les dérivées partielles de* f *sont définies comme suit :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0).\end{cases}\quad et\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^2x^2}{(x^2+y^2)^2}, & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Remarquons que les deux fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *sont continues sur* $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ *donc* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ *d'où sa différentiabilité sur* $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. *Mais* f *n'est pas de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *tout entier car les fonctions* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *ne sont pas continues au point* $(0,0)$ *puisque* $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *n'existe pas (en prenant le chemin* $x=y$ *on obtient* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x)=\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$*) et* $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

n'existe pas (en prenant le chemin $y = 0$ on obtient $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 1 \neq \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$). Donc pour étudier la différentiabilité de f au point $(0,0)$ on utilise la définition, on a

$$\lim_{f(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} \neq 0$$

(si on prend le chemin $x = y$ on trouvera que la limite vaut $\frac{1}{2^{3/2}}$.) Donc on n'a pas de différentiabilité au point $(0,0)$ et évidement sur $\mathbb{R}^2$.

(5) *Si $g(x,y) = (xy)\sin(\frac{1}{x^2+y^2})$, alors f est continue sur $\mathbb{R}^2$ étant produit et composition de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et au point $(0,0)$ on a aussi continuité car $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ ($xy \longrightarrow 0$ quand $(x,y) \longrightarrow (0,0)$ et $\sin(\frac{1}{x^2+y^2})$ est bornée). D'autre part f est dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et on a :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) - \dfrac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos(\frac{1}{x^2+y^2}), & si\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{h\longrightarrow 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 & si\ \ (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) - \dfrac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\cos(\frac{1}{x^2+y^2}), & si\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{h\longrightarrow 0} \dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0 & si\ \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Les deux fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (facile à vérifier) donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ d'où sa différentiabilité sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Mais f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car on n'a pas continuité des dérivées partielles en $(0,0)$ (les limites $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ n'existent pas.) Donc pour étudier la différentiabilité de f au point $(0,0)$ on utilise la définition :

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy\sin(\frac{1}{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

D'où la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.

(6) *Conclusion :*
1) f est continue sur $D \not\Rightarrow f$ dérivable sur D et f dérivables sur $D \not\Rightarrow f$ continue sur D.
2) f est continue sur $D \not\Rightarrow f$ différentiable sur D et f dérivables sur $D \not\Rightarrow f$ différentiable sur D.
3) f est de calasse $\mathcal{C}^1$ sur $D \Rightarrow f$ est différentiable sur D mais si f différentiable sur $D \not\Rightarrow f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

Exercice 2 *Rappelons que la matrice jacobienne d'une fonction $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1 en un point $a \in D$; est définie par :*

$$J_a f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n}(a). \end{pmatrix}$$

1) *Les deux fonctions $f(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$ et $g(x,y) = (x+y, xy, x-y)$ sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$ étant des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc la composée $g \circ f$ est aussi différentiable sur $\mathbb{R}^2$. On a :*

$$J_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix} \quad et \quad J_{(x,y)}g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

donc

$$J_{(a,b)}(g\circ f)=J_{f(a,b)}g.J_{(a,b)}f=\begin{pmatrix}1 & 1\\ a^2-b^2 & a^2+b^2\\ 1 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2a & 2b\\ 2a & -2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4a & 0\\ 4a^2 & -4b^3\\ 0 & 4b\end{pmatrix}.$$

2) $p(x,y)=\sin(x^2-y^2)$ *et* $h(x,y)=(x+y,x-y)$ *posons* $h_1(x,y)=x+y$ *et* $h_2(x,y)=x-y$.

2.1) Par définition on a

$$\frac{\partial(p\circ h)}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial p}{\partial x}(h((x,y))\times\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial p}{\partial y}(h(x,y))\times\frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y),$$

et

$$\frac{\partial(p\circ h)}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial p}{\partial x}(h((x,y))\times\frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial p}{\partial y}(h(x,y))\times\frac{\partial h_2}{\partial y}(x,y).$$

Donc :

$$\frac{\partial(p\circ h)}{\partial x}(x,y)=2(x+y)\cos(4x)-2(x-y)\cos(4x)=4y\cos(4x);$$

et

$$\frac{\partial(p\circ h)}{\partial y}(x,y)=2(x+y)\cos(4x)-2(x-y)\cos(4x)(-1)=4x\cos(4x).$$

Ce résultat peut être obtenu en calculant directement les dérivées partielles de l'expression de $(p\circ h)(x,y)=p(h(x,y))=\sin((x+y)^2-(x-y)^2)=\sin 4xy$.

