Université de Batna2
2ème année LMD Mathématiques (2020-2021)
Cours d'analyse 03

Chapitre 2 : Suites et Séries de fonctions

Soit $\mathbb{F}(D,\mathbb{K})$ l'espace des fonctions définies sur une partie $D \subseteq \mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude des suites et séries de fonctions, on va étudier la convergence simple et uniforme.
Si $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ alors, pour tout $x \in D$, et en considérant les deux fonctions réelles $(Ref)(x) = Re(f(x))$ et $(Imf)(x) = Im(f(x))$; l'étude de la convergence dans le cas complexe se ramène au cas réel car on a :

$$\forall x \in D : \ |f(x)| \leq |(Ref)(x)| + |(Imf)(x)|$$

Donc dans tout ce qui suit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $D \subseteq \mathbb{R}$ avec $D \neq \varnothing$.

1 Suites de fonctions

Définition 1.1 *Soit* $U : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{F}(D,\mathbb{K}) \\ n & \to & U_n \end{array}$

Où

$$U_n : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & U_n(x) \end{array} \tag{1}$$

La suite $(U)_{n\in\mathbb{N}}$ *s'appelle suite de fonctions définie sur* D*.*

Exemples

1. Pour $D = \mathbb{R}$, posons $\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x) = e^{-nx}$ $\forall x \in D$. On a $f_0(x) = 1$ est la fonction constante, $f_1(x) = e^{-x}$, $f_2(x) = e^{-2x}$......
2. $D = [0,1]$; $f_n(x) = x^n$; $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$....

1.1 Convergence simple

Définition 1.2 *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions sur* D*, elle est dite convergente simplement ou ponctuellement sur* D *si pour tout* $x_0 \in D$ *la suite numérique* $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente. En notant* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$*, ainsi on définira une fonction*

$$\begin{array}{rcl} f\ D & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & f(x) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) \end{array} \tag{2}$$

qui s'appelle limite simple de f_n *sur* D *et on écrit :*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n = f \ \ ou \ \ f_n \xrightarrow[D]{CS} f$$

Ceci s'écrit en utilisant la définition de la limite :

$$\forall x \in D; \forall\epsilon > 0, \exists n_{(x,\epsilon)} : \forall n \geq n_{(x,\epsilon)} \Rightarrow |f_n - f| < \epsilon$$

Exemples

1. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie sur $[0, +\infty[$ par :

   $$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$$

   pour $x \neq 0$, on a : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = 1$ et si $x = 0$ on a $f_n(0) = 0$. Donc (f_n) converge vers la fonction f avec

   $$\begin{array}{rcl} f:\ [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & f(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ x \neq 0 \\ 0 & si\ \ x = 0. \end{cases} \end{array}$$

2. Soit la suite de fonction $(f_n)_{n\geq 0}$ définie sur $[0, 1]$ par : $f_n(x) = x^n$ pour $x \neq 1$, on a : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = 0$ et si $x = 1$ on a $f_n(1) = 1$. Donc (f_n) converge vers la fonction f avec

   $$\begin{array}{rcl} f:\ [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & f(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x \neq 1 \\ 1 & si\ \ x = 1. \end{cases} \end{array}$$

Remarque 1.1 *Dans les exemples (1) et (2) les fonctions* f_n *étaient continues mais la fonction limite* f *ne l'était pas, donc la convergence simple ne préserve pas la continuité ; mais nous avons ce résultat :*

Proposition 1.1 *Soit* $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions convergente vers une fonction* f *sur* D*. Si,* $\forall x \in D :\ f_n(x) \geq 0$ *alors* $f(x) \geq 0$*.*

1.2 Convergence uniforme

Avant de donner la définition de la convergence uniforme, nous avons besoin de la notion de norme :

Définition 1.3 *Soit f et g deux fonctions définies sur D. On appelle la quantité :*

$$\|f-g\|_\infty = sup\{|f(x)-g(x)|, x \in D\} = \sup_{x\in D}|f(x)-g(x)|$$

la norme infinie de $(f-g)$ ou encore la norme de la convergence uniforme.

La norme possède les propriétés suivantes :

1) $\forall f \in \mathbb{F}(D,\mathbb{K}) : \|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0_D$. (Condition de séparation).
2) $\forall f \in \mathbb{F}(D,\mathbb{K}); \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda.f\|_\infty = |\lambda|.\|f\|$. (Condition d'homogénéité.)
3) $\forall f \in \mathbb{F}(D,\mathbb{K}) : \|f+G\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. (Inégalité triangulaire).

Définition 1.4 *(La convergence uniforme) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur D, on dit qu'elle converge uniformément sur D ssi :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon : \ \forall x \in D \ [n \geq n_\epsilon \Rightarrow |f_n - f| < \epsilon]$$

ou encore si

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

et on écrit : $f_n \xrightarrow[D]{C.U} f$.

