Corrigé de l'exercice. 1

(*a*) Il faut que tous les coefficients du tableau soient positifs (ce qui est le cas) et que la somme des éléments du tableau vaille 1 ; on a

$$\frac{29}{100}+\frac{33}{100}+\frac{13}{100}+p^2=1 \iff \frac{75}{100}+p^2=1 \iff \frac{3}{4}+p^2=1 \iff p^2=\frac{1}{4}$$
$$\iff p=\pm\frac{1}{2}.$$

Les deux valeurs de p qui font du tableau précédent une loi de probabilité d'un couple sont $p=\frac{1}{2}$ et $p=-\frac{1}{2}$. Dans tous les cas, on a $p^2=\frac{1}{4}=\frac{25}{100}$

(*b*) La loi marginale de X est donnée par

k	$\mathbb{P}(X=k)$
-2	$\frac{62}{100}$
2	$\frac{38}{100}$

On a donc

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)=(-2)\times\frac{62}{100}+(+2)\times\frac{38}{100}=-\frac{48}{100}$$
$$\mathbb{E}(X^2)=\sum_{x\in X(\Omega)} x^2\mathbb{P}(X=x)=(-2)^2\times\frac{62}{100}+(+2)^2\times\frac{38}{100}=\frac{400}{100}=4$$
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2=4-\left(-\frac{48}{100}\right)^2=4-\frac{2304}{10000}=\frac{40000-2304}{10000}=\frac{37696}{10000}$$

La loi marginale de Y est donnée par

k	-1	1
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{42}{100}$	$\frac{58}{100}$

On a donc

$$\mathbb{E}(Y)=\sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y=y)=(-1)\times\frac{42}{100}+(+1)\times\frac{58}{100}=\frac{16}{100}$$
$$\mathbb{E}(Y^2)=\sum_{y\in Y(\Omega)} y^2\mathbb{P}(Y=y)=(-1)^2\times\frac{42}{100}+(+1)^2\times\frac{58}{100}=\frac{100}{100}=1$$
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)=\mathbb{E}(Y^2)-\mathbb{E}(Y)^2=1-\left(\frac{16}{100}\right)^2=1-\frac{256}{10000}=\frac{10000-256}{10000}=\frac{9744}{10000}$$

(*c*) Les valeurs prises par Z sont -2 et 2. On a

$$\mathbb{P}(Z=2)=\mathbb{P}(X=2,Y=1)+\mathbb{P}(X=-2,Y=-1)=\tfrac{29}{100}+\tfrac{25}{100}=\tfrac{54}{100}$$
$$\mathbb{P}(Z=-2)=\mathbb{P}(X=-2,Y=1)+\mathbb{P}(X=2,Y=-1)=\tfrac{33}{100}+\tfrac{13}{100}=\tfrac{46}{100}$$

La loi de Z est donc donnée par le tableau suivant :

k	-2	2
$\mathbb{P}(Z=k)$	$\frac{46}{100}$	$\frac{54}{100}$

On a donc

$$\mathbb{E}(Z)=\sum_{z\in Z(\Omega)} z\mathbb{P}(Z=z)=(-2)\times\frac{46}{100}+(+2)\times\frac{54}{100}=\frac{16}{100}$$
$$\mathbb{E}(Z^2)=\sum_{z\in Z(\Omega)} z^2\mathbb{P}(Z=z)=(-2)^2\times\frac{46}{100}+(+2)^2\times\frac{54}{100}=\frac{400}{100}=4$$
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(Z)=\mathbb{E}(Z^2)-\mathbb{E}(Z)^2=4-\left(\frac{16}{100}\right)^2=4-\frac{256}{10000}=\frac{40000-256}{10000}=\frac{39744}{10000}$$

(*d*) La covariance de X et Y est donnée par

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)=\frac{16}{100}-\left(-\frac{48}{100}\right)\times\frac{16}{100}=\frac{2368}{1000}.$$

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car elles ne sont pas décorrélées.

