Université de Batna –2–
Département de statistiques et analyse des données

18/01/24
L2. SAD

EXAMEN FINAL (1h.30)

Introduction à la topologie

Exercice 1 *(6 pts) Soit l'espace métrique* $([0,+\infty[,|.|)$ *muni de la distance usuelle.*
Considérons l'application $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, *définie par :*

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

1. *Montrer que f est une application contractante.*
2. *Montrer que f admet un seul point fixe a.*
3. *Calculer a.*

Exercice 2 *(8 pts) Soit l'espace métrique* $(\mathbb{R}^2, d_2)$.
Considérons les deux ensembles suivants:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1\} \text{ et } B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$$

1. *Dessiner dans un repère orthonormé les ensembles A et B.*
2. *Montrer que A et B sont des fermés.*
3. *Étudier la compacité de A.*
4. *Soit l'ensemble* $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$. *Montrer que C est compact.*

Exercice 3 *(6 pts) Soit* $E = \mathscr{C}([0.1],\mathbb{R})$ *l'espace des fonctions continues sur* $[0,1]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.
On définit pour tout $f \in E$, *les applications:*

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt \, , \, \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

1. *Montrer que* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_\infty$ *sont deux normes sur E.*
2. *Montrer que pour tout* $f \in E$, *on a :* $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$.

Bon Courage.