Proposition 1.2 *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions qui converge uniformément sur D vers une fonction f alors elle converge simplement.*

Pour montrer la convergence uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur une partie D, on procède comme suit :

1. On calcule, d'abord la fonction limite simple qu'on note f.
2. On pose $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|, \forall x \in D$ et on étudie les variations de g_n sur D. ((Le but est de déterminer $\sup_D g_n$).
3. On calcule $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|f_n - f\| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_D g_n = L$. Si $L = 0$ on a convergence uniforme sinon on n'a pas.

Remarque 1.2 *On peut s'en passer du calcul de* $\sup\limits_D g_n$ *si on majore la fonction* g_n *sur* D *par une suite numérique convergente vers* 0.

Exemple Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$$

Nous avons déjà vu dans l'exemple précédent que (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x \neq 0 \\ 0 & si \;\; x = 0. \end{cases}$$

On a

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty[} |\frac{nx}{1+nx} - 1| = \sup_{x\in[0,+\infty[} \frac{1}{1+nx} = 1$$

donc :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|f_n - f\|_\infty \neq 0$$

Et on n'a pas convergence uniforme sur $[0,+\infty[$.
Mais si on prend l'intervalle $[\delta,+\infty[$ où $\delta > 0$, on trouve que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n = f$ où f est la fonction constante $f(x) = 1$ sur $[\delta,+\infty[$.
Dans ce cas, on a :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[\delta,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[\delta,+\infty[} |\frac{nx}{1+nx} - 1| = \sup_{x\in[\delta,+\infty[} \frac{1}{1+n\delta} = 0$$

Donc on a convergence uniforme sur $[\delta,+\infty[$.

1.3 Théorèmes fondamentaux sur les suites uniformément convergentes

Théorème 1.1 *(Continuité et convergence uniforme) Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction* f *sur* D. *Si toutes les fonctions* f_n *sont continues en un point* $x_0 \in D$ *alors* f *est aussi continue en* x_0.

Il en résulte immédiatement :

Corollaire 1.1 *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction* f *sur* D. *Si toutes les fonctions* f_n *sont continues sur* D *alors* f *est continue sur* D.

Remarque 1.3
1. *Si $f_n \xrightarrow[D]{C.U} f$ et s'il existe une* <u>sous-suite</u> *(f_{n_k}) où toutes les fonctions f_{n_k} sont continues en $x_0 \in D$, alors f est aussi continue en x_0.*
2. *Le théorème précédent reste vrai si on a continuité à droite ou à gauche d'un point.*
3. *Si une suite de fonctions continues converge vers une fonction qui n'est pas continue alors la convergence n'est pas uniforme ; le théorème donne juste une condition suffisante pour que la fonction limite soit continue mais ne donne pas une condition nécessaire de convergence uniforme ; voici un exemple :*

Exemple Soit la suite de fonctions définies sur $[0, 2]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2.x & si \;\; 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ -n^2.x + 2n & si \;\; \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & si \;\; x \geq \frac{2}{n} \end{cases}$$

Toutes les fonctions f_n sont continues et la suite converge simplement vers la fonction continue $f = 0$ mais la convergence n'est pas uniforme car on a :

$$\|f_n - f\|_\infty = f_n(\frac{1}{n}) = n \longrightarrow \infty.$$

Théorème 1.2 *(Intégrale et convergence uniforme) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur un segment $[a, b] \subseteq D$ qui converge uniformément vers une fonction f sur D. Alors f est intégrable sur $[a, b]$ et on a :*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Exemple Voir TD2 exercice 3-4 et 5.
Ce résultat montre qu'on peut changer le signe de la limite et l'intégrale.

Remarque 1.4 *Attention pour la dérivation si $f_n \xrightarrow{C.U} f$; on n'a pas toujours $f'_n \xrightarrow{C.U} f'$ voici un exemple :*

Exemple Soit $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{x}}$, elle converge simplement vers f la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ et on a $\|f_n - f\|_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc on a la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
Par contre $f'_n = \sqrt{n}cos(nx)$ est une suite de fonctions divergente sur $\mathbb{R}$.
Dans le cas de la dérivation le théorème s'énonce comme suit :

Théorème 1.3 *(Dérivation et convergence uniforme) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continument dérivable sur D et vérifiant :*

1. *La suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g sur D*

$$f_n \xrightarrow[D]{C.U} g$$

.

2. *$\exists x_0 \in D$ tel que la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f continument dérivable sur D vérifiant : $f' = g$

2 Séries de fonctions

2.1 Généralités et convergence simple

Définition 2.1 *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie sur une partie non vide $D \subseteq \mathbb{R}$.*
Posons : $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} U_n(x)$.
Le couple $(U_n(x), S_n(x))$ s'appelle série de fonctions de terme général $U_n(x)$ et la fonction :

$$\begin{array}{cccc} S_n & D & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & S_n(x) \end{array} \tag{3}$$

s'appelle la nième somme partielle de la série.

