Corrigé TD N°3

Notations : Tout au long de ce corrigé, nous utilisons les notations suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f; \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \partial^2_{xx} f; \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \partial^2_{xy} f.$$

Exercice 1 *Les points critiques et leur nature.*

1. *Soit* $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - 4x + y^2$.
   Résolution du système $\nabla f(x,y) = (0,0)$ *ce qui est équivaut à*

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) & = \frac{1}{2}y^2 + x^2 - 4 = 0 \\ \partial_y f(x,y) & = (x+2)y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} y = 0 \text{ ou } x = -2 \\ \text{pour } y = 0 \Rightarrow x = \pm 2. \end{cases}$$

   On obtient deux points critiques :$(-2,0)$ *et* $(+2,0)$.
   Comme $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$, *on calcul les dérivées secondes :*
   $r = \partial^2_{xx} f(x,y) = 2x$, $s = \partial^2_{xy} f(x,y) = y$ *et* $t = \partial^2_{yy} f(x,y) = x+2$.
   Afin d'étudier la nature de ces points critiques, nous devons calculer le déterminant de la matrice ***Hessienne****, appeler le* ***Hessien****.*
   Soient $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$, *et* $a = (x_0, y_0)$ *un point critique.* ***La matrice Hessienne*** *est définie comme suit :*

$$H_a f = \begin{pmatrix} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}$$

   Donc, le Hessien est donné par la formule :

$$\Delta(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \times \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(a) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \times \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = rt - s^2.$$

pt critique (x_0, y_0)	$r = \partial^2_{xx} f(x_0,y_0)$	$s = \partial^2_{xy} f(x_0,y_0)$	$t = \partial^2_{yy} f(x_0,y_0)$	$\Delta(x_0,y_0) = rt - s^2$	*la nature*
$(+2,0)$	*4*	*0*	*4*	*+16(>0)*	*Minimum local*
$(-2,0)$	*-4*	*0*	*0*	*0*	*on peut rien conclure*

2. *Soit* $g(x,y) = y^2 + xy\ln(x)$ $(x > 0)$.
   Résolution du système $\nabla g(x,y) = (0,0)$ *ce qui est équivaut à*

$$\begin{cases} \partial_x g(x,y) & = y(1 + \ln(x)) = 0 \\ \partial_y g(x,y) & = 2y + x\ln(x) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} y = 0 \text{ ou } 1 + \ln x = 0 \ (\Rightarrow x = e^{-1}) \\ \text{pour } y = 0 \Rightarrow x = 1. \\ \text{pour } x = e^{-1} \Rightarrow y = e^{-1}/2. \end{cases}$$

On obtient deux points critiques :$(+1,0)$ *et* $(e^{-1},\dfrac{e^{-1}}{2})$.
Comme $f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$, *on calcul les dérivées secondes :*
$r=\partial^2_{xx}f(x,y)=y/x$, $s=\partial^2_{xy}f(x,y)=1+\ln x$ *et* $t=\partial^2_{yy}f(x,y)=2$.

pt critique (x_0,y_0)	$r=\partial^2_{xx}f(x_0,y_0)$	$s=\partial^2_{xy}f(x_0,y_0)$	$t=\partial^2_{yy}f(x_0,y_0)$	$\Delta(x_0,y_0)=rt-s^2$	*la nature*
$(+1,0)$	*0*	*1*	*2*	*-1(<0)*	*Un point selle*
$(e^{-1},\dfrac{e^{-1}}{2})$	*1/2*	*0*	*2*	*+1*	*Minimum local*

3. *Soit* $h(x,y)=(x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$. *De même, on commence par résoudre le système* $\nabla h(x,y)=(0,0)$ *ce qui est équivaut à*

$$\begin{cases}\partial_x h(x,y) & =2x(1-x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}=0\\ \partial_y h(x,y) & =-2y(1+x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0 \text{ ou } x^2+y^2=1\ (y=\pm1)\\ y=0 \text{ ou} x^2-y^2=1\ (x=\pm1)\end{cases}$$

On obtient cinq points critiques :$(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ *et* $(-1,0)$.
On calcul les dérivées secondes :
$r=\partial^2_{xx}f(x,y)=2(1-5x^2+y^2+2x^4-2x^2y^2)e^{-x^2-y^2}$, $s=\partial^2_{xy}f(x,y)=4xy(x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$ *et* $t=\partial^2_{yy}f(x,y)=-2(1-5y^2+x^2+2y^4-2x^2y^2)e^{-x^2-y^2}$.

pt critique (x_0,y_0)	$r=\partial^2_{xx}f(x_0,y_0)$	$s=\partial^2_{xy}f(x_0,y_0)$	$t=\partial^2_{yy}f(x_0,y_0)$	$\Delta(x_0,y_0)=rt-s^2$	*la nature*
$(0,0)$	*2*	*0*	*-2*	*-4(<0)*	*Un point selle*
$(0,1)$	$4e^{-1}$	*0*	$4e^{-1}$	$16e^{-2}$	*Minimum local*
$(0,-1)$	$4e^{-1}$	*0*	$4e^{-1}$	$16e^{-2}$	*Minimum local*
$(1,0)$	$-4e^{-1}$	*0*	$-4e^{-1}$	$16e^{-2}$	*Maximum local*
$(-1,0)$	$-4e^{-1}$	*0*	$-4e^{-1}$	$16e^{-2}$	*Maximum local*

Exercice 2 *Considérons la fonction* f *définie par* $f(x,y)=(x^2-y)(3x^2-y)$.

