TD n°1-

Exercice 1 1) *Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que les applications suivantes définissent des normes sur $\mathbb{R}^n$:*

a) $N(x) = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}(|x_i|)$.

b) $N(x) = \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|)^2\right)^{1/2}$.

c) $N(x) = \|x\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i|$.

2) *Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \quad \text{et} \quad \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

Discuter le cas $n = 1$.

3) *Représenter dans $\mathbb{R}^2$ la boule unité fermée*

$$\overline{B}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| \leq 1\},$$

pour chacune des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

4) *Montrer qu'on ne peut pas induire une norme de la distance discrète sur $\mathbb{R}$.*

5) *Montrer que pour tout x et y dans $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}^*$), on a $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.*

6) *Si $(x_n)_n$ est une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}^*$) qui converge dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^N, \|.\|)$, montrer que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|x_n\| = \|\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n\|$.*

7) *Si $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont deux suites de vecteurs de $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}^*$) tel que la suite $(x_n)_n$ converge vers le vecteur $a \in \mathbb{R}^N$ et $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|x_n - y_n\| = 0$, montrer que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} y_n = a$.*

Exercice 2 A. *Déterminer et représenter (si possible) D le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :*

$$1)\ f(x,y) = \sqrt{y - x^2},\ 2) f(x,y) = \frac{\ln y}{\sqrt{x-y}}, 3)\ g(x,y) = \frac{x\cos y}{x^2 - 4y^2},$$

$$4)\ f(x,y,z) = e^{y-x} + \cos(y.z),\ 5)\ g(x,y) = \left(\tfrac{y-x}{x^2-y^2}, \ln(x+y)\right)\ ,\ 6)\ g_1(x,y,z) = \frac{\cos x + \ln y}{y+z}.$$

B. *Déterminer C_k les courbes à niveaux de la fonction f quand k parcours $\mathbb{R}$ dans les cas suivants :*

(a) $f(x,y) = x - y + |x - y|$, *représenter C_1 et C_0.*

(b) $f(x,y) = y - \cos x$, *représenter C_0 et C_{-1}.*

Exercice 3 *Calculer les limites suivantes en cas d'existence :*

$$1)\ \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x-y} \qquad 2)\ \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}, \qquad 3)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$4)\ \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\cos x-\cos y}{x-y} \qquad 5)\ \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x+y}{x-y}, \qquad 6)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{x}.$$

Exercice 4 *Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :*

$$1)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{|xy|+(x+y)^2}, & si\ \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

$$2)\ g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-xy}{\sqrt{x^2+y^2}}e^{-|xy|}, & si\ \ (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & si\ \ (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

$$3)\ h(x,y,z) = \begin{cases} (e^{xyz}, xyz\ln(|x|+|y|+|z|), & si\ \ (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ (1,0) & si\ \ (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}.$$

Exercice 5 *Vérifier si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité sur* $\mathbb{R}^2$ *:*

$$f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+3y^2}}, \quad g(x,y)=xe^{x/y}, \quad h(x,y)=y\sin\frac{x}{y}.$$

Exercices supplémentaires

Exercice 6 *A. Déterminer D le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :*

$1)\ f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^4+2},\ 2)\ f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}+\sqrt{4-x^2+y^2},$

$3)\ h(x,y)=\dfrac{\ln(4-x^2-y^2)}{\ln(x^2+y^2-1)},\ 4)\ f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x}{y}},\ 5)\ f(x,y)=(\frac{\sin x-\sin y}{x^2+y^2}, \frac{1-y}{x^2+y^2})$

$6)\ h_1(x,y)=(\sqrt{y-x^2}, \dfrac{\sin y}{y}),\ 7)f(x,y,z)=y.e^{z+1}.\sin x.$

B. Déterminer C_k *les courbes à niveaux de la fonction* f *quand* k *parcours* $\mathbb{R}$ *dans les cas suivants*

(a) $f(x,y)=f(x,y)=y-x^2$, *représenter* C_0 *et* C_1.

(b) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; *représenter* C_0 *et* $C_{1/2}$.

(c) $f(x,y)=e^{y-x^2}$.

Exercice 7 *Calculer les limites suivantes, si elles existent*

$$1)\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x+y|}{x^2+y^2},\ 2)\lim_{(x,y)\to(a,-a)}\frac{\sin(x+y)}{x+y}, a\in\mathbb{R}, \quad 3)\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2).$$

Exercice 8 *Étudier la continuité de la fonction suivante sur* $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\ln(1+x^3)}{y(x^2+y^2)}, & si\ \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$