2.2) On a $\dfrac{\partial p}{\partial x}(x,y)=2x\cos(x^2-y^2)$ *et* $\dfrac{\partial p}{\partial y}(x,y)=-2y\cos(x^2-y^2)$, *donc au point* $h(x,y)$ *on aura* $J_{h(x,y)}p=(2(x+y)\cos(4xy),-2(x-y)\cos(4xy))^t$. *Pour* $h(x,y)$ *on a :* $\dfrac{\partial h_1}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial h_1}{\partial y}(x,y)=1$ *et* $\dfrac{\partial h_2}{\partial x}(x,y)=-\dfrac{\partial h_2}{\partial y}(x,y)=1$ *et la matrice jacobienne de* h *s'écrit comme suit* $J_{(x,y)}h=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

2.3) Première méthode : $J_{(x,y)}(p\circ h)=J_{(h(x,y)}p.J_{(x,y)}h=J_{h(x,y)}p=(2(x+y)\cos(4xy),-2(x-y)\cos(4xy))^t.\Big($ $(4y\cos(4xy),2x\cos(4xy))^t$.

Deuxième méthode, on écrit directement la matrice jacobienne de la fonction composée $(p\circ h)(x,y)=p(h(x,y))=\sin((x+y)^2-(x-y)^2)=\sin 4xy$.

On a $\dfrac{\partial\sin(4xy)}{\partial x}(x,y)=4y\sin(4xy)$ *et* $\dfrac{\partial\sin(4xy)}{\partial y}(x,y)=4x\sin(4xy)$. *Donc*

$J_{(x,y)}(p\circ h)=(4y\cos(4xy),2x\cos(4xy))^t$.

Exercice 3 *Soit la fonction* g *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :* $g(x,y)=(x+y)^2+2(x-y)$.

1) La fonction g *est dérivable sur* $\mathbb{R}^2$ *et on a* $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=2x+2y+2$ *et* $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=2y+2x-2$.

2) Les deux fonctions $\frac{\partial g}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial g}{\partial y}$ *sont continues sur* $\mathbb{R}^2$, *donc* g *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$, *d'où sa différentiabilité sur* $\mathbb{R}^2$ *et son différentiel au point* $(-1,1)$ *s'écrit :*

$$Df_{(-1,1)}(h,k)=\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1).h+\frac{\partial g}{\partial y}(-1,1).k=2h-2k.$$

3) La fonction g *admet ses dérivées d'ordre 2 (puisque les fonctions* $\frac{\partial g}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial g}{\partial x}$ *sont dérivables) et on a* $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)=2$; $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=2$ *et* $\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y)=2$ *pour tout* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

4) Comme g *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$ *alors d'après le théorème de Schwarz ses dérivées mixtes sont égales :*

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y)=2.$$

5) *On a* $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=2x+2y+2+2x+2y-2=4(x+y)$ *donc la formule est vérifiée avec* $\alpha=4$.

6) *Soit* $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *tel que* $F(t)=g(x(t),y(t))$, *où* $x(t)=e^{2t}$ *et* $y(t)=(1+t)^2$.
Puisque la fonction g *est différentiable sur* $\mathbb{R}^2$ *et les fonctions* $x:t\longmapsto x(t)$ *et* $y:t\longmapsto y(t)$ *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$, *alors la fonction* F *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a*

$$\begin{aligned}F'(t)&=\frac{\partial g}{\partial x}(x(t),y(t))\times x'(t)+\frac{\partial g}{\partial y}(x(t),y(t))\times y'(t)\\&=4e^{4t}+4(1+t)^2e^{2t}+4e^{2t}+4(1+t)^3+4e^{2t}(1+t)-4(1+t)^2.\end{aligned}$$

Ce résultat peut s'obtenir directement on dérivant l'expression

$$F(t)=g(x(t)),y(t))=(e^{2t}+(1+t)^2)^2+2(e^{2t}-(1+t)^2).$$

Exercice 4 *Soit* $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathbf{C}^2$ *par rapport à ses deux variables* x *et* y.

