Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Introduction à la Topologie
Mme. Hanachi Adalet
2021-2022

TRAVAUX DIRIGÉS 2
2ÈME ANNÉE LICENCE MATH

Exercice 1 On munit $\mathbb{Q}^*$ par la distance d tel que $d : \mathbb{Q}^* X \mathbb{Q}^* \to \mathbb{R}^+$

$$(x,y) \to d(x,y) = \begin{cases} 0; & \text{si} \quad x = y \\ \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} \text{si} & x \neq y \end{cases}$$

Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites telles que $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = n$

1- Est ce que les suites (x_n) et (y_n) sont de Cauchy ?

2- Déduire que $(\mathbb{Q}^*, d)$ n'est pas complet.

Exercice 2 On muni $E = C([a,b],\mathbb{R})$ par d_∞ la distance de la convergence uniforme telle que

$$d : EXE \to \mathbb{R}^+, \quad d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

Pour tout $k > 0$, considérons

$$M_k = \{f \in E, /|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|, \forall x,y \in [a,b]\}$$

1- Montrer que M_k est fermé dans (E,d_∞).

2- Déduire que (M_k,d_∞) est complet.

Soit

$$D_k = \{f \in E, /|f'(x)| \leq k, \forall x \in [a,b]\}$$

3- Vérifier que $D_k \subset M_k$.

Exercice 3 Soit (E,d) un espace métrique et B une partie non vide de E.

1- Soit $x \in E$ tel que $x \in \overline{B}$. Peut-on trouver dux ouverts U et V tels que $x \in U$ et $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

2- On suppose que $x \notin \overline{B}$ et on pose $\delta = d(x,B)$. Montrer que $U = B(x, \frac{\delta}{2})$ et $V = \cup_{y\in B} B(y, \frac{\delta}{2})$ sont des ouverts séparant x et B c-à-d $x \in U$ et $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

3 Soit A une partie de E telle que $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$.

3-1 Peut-on avoir $d(A,B) = 0$.

3-2 Pour $x \in A$, on pose $d_x = d(x,B)$ et pour $y \in B$, $\delta_y = d(y,A)$ et on désigne par U et V les ouverts $U = \cup_{x\in A} B(x, \frac{d_x}{2})$, $V = \cup_{y\in B} B(y, \frac{\delta_y}{2})$. Montrer que le couple (U,V) séparé (A,B) c-à-d $A \subset U$ et $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Exercice 4 Soit $f : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ une fonction telle que $f(x) = \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{2}{5}x$. Montrer que f admet une racine unique dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Soit $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$. Montrer que f admet un point fixe unique dans $[1,2]$.

Exercice 6 Soient (E,d_E), (F,d_F) deux espaces métriques et f une application continue de E dans F. Soit K une partie compacte de F. Montrer que $f^{-1}(K)$ est fermée de E. Trouver un exemple qui montre que $f^{-1}(K)$ n'est pas nécessairement compacte.

Devoir Soient $f : (E,d) \to (F,\delta)$ une application continue et surjective, et A une partie dense dans E. Montrer que $f(A)$ est dense dans F