Département de Mathématiques
Licence L2 maths - Analyse 3

Université Batna 2
Le 09/03/2021

Devoir maison

A rendre le jour de l'examen.

Exercice 1 *Donner la nature des séries numériques de terme général*

1. $u_n = \dfrac{1}{n\cos^2 n}$, $n \in \mathbb{N}^*$
2. $u_n = na\ln(1+\frac{1}{n}) - b\cos(\frac{1}{n}) + c\sin(\frac{1}{n}),\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ n \in \mathbb{N}^*$
3. $u_n = \dfrac{1+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}}{2^{n+1}}$.
4. $u_n = (-1)^n \ln(\dfrac{n+1}{n-1}),\ n \geq 2.$

Soit la série numérique suivante : $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^2-1}$

Montrer sa convergence et calculer sa somme S.

Exercice 2 *Soit la fonction* f *définie par*

$$f(x) = \frac{\log x}{x^\alpha},\quad x > 0,\ \alpha > 0.$$

1. *Établir le tableau des variations de* f.
2. *Étudier la nature de la suite numérique de terme général*
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\log n,\ n \geq 0,\ \alpha > 0.$$
3. *En déduire la nature de la série de terme général suivant*
$$v_n = \log n.\log(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}),\ n \geq 1,\ \alpha \geq \frac{1}{2}.$$

Exercice 3 *Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :*

1. $f_n(x) = x^n$, *sur* $[0,1[$
2. $g_n(x) = n^2xe^{-nx}$, *sur* $[0,1[$
3. $\phi_n(x) = \dfrac{x}{x(x^2+n)}$, *sur* $\mathbb{R}$
4. $\psi_n(x) = xe^{x/n}$, *sur* $[0,+\infty[$.

Exercice 4 *Soit* α *un réel non nul fixé. Pour tout entier naturel* n*, on définit la fonction*

$$x \mapsto u_n(x) = \frac{\alpha^n\cos(nx)}{n!},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. *Déterminer l'ensemble de définition* $\mathcal{D}$ *de la fonction :* $u(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n(x)$.
2. *Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ *sur* $\mathcal{D}$.
3. *Donner pour tout* $x \in \mathcal{D}$ *une expression de* $u(x)$ *à l'aide des fonctions usuelles.*

D. Kendri