Université de Batna –2–
Faculté des Mathématiques et d'Informatique
$2^{ème}$ année Licence SAD

Introduction à la Topologie
Mme. S. Megri
2023-2024

TRAVAUX DIRIGÉS 1

Exercice 1 *Soient (E,d) un espace métrique et $f : E \to E$ une application.*

1. *Quelle condition doit vérifier f pour que l'application $\delta : E \times E \to \mathbb{R}^+$ définie par : $\delta(x,y) = d(f(x), f(y))$ soit également une distance sur E.*
2. *Lesquelles des applications suivantes sont des distances sur $\mathbb{R}$?*
   1. $d(x,y) = |x^2 - y^2|$ 2. $d(x,y) = |x^3 - y^3|$
   3. $d(x,y) = |x - 2y|$ 4. $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$
   5. $d(x,y) = e^{x-y}$ 6. $d(x,y) = |\sin x - \sin y|$.

Exercice 2 *Soient (E,d) un espace métrique et $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction strictement croissante, vérifiant:*
(i) $\varphi(0) = 0$.
(ii)$\varphi(u+v) \leq \varphi(u) + \varphi(v)$.

1. *Montrer que $\delta = \varphi \circ d$ est également une distance sur E.*
2. *Déduire que $d_1 = \dfrac{d}{1+d}$ et $d_2 = \log(1+d)$ sont des distances sur E.*

Exercice 3 *Soit $E = \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.*
Déterminer si les applications suivantes définissent des distances sur E
1. $d(f,g) = \int_0^1 f(x) - g(x)dx$;
2. $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$;
3. $d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$.

Exercice 4 *Soit E un ensemble non vide. On définit d sur $E \times E$ par:*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}$$

1. *Montrer que d est une distance sur E.*
2. *Déterminer la boule ouverte $B(x,r)$ où $x \in E$ et $r > 0$.*
3. *En déduire les ouverts et les fermés de (E,d).*

Exercice 5 *On se place dans l'espace métrique $\mathbb{R}$ muni par sa distance usuelle $|.|$*

1. *Soient $a,b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a \leq b$.*
   (a) *Montrer que les intervalles fermés $[a,b]$, $]-\infty,a]$ et $[a,+\infty[$ sont des fermés dans $\mathbb{R}$.*
   (b) *Montrer que l'intervalle $[a,b[$ n'est ni ouvert , ni fermé dans $\mathbb{R}$.*
2. *Les parties $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$ sont elles ouvertes? fermées?*

Exercice 6 *Soient (E,d) un espace métrique, et A,B deux sous-ensembles de E.*

1. *On suppose $A \subseteq B$. Démontrer que $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$ et $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.*

2. *Démontrer que* $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ *et que* $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$.

3. *Démontrer que* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *et que* $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

4. *Montrer que* $\overset{\circ}{\widehat{A^c}} = \overline{A}^c$ *et* $\overline{A^c} = (\mathring{A})^c$.

Exercice 7 *Soit* $(\mathbb{R}, |.|)$ *un espace métrique usuel.*

1. *Pour chacune des parties ci-dessous, déterminer* $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $Fr(A)$, *les points isolés* $iso(A)$ *et les points d'accumulation* $acc(A)$.

$$]-\infty, 0[\cup]0, 2[\cup \{4, 7\}; \ \mathbb{Z}; \ \mathbb{Q} \ \textit{et} \ \{(-1)^n + \frac{1}{2^n}, \ n \in \mathbb{N}\}.$$

2. *Déterminer* $\overline{\mathring{A}}$ *et* $\overset{\circ}{\overline{A}}$ *pour :* $]0, 1]$ *et* $\mathbb{Q}$.