Exercice 2 1) $X(\Omega) = [\![1,n]\!] = Y(\Omega)$

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, P\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = P(X=i)\times P_{[X=i]}(Y=j) = \begin{cases} \frac{1}{n}\times\frac{1}{i} \ \ si\ j\le i \\ 0 \ si\, j>i \end{cases}$$

Conclusion : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, P\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = \begin{cases} \frac{1}{ni} \ \ si\ j\le i \\ 0 \ si\, j>i \end{cases}$

Vérification : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{ni} = \sum_{i=1}^{n} i\times\frac{1}{ni} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} = n\times\frac{1}{n} = 1$

2) $\displaystyle P(X=Y) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\big((X=i)\cap(Y=i)\big)\right) = \sum_{i=1}^{n} P\big((X=i)\cap(Y=i)\big) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{ni} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$

Cette somme n'est pas simplifiable.

3) $\displaystyle \forall j \in [\![1,n]\!], P(Y=j) = \sum_{i=1}^{n} P\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = \sum_{i=j}^{n}\frac{1}{ni} = \frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i}$

Cette somme n'est pas simplifiable.

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{n} j\times P(Y=j) = \sum_{j=1}^{n} j\times\frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{j}{ni} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{ni} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{ni}\sum_{j=1}^{i} j = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{ni}\times\frac{i(i+1)}{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{i+1}{2} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(i+1) = \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right) = \frac{1}{2n}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}+1\right) = \frac{n+3}{4}$$

Solution de l'exercice 4

a) La loi du couple $Z=(X,Y)$ est donnée par pour tout $(n,m)\in\mathbb{N}^2$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((X=n)\cap(Y=m)) &= \mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(Y=m) \text{ car X et Y sont indépendantes} \\ \mathbb{P}((X=n)\cap(Y=m)) &= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{\lambda^n}{n!}\frac{\mu^m}{m!} \end{aligned}$$

b) On retrouve le résultat très rapidement en passant par les fonctions caractéristiques, mais on peut aussi faire le calcul de la loi directement. La variable aléatoire $X+Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc sa loi est donnée par les $\mathbb{P}(X+Y=n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X+Y=n) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n}(X=k)\cap(Y=n-k)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}((X=k)\cap(Y=n-k)) \underset{\text{indep.}}{=} \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\mu} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{C_n^k}\lambda^k\mu^{n-k} \\ &\underset{\text{binôme}}{=} \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!} \end{aligned}$$

donc $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Corrigé de l'exercice 3

(*a*) Il faut que $f \geq 0$ et $\iint_{\mathbb{R}^2} f = 1$. La première condition donne $k \geq 0$. Calculons l'intégrale double pour voir quand elle vaut 1 :

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{x=1}^{x=5}\int_{y=-1}^{y=1} k\left(\frac{1}{x^2}+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{x=1}^{x=5}\int_{y=-1}^{y=1} \frac{k}{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{x=1}^{x=5}\int_{y=-1}^{y=1} ky^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= k\left(\int_{x=1}^{x=5}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{y=-1}^{y=1}\mathrm{d}y\right) + k\left(\int_{x=1}^{x=5}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{y=-1}^{y=1}y^2\,\mathrm{d}y\right) \\
&= k\left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=5}[y]_{y=-1}^{y=1} + k[x]_{x=1}^{x=5}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=-1}^{y=1} \\
&= k\left(-\frac{1}{5}+1\right)(1-(-1)) + k(5-1)\left(\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right) \\
&= \frac{8}{5}k + \frac{8}{3}k \\
&= \frac{64}{15}k.
\end{aligned}$$

L'intégrale vaut donc 1 si et seulement si $k = \frac{15}{64}$.