Définition 2.2 *Convergence simple :*
La série $\sum_n U_n(x)$ est dite simplement convergente sur D, si pour tout $x_0 \in D$, la série numérique $\sum_n U_n$ est convergente ou bien si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente sur D.

Exemple Soit la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n+3}$; $x \in \mathbb{R}$.
Pour $x = 0$ on a convergence, pour $x \neq 0$ appliquons le critère de D'Alembert :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mid \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} \mid = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mid \frac{x^{n+1}}{n+4}.\frac{n+3}{x^n} \mid = |x|$$

donc la série converge si $|x| < 1$.

2.2 Convergence uniforme et normale

Définition 2.3 *Convergence uniforme :*
On dit que la série de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur D si sa somme partielle est uniformément convergente sur D ($S_n \xrightarrow[D]{C.U} S$).

Remarque 2.1 *La convergence uniforme d'une série de fonctions signifie :*

$$\forall\epsilon > 0, \exists N_\epsilon : \ \forall x \in D \left[n \geq N_\epsilon \Rightarrow |\sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k(x)| < \epsilon \right]$$

Autrement dit la suite des restes $(R_n(x))_n$ converge uniformément vers la fonction nulle.
Par contre, pour la convergence simple on écrit :

$$\forall x \in D, \ \forall\epsilon > 0, \exists N_{x,\epsilon} : \ \left[n \geq N_{x,\epsilon} \Rightarrow |\sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k(x)| < \epsilon \right]$$

Proposition 2.1 *Si $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ est une série de fonctions qui converge uniformément sur une partie D, alors elle converge simplement sur D.*

Remarque 2.2 *La réciproque est fausse.*

Exemple Soit la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} x^n$, c'est une série géométrique qui converge pour $|x| < 1$.
On a $S_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ et $S = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-x}$. Donc la série converge simplement sur $]-1, 1[$ vers la fonction

$$S : x \longrightarrow S(x) = \frac{1}{1-x}$$

Mais on n'a pas convergence uniforme sur $]-1, 1[$ car

$$\|S_n - S\|_\infty = \sup_{x\in]-1,1[} |S_n(x) - S(x)| = +\infty$$

Par contre si on prend $0 < \delta < 1$, alors :

$$\|S_n - S\|_\infty = \sup_{x\in[-\delta,\delta]} |S_n(x) - S(x)| = \frac{\delta^{n+1}}{1-\delta} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc on a convergence uniforme sur tout intervalle du type $[-\delta, \delta] \subset]-1, 1[$

Théorème 2.1 *Condition nécessaire de convergence uniforme :*
Si $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ est une série de fonctions qui converge uniformément sur une partie D alors son terme générale $U_n(x)$ converge uniformément vers la fonction nulle sur D.

Pour montrer la convergence uniforme , on peut utiliser ce résultat :

Théorème 2.2 *Critère de Cauchy pour la convergence uniforme :*
Soit la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$; $U_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour que cette série converge uniformément sur D, il faut et il suffit que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon : \ \forall n, \ \forall p \geq 1; \forall x \in D \left[n \geq N_\epsilon \Rightarrow |\sum_{k=n+1}^{n+p} U_k(x)| < \epsilon \right] \tag{4}$$

On a :

$$(4) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon : \ \forall n \ \forall p \geq 1; \left[n \geq N_\epsilon \Rightarrow \| \sum_{k=n+1}^{n+p} U_k(x) \|_\infty < \epsilon \right]$$

Il y a aussi *la règle d'Abel* de la convergence uniforme :

Théorème 2.3 *Soit $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ une série de fonctions où les fonctions $U_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrivent $U_n(x) = A_n(x).B_n(x)$ et les suites de fonctions $(A_n(x))_n$ et $(B_n(x))_n$ vérifient :*

1) *La suite $(A_n)_n$ est décroissante ; c'est à dire :*

$$\forall x \in D : A_n(x) \leq A_{n+1}(x)$$

et elle converge uniformément vers la fonction nulle : $(A_n \xrightarrow[D]{C.U} 0_D)$

2) *Les sommes partielles de la suite $(B_n)_n$ sont uniformément bornées :*

$$\exists M > 0, \ \forall n; \ \forall x \in D : \ |B_0(x) + B_1(x) + ... + B_n(x)| \leq M$$

Alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ est uniformément convergente sur D.

