

Devoir Domicile

Remarque : Le devoir doit être renvoyer aujourd'hui à cette adresse E-mail : s.megri@univ-batna2.dz avant **16h.00**

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Expliquez pourquoi $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$.
2. Montrer que f est continue en $(0, 0)$.
3. Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 en $(0, 0)$.
4. Calculer pour $(x, y) \neq (0, 0)$ les dérivées partielles $\partial_x f(x, y)$, $\partial_y f(x, y)$.
5. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .
6. Montrer que $\partial_{xy}^2 f(0, 0)$ et $\partial_{yx}^2 f(0, 0)$ existent et sont égales.
7. Calculer pour $(x, y) \neq (0, 0)$ la dérivée partielle d'ordre 2 : $\partial_{xy}^2 f(x, y)$.
8. Expliquer pourquoi on peut en déduire la valeur de $\partial_{yx}^2 f(x, y)$ sans faire de calcul.
9. Montrer que $\partial_{xy}^2 f(x, y)$ n'est pas continue en $(0, 0)$.