1) *Posons* $u=x-y$ *et* $v=x+y$, *déterminons tout d'abord l'expression de* x *et* y *en fonction de* u *et* v, *on a* $x=\dfrac{u+v}{2}$ *et* $y=\dfrac{v-u}{2}$, *donc*
$\dfrac{\partial x}{\partial u}=1/2$ *et* $\dfrac{\partial x}{\partial v}=1/2$,
$\dfrac{\partial y}{\partial u}=-1/2$ *et* $\dfrac{\partial y}{\partial v}=1/2$ *et comme on a :*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)&=\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\times\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\times\frac{\partial y}{\partial u}(u,v),\\\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)&=\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\times\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\times\frac{\partial y}{\partial v}(u,v),\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)&=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))-\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))...(*),\\\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)&=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))+\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))...(**)\end{aligned}$$

(*)+(**) donne :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))=\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)...(A),$$

et (**)-(*) donne :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))=\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)-\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)...(B),$$

maintenant dérivons (A) par rapport à x :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x(u,v),y(u,v))&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x(u,v),y(u,v))=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right)\\&=\left(\frac{\partial}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial}{\partial v}(u,v)\right)\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)+\left(\frac{\partial}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial}{\partial v}(u,v)\right)\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v)+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(u,v)+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v).\end{aligned}$$

De même, en dérivant (B) par rapport à y, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x(u,v),y(u,v))&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x(u,v),y(u,v))=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)-\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\right)\\&=\left(\frac{\partial}{\partial v}(u,v)-\frac{\partial}{\partial u}(u,v)\right)\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)-\left(\frac{\partial}{\partial v}(u,v)-\frac{\partial}{\partial u}(u,v)\right)\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v)-2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(u,v)+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v).\end{aligned}$$

Finalement on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x(u,v),y(u,v)) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x(u,v),y(u,v)) = 4\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u,v).$$

2) *Considérons maintenant les coordonnées polaires r et θ où $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, commençons par les dérivée premières, on a*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\ &= \cos\theta.\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}, ...(4.1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\\ &= -r\sin\theta.\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}, ...(4.2).\end{aligned}$$

En multipliant (4.1) par $\cos\theta$ et (4.2) par $\dfrac{-\sin\theta}{r}$ et en sommant les deux résultats on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, ...(4.3)$$

d'autre part on multiplie (4.1) par $\sin\theta$ et (4.2) par $\dfrac{\cos\theta}{r}$ ensuite par addition des égalités résultantes on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}........(4.4)$$

Dérivons maintenant les deux cotés de (4.3) par rapport à x on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\ &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\ &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\\ &= \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \left[-\frac{\sin 2\theta}{2r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\sin 2\theta}{2r}\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta}\right] - \left[-\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\sin 2\theta}{2r}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r}\right] + \left[\frac{\sin 2\theta}{2r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right]\\ &= \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{\sin 2\theta}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\sin 2\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

On fait la même chose pour (4.4) mais en dérivant par rapport à y :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ &= \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ &= \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\\ &= \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \left[-\frac{\sin 2\theta}{2r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\sin 2\theta}{2r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta}\right] + \left[\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\sin 2\theta}{2r}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} - \frac{\sin 2\theta}{2r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right]\\ &= \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\sin 2\theta}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin 2\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

L'opérateur (dit opérateur de Laplace) $\Delta = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ *s'écrit en fonction des dérivées partielles de* f *par rapport à* r *et* θ *comme suit*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

Exercice 5 *Soit la fonction :* $f(x,y) = \sqrt{3x-y}$ *définie sur* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 3x-y\}$.