(*b*) La densité marginale de X est donnée par

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \text{ ou } x > 5, \\ \int_{y=-1}^{y=+1} \frac{15}{64}\left(\frac{1}{x^2}+y^2\right)\mathrm{d}y & \text{si } 1 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Calculons l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_{y=-1}^{y=+1} \frac{15}{64}\left(\frac{1}{x^2}+y^2\right)\mathrm{d}y &= \frac{15}{64}\int_{y=-1}^{y=+1}\left(\frac{1}{x^2}+y^2\right)\mathrm{d}y = \frac{15}{64}\left[\frac{1}{x^2}y+\frac{y^3}{3}\right]_{y=-1}^{y=+1} \\
&= \frac{15}{64}\left(\frac{2}{x^2}+\frac{2}{3}\right) = \frac{15}{32}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

On a donc :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{15}{32}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}\right) & \text{si } 1 \leq x \leq 5, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La densité marginale de Y es donnée par

$$f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } y < -1 \text{ ou } y > -1, \\ \int_{x=1}^{x=5} \frac{15}{64}\left(\frac{1}{x^2}+y^2\right)\mathrm{d}y & \text{si } -1 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Calculons l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_{x=1}^{x=5} \frac{15}{64}\left(\frac{1}{x^2}+y^2\right)\mathrm{d}y &= \frac{15}{64}\int_{x=1}^{x=5}\left(\frac{1}{x^2}+y^2\right)\mathrm{d}y = \frac{15}{64}\left[-\frac{1}{x}+xy^2\right]_{x=1}^{x=5} \\
&= \frac{15}{64}\left(-\frac{1}{5}+5y^2+1-y^2\right) = \frac{15}{64}\left(4y^2+\frac{4}{5}\right) = \frac{15}{16}\left(y^2+\frac{1}{5}\right).
\end{aligned}$$

On a donc :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{15}{16}\left(y^2+\frac{1}{5}\right) & \text{si } -1 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier (on en aura besoin plus loin), on a $f_Y(0) = \frac{3}{16}$.

(*c*) Puisque la densité jointe $f(x,y)$ n'est pas de la forme $g(x)h(y)$, les variables ne sont pas indépendantes.

(*d*) La densité conditionnelle est donnée par

$$\begin{aligned}
f_{X|Y=0}(x) &= \frac{f(x,0)}{\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x,0)\,\mathrm{d}x} = \frac{f(x,0)}{f_Y(0)} = \frac{f(x,0)}{\frac{3}{16}} = \begin{cases} \frac{\frac{15}{64}\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{16}} & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{5}{4}\frac{1}{x^2} & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

(e) La covariance est donnée par $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ avec :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \frac{15}{32}\int_1^5 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3}x\right)\mathrm{d}x = \frac{15}{32}\left[\ln|x| + \frac{1}{6}x^2\right]_1^5 \\
&= \frac{15}{32}\left(\ln 5 + \frac{25}{6} - \ln 1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{15}{32}(\ln 5 + 4) \\
\mathbb{E}(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \frac{15}{16}\int_{-1}^1 \left(y^3 + \frac{1}{5}y\right)\mathrm{d}x = \frac{15}{32}\left[\frac{y^4}{4} + \frac{1}{10}y^2\right]_{-1}^1 = 0. \\
\mathbb{E}(XY) &= \int_{x=-\infty}^{x=+\infty}\int_{y=-\infty}^{y=+\infty} xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{x=1}^{x=5}\int_{y=-1}^{y=1} xy\frac{15}{64}\left(\frac{1}{x^2} + y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{15}{64}\int_{x=1}^{x=5}\int_{y=-1}^{y=1} \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{15}{64}\int_{x=1}^{x=5}\int_{y=-1}^{y=1} xy^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{15}{64}\left(\int_{x=1}^{x=5}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)\left(\int_{y=-1}^{y=1} y\,\mathrm{d}y\right) + \frac{15}{64}\left(\int_{x=1}^{x=5} x\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{y=-1}^{y=1} y^3\,\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{15}{64}\left[\ln|x|\right]_{x=1}^{x=5}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=-1}^{y=1} + \frac{15}{64}\left[x^2\right]_{x=1}^{x=5}\left[\frac{y^4}{4}\right]_{y=-1}^{y=1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(Les crochets du type $[y^2]_{y=-1}^{y=1}$ ou $[y^4]_{y=-1}^{y=1}$ sont nuls.) On a donc

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0.$$

Les variables X et Y, bien que non indépendantes, ont donc une covariance nulle.