Département de Mathématiques — Université Batna 2

Licence L2 maths - Analyse 3 — 2020-2021

Séries Numériques - Feuille de TD n°1-

Exercice 1 1. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques vérifiants :*

$$u_{n+1} = v_{n+1} - v_n \ \forall n \geq 0.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi la série $\sum\limits_n u_n$ converge.

2. *Montrer la convergence de la série $\sum\limits_n \frac{1}{n(n+2)}$ et calculer son reste d'ordre* 100.

3. *Étudier la nature des séries suivantes :*

$$(1)\ \sum_n \frac{3^n+n}{3^n.n} \quad (2)\ \sum_n \cos n \quad (3)\ \sum_n \sqrt{n+1}+\sqrt{n}.$$

Exercice 2 *Soit $\sum\limits_n u_n$ une série à termes positifs. Montrer que :*

1. $\sum\limits_n u_n$ *converge* $\Rightarrow \sum\limits_n u_n^2$ *converge. Qu'en est il pour l'inverse ?*
2. $\sum\limits_n u_n$ *converge* $\Rightarrow \sum\limits_n \sqrt{u_{2n}.u_n}$ *converge.*

Exercice 3 *Étudier la nature des séries ci-dessous (Comparer aux séries de Riemann ou de Bertrand.)*

$$(1)\ \sum_{n\geq 0} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+4} \quad (2)\ \sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n!)} \quad (3) \sum_{n\geq 2} \frac{n}{(\ln n!)^2} \quad (4)\ \sum_{n\geq 1} \ln(1+\frac{1}{n}) \quad (5)\ \sum_{n\geq 2} \frac{n+3}{n^2.(\ln n)^{3/2}}.$$

Exercice 4 *Étudier la nature des séries ci-dessous (Critère de Cauchy et de D'Alembert.)*

$$(1)\ \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \quad (2)\ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n} \quad (3)\ \sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} \quad (4)\ \sum_{n\geq 1} [n(1-\cos\frac{1}{n})+c]^n;\ c\in\mathbb{R}^+ \quad (5)\ \sum_{n\geq 1} (\frac{2^{2n}.e^{2n}}{n}.$$

Exercice 5 *En utilisant la règle de Raabe-Duhamel, étudier la nature des séries suivantes :*

$$\sum \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}. \quad \text{et} \quad \sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}.$$

Exercice 6 *Étudier la convergence des séries alternées suivantes :*

$$(1)\ \sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{2\sqrt{n}}{n-1} \quad (2)\ \sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}\right) \quad (3)\ \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}.$$

Exercice 7 *Étudier la convergence et la convergence absolue de la série dont le terme général est donné par :* $u_n = \dfrac{\sin n}{n^\alpha}$, $\forall \alpha > 0$.

Exercice 8 *Étudier la convergence des séries suivantes (en utilisant le développement limité)*

$$(1)\ \sum_{n\geq 1}\left(n\ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{2n}{2n+1}\right) \quad (2)\ \sum_{n\geq 2}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) \quad (3)\ \sum_{n\geq 1}\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right).$$

Exercice 9 1. *Sachant que* $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, *calculer la somme* $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$.

2. *Sachant que* $\sum_{n\geq 0}\dfrac{1}{n!} = e$, *calculer la somme* $\sum_{n\geq 0}\dfrac{3n-5}{n!}$ *et* $\sum_{n\geq 0}\dfrac{n^2}{n!}$

Exercice 10 *(Supplémentaire) Soit* $\sum_n u_n$ *une série à termes positifs convergente*

1. *Montrer que si* $(u_n)_n$ *est décroissante alors* $\lim_{n\longrightarrow +\infty} n.u_n = 0$.
2. *Montrer que les séries* $\sum_n u_n$ *et* $\sum_n \dfrac{u_n}{1+u_n}$ *sont de même nature.*
3. *Si* $\sum_n v_n$ *est une autre série à termes positifs convergente, montrer que la série* $\sum_n \sqrt{u_n.v_n}$ *est convergente.*

Exercice 11 *(Supplémentaire) Étudier la nature des séries numériques suivantes :*

$$(1)\ \sum_n \ln\left(\tfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) \quad (2)\ \sum_n n.e^{-\sqrt{n}} \quad (3)\ \sum_{n\geq 1}\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n} \quad (4)\ \sum_{n\geq 1}(\frac{n}{n+1})^{n^2}$$

$$(5)\ \sum_{n\geq 1}(\cos\frac{1}{\sqrt{n}})^n \quad (6)\ \sum_{n\geq 1}c^n\frac{n!}{n^n},\ c>0 \quad (7)\ \sum_{n\geq 1}1-\cos\frac{1}{n} \quad (8)\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^n$$

$$(9)\sum_{n\geq 1}\frac{\cos n}{\sqrt{2}+\sin n} \quad (10)\ \sum_n\frac{(-1)^n\ln n}{n} \quad (11)\ \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n n^2}{2^n} \quad (12)\ \sum_n\frac{\cos n}{n^\alpha},\ \alpha>0$$

Exercice 12 *(Supplémentaire) Calculer les sommes suivantes*

$$(1)\ \sum_{n\geq 0}\frac{3}{(3n+1)(3n+4)} \quad (2)\ \sum_{n\geq 2}\frac{3^n}{7^{n-2}} \quad (3)\ \sum_{n\geq 0}\frac{2^{n+2}}{3^n}$$

D. Kendri