1) *La fonction* f *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $D/\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x-y=0\}$ *et pour tout* $(x,y) \in D$ *tel que* $3x-y \neq 0$, *on a :* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-y}}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-1}{2\sqrt{3x-y}}$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \dfrac{3x}{4(3x-y)\sqrt{3x-y}} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ *(ceci est due au théorème de Schwarz puisque* f *est de classe* $\mathcal{C}^2$*),*
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{-9}{4(3x-y)\sqrt{3x-y}}$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{-1}{4(3x-y)\sqrt{3x-y}}$.

2) *Le D.L de* f *d'ordre 1 au voisinage du point* $(1,2)$ *:*

$$f(x,y) = f(1,2) + (x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + (y-2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \|((x-1),(y-2))\|\epsilon(x,y),$$

avec $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \epsilon(x,y) = 0$, *donc*

$$f(x,y) = 1 + \frac{3}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-2) + \|((x-1),(y-2))\|\epsilon(x,y),$$

3) *Le D.L de* f *d'ordre 2 au voisinage du point* $(1,2)$ *de* f *s'écrit comme suit :*

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(1,2) + (x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + (y-2)\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \\ & + \frac{1}{2}\left((x-1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) + (y-1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}f(1,2) + 2(x-1)(y-2)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2)\right) \\ & + \|((x-1),(y-2))\|_2^2\epsilon((x-1),(y-1)), \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(1,2)} \epsilon((x-1),(y-1)) = 0$, *d'où*

$$f(x,y) = 1+\frac{3}{2}(x-1)-\frac{1}{2}(y-2)-\frac{9}{4}(x-1)^2-\frac{1}{4}(y-1)^2+\frac{3}{4}(x-1)(y-2)+\|((x-1),(y-2))\|_2^2\epsilon((x-1),(y-1))$$

4) *Par définition, la différentielle de* f *existe au point* $(2,2)$ *si*

$$\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(2+h,2+k) - f(2,2) - h.\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,2) - k.\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,2)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

on a : $f(2+h,2+k) = \sqrt{4-3h-k}$, $f(2,2) = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3/4$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -1/4$ *donc la limite au dessus devient :*

$$\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{\sqrt{4-3h-k} - 2 - h.\dfrac{3}{4} + k.\dfrac{1}{4}}{\sqrt{h^2+k^2}},$$

multiplions par le conjugué $\sqrt{4-3h-k} + (2 + h.\dfrac{3}{4} - k.\dfrac{1}{4})$ *(ensuite par passage aux coordonnées polaires), nous obtenons :*

$$\lim_{(h,k)\longrightarrow 0} \frac{-\dfrac{9}{16}h^2 - \dfrac{1}{16}k^2 + \dfrac{3}{8}h.k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

donc f *est différentiable au point (2,2) et on a* $Df(2,2)(h,k) = h\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,2) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,2)$.

5) L'équation du plan tangent au point $(2,2)$ est :

$$z = f(2,2) + (x-2)\frac{\partial f}{\partial x}(2,2) - (y-2)\frac{\partial f}{\partial y}(2,2) = 2 + \frac{3}{4}(x-2) - \frac{1}{4}(y-2)$$

6) De la question 5) et comme $(2.09, 1.99)$ est dans le voisinage de $(2,2)$, on déduit que la valeur approchée de $f(2.01, 1.99)$ est :

$$f(2.01, 1.99) \simeq 2 + \frac{3}{4}(2.01-2) - \frac{1}{4}(1.99-2) \simeq 2.01$$

La valeur exacte obtenue directement de l'expression de f est $f(2.10, 1.99) = \sqrt{4.2.01 - 1.99} = 2.009975$, donc la différence entre la valeur approchée et exacte est presque nulle $(2.01 - 2.009975 = 25 \times 10^{-6})$.

