

Révision - Feuille de TD N°0

Exercice 1 Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

I. Soient $A_1, A_2 \subseteq E$. Montrer que:

1. $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$.
2. $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.
3. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

Soit l'application f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 - 3$. Calculer $f([1, 4])$ et $f([-2, 5])$.

II. Soient $B_1, B_2 \subseteq F$. Montrer que:

1. $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.
2. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
3. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

Soit l'application f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 + 5$. Calculer $f^{-1}([6, 9])$.

Exercice 2 Soit A une partie non vide de \mathbb{R} . On pose

$$-A = \{-x : x \in A\}$$

Montrer que :

1. Si A est majorée, alors $(-A)$ est minorée et on a : $\inf(-A) = -\sup A$.
2. Si A est minorée, alors $(-A)$ est majorée et on a : $\sup(-A) = -\inf A$.

Exercice 3 Soit $A = \left\{ \frac{n-1}{n+1}; n \in \mathbb{N} \right\}$. Calculer $\sup(A)$ et $\inf(A)$.

Exercice 4 Montrer que