1. *Soit la fonction* $F(t)=f(tx,ty)=3x^4t^4-4yx^2t^3+y^2t^2$. *On étudie les extremums de* F *dans* $\mathbb{R}$.
   On a $F'(t)=2t(6x^4t^2-6yx^2t+y^2)=0$ *ce qui donne un point critique* $t=0$; *la dérivée seconde :* $F''(t)=36x^4t^2-24yx^2t+2y^2\Rightarrow F''(0)=2y^2$.
   Si $y\neq0$, *alors* $F''(0)>0$ *et* $t=0$ *est un minimum local de* F.
   Si $y=0$, $F(t)=3x^4t^4\geq0=F(0)$ *et* $t=0$ *est un minimum global de* F.
2. *Montrons que* $(0,0)$ *n'est pas un minimum de* f. *C'est-à-dire*
   $\forall\epsilon>0,\exists(x_\epsilon,y_\epsilon),(\overline{x}_\epsilon,\overline{y}_\epsilon)\in]-\epsilon,+\epsilon[\times]-\epsilon,+\epsilon[$, *vérifiant :* $f(x_\epsilon,y_\epsilon)<f(0,0)<f(\overline{x}_\epsilon,\overline{y}_\epsilon)$.
   En prenant :$(x_\epsilon,y_\epsilon)=(\frac{\sqrt{\epsilon}}{2},\frac{\epsilon}{2})$, *on a :*

$$f(\frac{\sqrt{\epsilon}}{2},\frac{\epsilon}{2})=(\frac{\epsilon}{4}-\frac{\epsilon}{2})(\frac{3\epsilon}{4}-\frac{\epsilon}{2})=\frac{-\epsilon^2}{16}<0=f(0,0).$$

En prenant $:(\overline{x}_\epsilon, \overline{y}_\epsilon) = (\frac{\sqrt{\epsilon}}{2}, -\frac{\epsilon}{2})$, *on a :*

$$f(\frac{\sqrt{\epsilon}}{2}, -\frac{\epsilon}{2}) = (\frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2})(\frac{3\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2}) = \frac{15\epsilon^2}{16} > 0 = f(0,0).$$

Donc,

$$f(\frac{\sqrt{\epsilon}}{2}, \frac{\epsilon}{2}) < f(0,0) = 0 < f(\frac{\sqrt{\epsilon}}{2}, -\frac{\sqrt{\epsilon}}{2}); \forall \epsilon > 0.$$

D'où $(0,0)$ *n'est pas un minimum de f.*
***Remarque**. Si on calcul* $\nabla f(x,y)$, *on trouve*

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) & = 12x^2 - 8xy = 0 \\ \partial_y f(x,y) & = -4x^2 + 2y = 0. \end{cases}$$

Ce qui donne $(0,0)$ *un point critique.*
$r = \partial^2_{xx} f(x,y) = 24x - 8y$, $s = \partial^2_{xy} f(x,y) = -8x$ *et* $\partial^2_{yy}(x,y) = 2$. *Au point* $(0,0)$ *on obtient* $\Delta(0,0) = rt - s^2 = 0$, *donc on ne peut rien conclure.*

Exercice 3 *Soit* $f(x,y) = x^4 + x^3y^2 - y + y^2 + y^3 - 1$; $(a,b) = (-1,1)$. *Nous allons tout simplement vérifier si les conditions du Théorème des fonctions implicites sont remplis.*

(a) $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$,
(b) $f(-1,+1) = 0$,
(c) $\partial_y f(x,y) = 2x^3y + 3y^2 + 2y - 1$, *et* $\partial_y f(-1,+1) = 2(\neq 0)$.

D'après le théorème $:\exists \alpha, \beta > 0$ *tels que :* $\forall x \in]-1-\alpha, -1+\alpha[$; $f(x,y) = 0$ *admet une solution unique* $y = \varphi(x) \in]1-\beta, 1+\beta[$ *et* $\varphi(-1) = 1$.
D'autre part, $\varphi'(-1) = -\dfrac{\partial_x f(-1,+1)}{\partial_y f(-1,+1)} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 4 *Soit la fonction* $g(x,y) = ye^x + e^y \sin 2x$.

1. $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$. *Au point* $(0,0)$: $g(0,0) = 0$ *et* $\partial_y g(x,y) = e^x + e^y \sin 2x \Rightarrow \partial_y g(0,0) = 1$. *D'après le théorème des fonctions implicites, il existe* $y = \phi(x)$ *au voisinage de* $x \in]-\alpha, +\alpha[$ *et* $y \in]-\beta, +\beta[$ *avec* $\phi(0) = 0$.
2. *L'équation de la droite tangente au graphe de* $y = \phi(x)$ *au point* (a,b) *s'écrit comme suit :*

$$(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0.$$

Au point $(0,0) = (0, \phi(0))$, *l'équation est*

$$(x-0)\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + (y-0)\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \Leftrightarrow y = -2x.$$

3. (x,y) *solution de* $g(x,y) = 0$ *donc* $y = \phi(x)$, $\phi \in \mathscr{C}^1$ *et quand* $y \longrightarrow 0$; $\phi(x) \longrightarrow \phi(0) = 0$. *Alors*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x - 0} = \phi'(0) = -2.$$