Exercice 6 *Soit $f(x,y) = \dfrac{1+x+y}{1+x-y}$ une fonction définie sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \neq 1+x-y\}$.*

1) Le D.L de la fonction $1/(1+u)$ d'ordre 2 est donné par :

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + u^2\epsilon(u),$$

en posant $u = x - y$, on obtient : $\frac{1}{1+(x-y)} = 1 - (x-y) + (x-y)^2 + (x-y)^2\epsilon(x-y)$. Donc

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (1+x+y)[1-(x-y)+(x-y)^2+(x-y)^2\epsilon(x-y)] \\ &= 1 + 2y - 2xy + 2y^2 + (x^2+y^2)\epsilon(x,y) \end{aligned}$$

2) Par identification avec la formule théorique, on déduit que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 4.$$

Exercice 7 *A. Soit la fonction g définie par :*

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3.y - y^3.x}{x^2+y^2}, & si\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

A.1 La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ étant fraction de deux polynômes continues et au point $(0,0)$ nous avons

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^4(cos^3\theta.sin\theta + sin^3\theta.cos\theta)}{r^2} = 0 = g(0,0)$$

d'où la continuité en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$.

A.2 La fonction g admet des dérivées partielles en $(0,0)$ car

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h,0) - g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^4/h^2}{h} = 0$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{g(0,k) - g(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k^4/k^2}{k} = 0$$

Donc $\nabla g(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

A.3 La fonction g est différentiable en $(0,0)$ car on a :

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g(h,k)-g(0,0)-\frac{\partial g}{\partial x}(0,0).h-\frac{\partial g}{\partial y}(0,0).k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(h^3.k-k^3.h)/(h^2+k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

B. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & si \ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \ \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

B.1 La fonction h est continue sur $\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$ étant fraction de deux polynômes continues et au point $(0,0)$ nous avons

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^4(cos^4\theta + sin^4\theta)}{r^2} = 0 = h(0,0)$$

d'où la continuité en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$.

B.2 La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$ étant fraction de deux polynômes dérivables et nous avons $\forall (x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(x^4+2x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{2y(y^4+2x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

donc :

$$\nabla h(x,y) = (\frac{2x(x^4+2x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2y(y^4+2x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2})^t$$

B.3 La fonction h admet des dérivées partielles en $(0,0)$ car

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{h(h,0)-h(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^4/h^2}{h} = 0$$

et

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{h(0,k)-h(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k^4/k^2}{k} = 0$$

Donc $\nabla h(0,0) = (0,0)^t$

B.4 Les fonctions $\frac{\partial h}{\partial x}$ et $\frac{\partial h}{\partial y}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2x(x^4+2x^2.y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & si \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2y(y^4+2x^2.y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2}, & si \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

sont continues sur $\mathbb{R}^2$ (l'étude de la continuité se fait comme dans le cas de h). Alors h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et ceci est une condition suffisante pour la différentiabilité de h (voir théorème)

C. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = x^4 + y^4 + (x-y)^2$.

C.1 La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ car c'est un polynôme, donc elle admet des dérivées d'ordre 1 et 2.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3+2x-2y, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^4+2y-2x, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2+2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2+2$$

et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2.$

C.2 *Comme f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ alors d'après le théorème de Schwarz ses dérivées mixtes sont égales*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2$$

C.3 *Rappelons que le différentiel de f est une application linéaire qui s'écrit*

$$Df_{(x,y)}(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).k$$

Donc

$$Df_{(1,1)}(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1).h + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1).k = 4h + 4k$$

C.4 *Soit $F(t) = f(x(t), y(t))$ avec $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$. Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et les fonctions* cos *et* sin *sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors F l'est aussi et on peut calculer sa dérivée F' par deux méthodes :*

Méthode 1

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \times y'(t) \\
&= (4x^3 + 2x - 2y).(-\sin t) + (4y^3 + 2y - 2x)\cos t \\
&= (4\cos^3 t + 2\cos t - 2\sin t)(-\sin t) + (4\sin^3 t + 2\sin t - 2\cos t)(\cos t) \\
&= (4\cos t . \sin t + 2)(\sin^2 t - \cos^2 t).
\end{aligned}$$

Méthode 2

On a

$$F(t) = f(x(t), y(t)) = x^4 + y^4 + (x-y)^2 = \cos^4 t + \sin^4 t + (\cos t - \sin t)^2$$

alors

$$\begin{aligned}
F'(t) &= -4\cos^3 t.(\sin t) + 4\cos t \sin^3 t - 2.(\cos t - \sin t).(\cos t + \sin t) \\
&= (4\cos t . \sin t + 2)(\sin^2 t - \cos^2 t).
\end{aligned}$$