Exemple La série $\sum\limits_{n} \dfrac{\sin(nx)}{n}$ est uniformément convergente sur $D = \mathbb{R} \setminus \{x = 2k\pi, \ k \in mathbbZ\}$ car en posant $A_n(x) = \frac{1}{n}$ et $B_n(x) = \sin(nx)$ on a :

1. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\|A_n(x)\|\infty = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n} = 0$$

2. Pour les sommes partielles de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a :

$$\forall x\in D,\ |\sin x+\sin 2x+...+\sin nx| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \leq M$$

avec

$$M = \sup_{x\in D} |\ \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\ |\ .$$

Donc les conditions de la règle d'Abel sont vérifiées.

Définition 2.4 *Convergence normale :*
Soit la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x);\ \ U_n : D\longrightarrow\mathbb{R}$. *On dit que* $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ *est* *normalement convergente* *sur* D, *si la série numérique* $\sum\limits_{n\geq 0}\|U_n\|_\infty$ *est convergente.*
Sachant que :

$$\|U_n\|_\infty = \sup_{x\in D} U_n(x)$$

Théorème 2.4 *Si une série de fonctions* $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ *est normalement convergente sur* D, *alors elle est uniformément convergente sur* D.

La convergence normale est un outil pour montrer la convergence uniforme. Pour démontrer qu'une série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ est normalement convergente sur une partie D soit :
A) On calcule $\|U_n\|_\infty$ sur D et on montre que la série numérique $\sum\limits_n\|U_n\|_\infty$ est convergente.
Ou bien
b) On essaye de trouver une suite numérique $(v_n)_n$ tel que :

$$\forall x\in D|\ \ U_n(x)| \leq v_n$$

et $\sum v_n$ soit convergente.
Exemple Soit la série $\sum\limits_n U_n(x)$ de terme général $U_n(x) = x.e^{-nx^2}$.
On va étudier sa convergence sur $]0,+\infty[$.
On a $U_n'(x) = e^{-nx^2}(1-2nx^2) = 0$,

donc $U_n'(x) \geq 0$ si $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}$ et $U_n'(x) \leq 0$ sinon.
Alors :

$$\|U_n\|_\infty = \sup_{0<x} |U_n(x)| = U_n(\frac{1}{\sqrt{2.n}}) = \frac{1}{\sqrt{2n}.e^{-1/2}} = M_n$$

et comme $\sum\limits_n M_n$ est une série divergente donc la série $\sum\limits_n U_n(x)$ n'est pas normalement convergente sur $]0, +\infty[$.
Mais si on prend $D = [1, +\infty[$, la fonction est décroissante sur D, donc

$$\|U_n\|_\infty = \sup_{1\leq x} |U_n(x)| = U_n(1) = e^{-n} = M_n$$

Dans ce cas $\sum\limits_n M_n$ est une série convergente donc la série $\sum\limits_n U_n(x)$ est normalement convergente sur $[1, +\infty[$.

Remarque 2.3 *La réciproque est fausse. Il existe des séries qui converge uniformément sur un ensemble sans converger normalement.*

Exemple La série $\sum\limits_n \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ est uniformément convergente sur $[0, 1]$ par application de la règle d'Abel avec :

$$A_n(x) = \frac{1}{x+n} \;\; et \;\; B_n(x) = (-1)^n$$

Mais on n'a pas convergence normale sur $[0, 1]$ car

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{(-1)^n}{n+x} \right| = \frac{1}{n}$$

et la série $\sum\limits_n \frac{1}{n}$ diverge.

2.3 Convergence uniforme et propriétés des sommes de séries de fonctions

Théorème 2.5 *(Continuité et convergence uniforme) Soit $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions qui converge uniformément vers une fonction S sur D. Si toutes les fonctions f_n sont continues en un point $x_0 \in D$ alors la somme S est aussi continue en x_0.*

De ce théorème, on a le résultat suivant :

Corollaire 2.1 *Soit $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions qui converge uniformément sur D. Si toutes les fonctions f_n sont continues sur D alors Sa somme S est une fonction continue sur D.*

Théorème 2.6 *(Intégrale et convergence uniforme) Soit $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions intégrables sur un segment $[a,b] \subseteq D$ qui converge uniformément vers une fonction S sur D. Alors f est intégrable sur $[a,b]$ et on a :*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_a^b \sum_{n\geq 0} f_n dx = \int_a^b S(x)dx.$$

Ce résultat montre qu'on peut changer le signe de la somme infinie et l'intégrale en cas de convergence.

Théorème 2.7 *(Dérivation et convergence uniforme) Soit $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions où toutes les fonctions f_n sont continument dérivables sur D et vérifiant :*

1. *La série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n'$ converge uniformément vers une fonction g sur $[a,b] \subseteq D$*
2. *$\exists x_0 \in [a,b]$ tel que la suite $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x_0)$ converge.*

Alors on a :

1. *La série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur D.*
2. *La somme S est une fonction continument dérivable sur D et on a :*

$$\forall x \in D,\ S'(x) = (\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x))' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

continument dérivable sur $[a,b]$ vérifiant :

$$f' = g$$